32. Significato geometrico della derivata.

Applet su significato geometrico

Applet sulla pendenza di una retta e rapporto incrementale
http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/geom1/geom1.html#anstieg

Applet sul significato geometrico della derivata
http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/diff1/diff1.html#ableitung

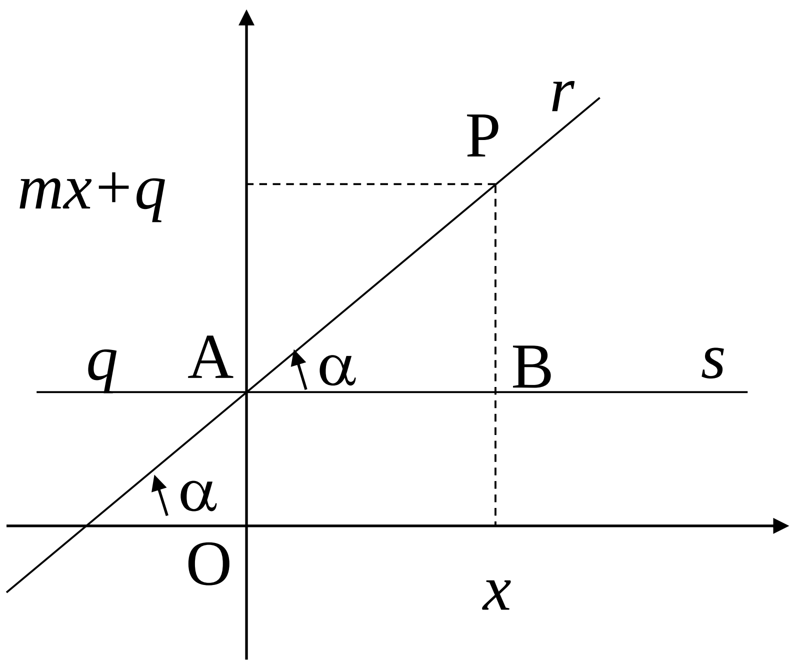
Nel piano cartesiano, consideriamo una retta r non parallela all’asse delle ordinate di equazione

$$y=mx+q$$

m = coefficiente angolare

q = origine all'origine

Coefficiente angolare di una retta: significato geometrico



La retta r: $y=mx+q$

forma l'angolo α con l'asse x

e il punto A ha coordinate $A=(0,q)$

Il generico punto P sulla retta r ha coordinate $P=(x,mx+q)$

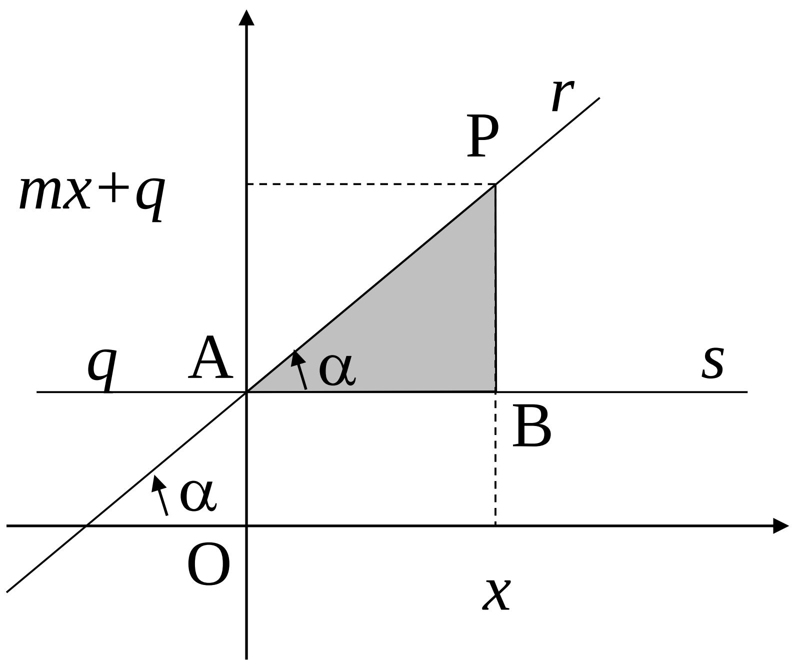
Sia s la retta passante per il punto A e parallela all'asse delle ascisse

Infine, indichiamo con B il punto di intersezione tra la retta s e la perpendicolare da P all'asse delle ascisse

$\Rightarrow$ B ha coordinate $B(x,q)$

e osserviamo che l'angolo $PAB=\alpha$

Coefficiente angolare di una retta: significato geometrico



$$A\,(0,q)$$
$$P(x,mx+q)$$
$$B(x,q)$$
$$PAB = \alpha$$

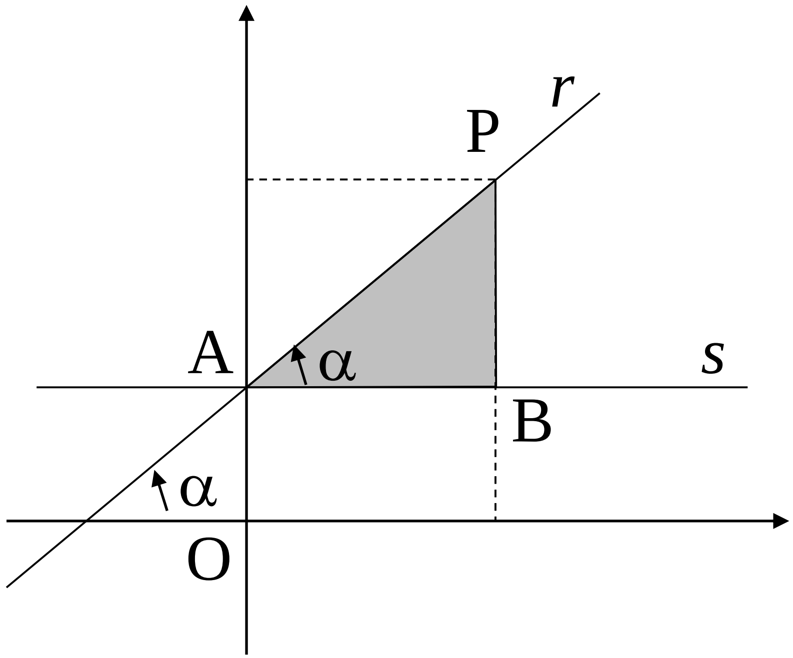
Consideriamo il triangolo APB rettangolo in B

$$BP = AP\ sen\ \alpha$$
$$AB = AP\ cos\ \alpha$$

$$\frac{BP}{AB} = \frac{AP\ sen\,\alpha}{AP\ cos\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tan\,\alpha$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{BP}{AB} = tan\,\alpha}$$

Coefficiente angolare di una retta: significato geometrico



$$A\,(0,q)$$
$$P(x,mx+q)$$
$$B(x,q)$$
$$PAB=\alpha$$

Nello stesso tempo vale

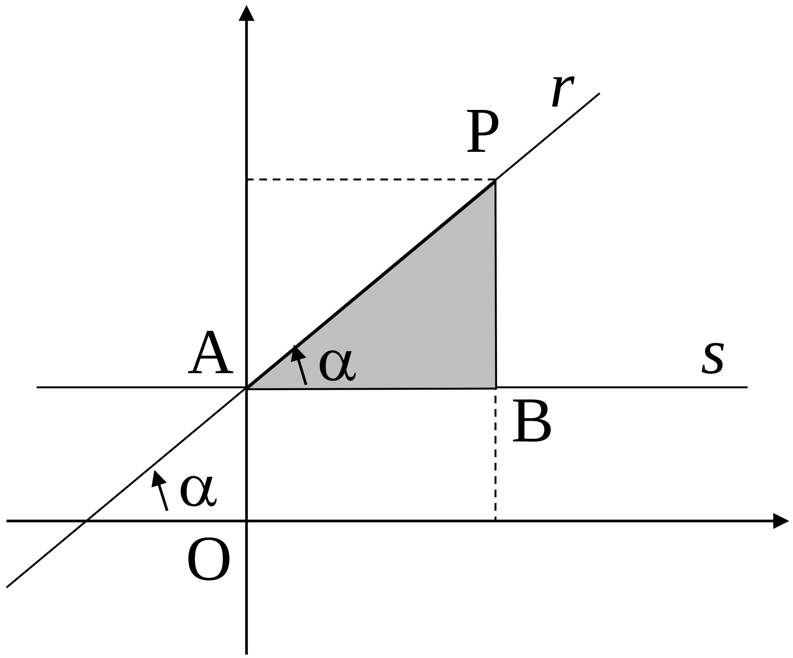
$$BP = (mx+q) - q = mx$$

$$AB = (x)-0=x$$

$$\frac{BP}{AB} = \frac{mx}{x} = m$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{BP}{AB} = m}$$

Coefficiente angolare di una retta: significato geometrico



$$A\ (0,q)$$
$$P(x,mx+q)$$
$$B(x,q)$$
$$PAB = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{AB} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{AB} = m$$

$$\boxed{\Rightarrow \tan\alpha = m}$$

Coefficiente angolare di una retta: significato geometrico

Nel piano in cui sia stato fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, consideriamo una retta r non parallela all'asse delle ordinate di equazione

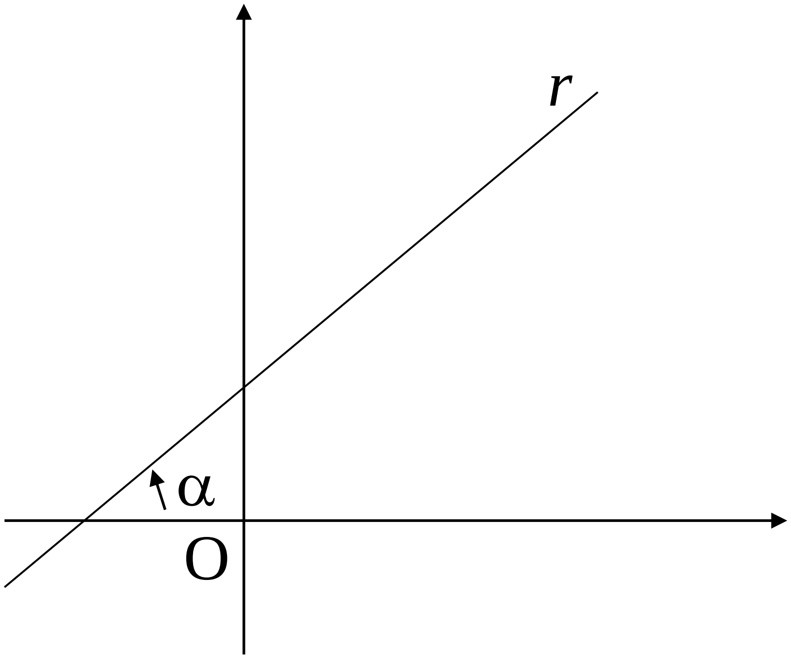
$$y=mx+q$$

m = coefficiente angolare

q = origine all'origine

Abbiamo detto che:

Il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse delle ordinate di equazione $y = mx + q$ è uguale alla tangente geometrica dell'angolo che la retta stessa forma con il semiasse positivo delle ascisse



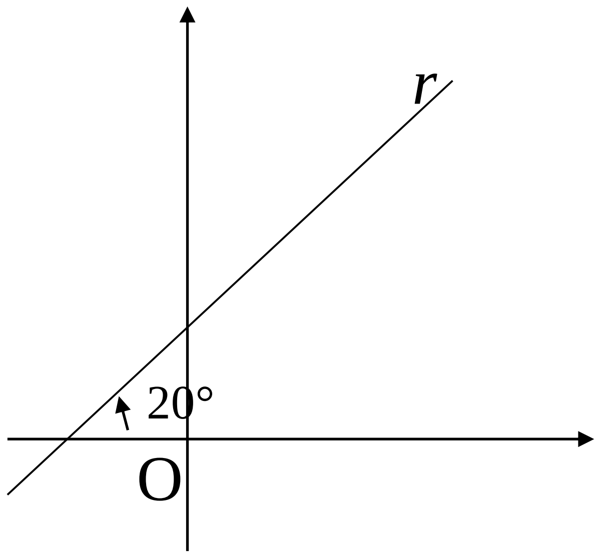
Cioè, se l'angolo che la retta r forma col semiasse positivi delle ascisse è α

$$\boxed{\tan\alpha = m}$$

Esercizi

Calcolare il coefficiente angolare delle seguenti 3 rette:

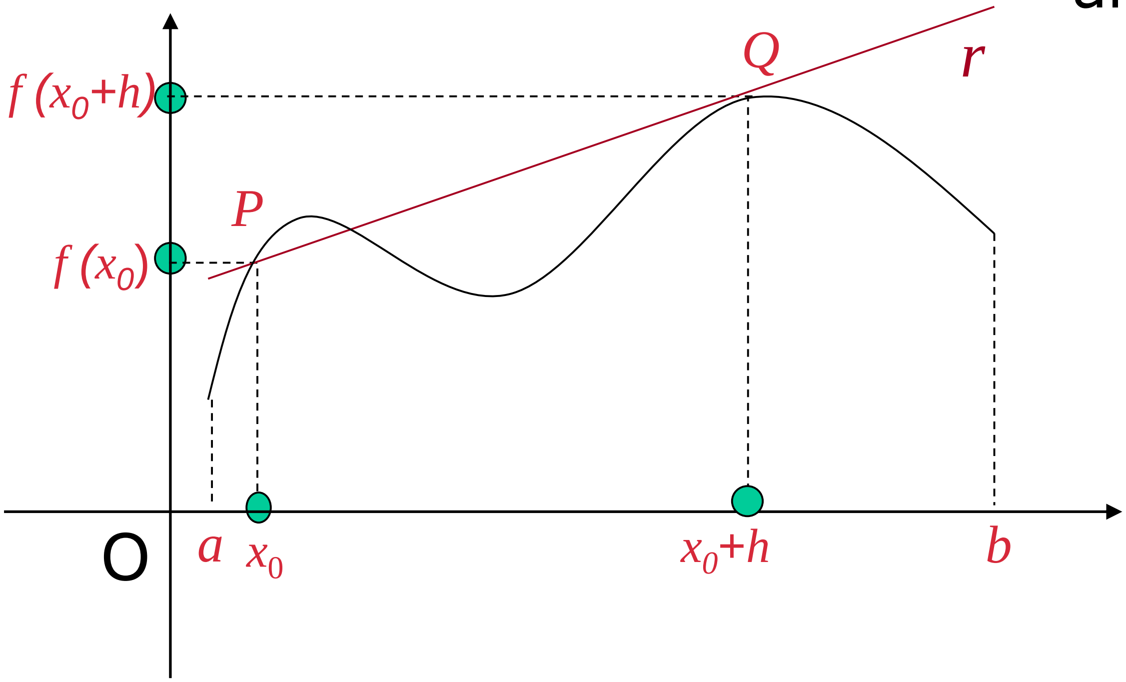
- $y=2x+1$
- La retta passante per i punti A(2,3) e B(4,9)



Significato geometrico della derivata

Sia assegnata una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo $[a,b]$ e sia x_0 un fissato punto interno all'intervallo $[a,b]$.

Si passi dal punto x_0 ad un altro punto x_0+h interno all'intervallo $[a,b]$in modo tale da potere considerare i corrispondenti valori di f

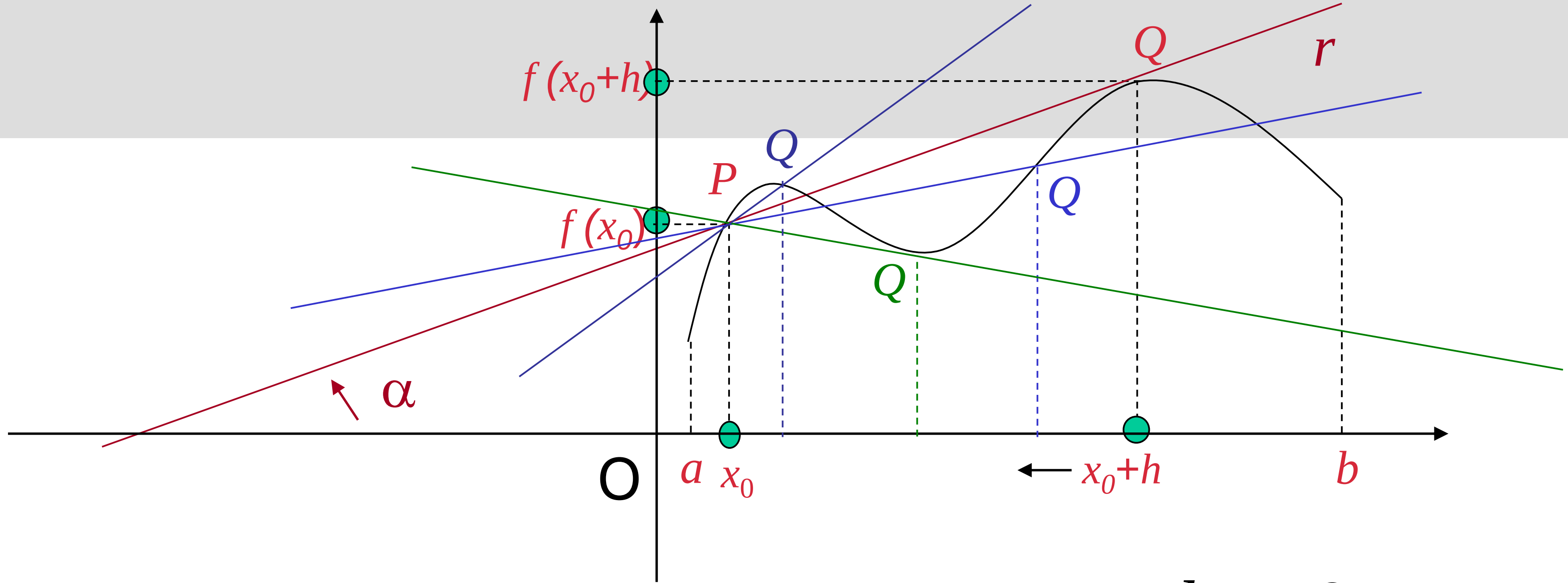


indichiamo i due punti appartenenti al grafico di f con:

$$P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$$

$$Q\left(x_0+h, f\left(x_0+h\right)\right)$$

Sia r la retta passante per P e Q e che forma un angolo α col semiasse positivo delle x



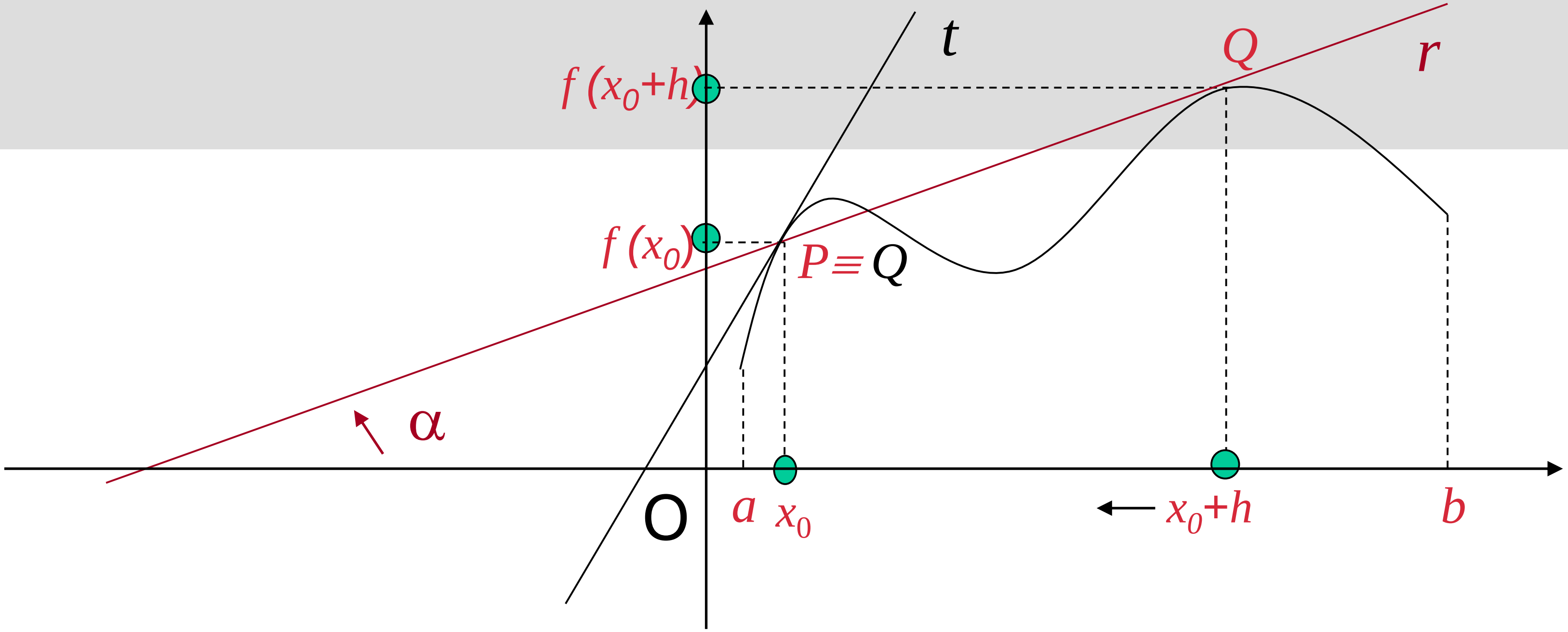
Da un punto di vista geometrico, quando $h \to 0$

il punto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ rimane fisso, mentre il punto

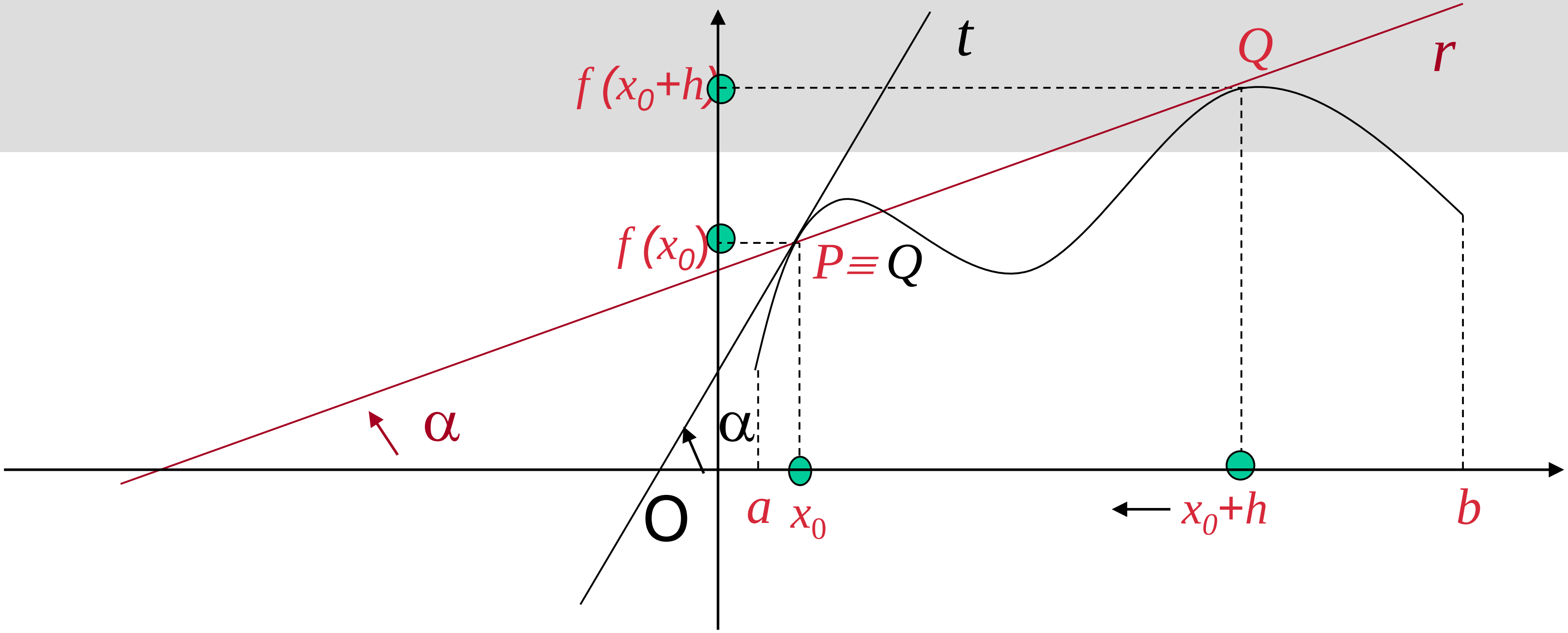
$Q\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$ si muove verso il punto P lungo

la curva grafico della funzione f.

contemporaneamente, spostandosi il punto Q verso il punto P, la retta per P e Q varia e varia in particolare la sua pendenza e cioè varia il suo coefficiente angolare



Tali variazioni per $h \to 0$ terminano quando il punto Q raggiunge il punto P e cioè quando la retta per P e Q si assesta su una posizione limite che è individuata dalla retta tangente t al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 (cioè il punto P)



Quindi, indicando con α l'angolo che la retta tangente forma col semiasse positivo delle x e con m_t il suo coefficiente angolare:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\tan\alpha=\lim_{h\to 0}m_r$$

$$\Longleftrightarrow \qquad f'\left(x_0\right)=\tan\alpha=m_t$$

Significato geometrico della derivata

Quindi, in definitiva, se α è l'angolo che la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 forma con semiasse positivo delle ascisse e se m_t è il suo coefficiente angolare, risulta che:

$$f'(x_0) = \tan\alpha = m_t$$

Cioè:

La derivata $f'(x_0)$ della funzione f nel punto x_0 è uguale al coefficiente angolare m_t della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $P(x_0, f(x_0))$

Significato geometrico della derivata: conclusioni

l'esistenza della derivata di una funzione f in un punto x_0 è legata:

• all'esistenza della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0

• al fatto che il coefficiente angolare della retta tangente deve essere finito, essendo $f'(x_0) = m_t$

In particolare, essendo $f'(x_0) = \tan\alpha = m_t$, richiedere che il coefficiente angolare della retta tangente t al grafico di f sia finito, equivale a richiedere che sia

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\text{se}\, \alpha \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\alpha \to \pm\infty \right)$$

Significato geometrico della derivata: conclusioni

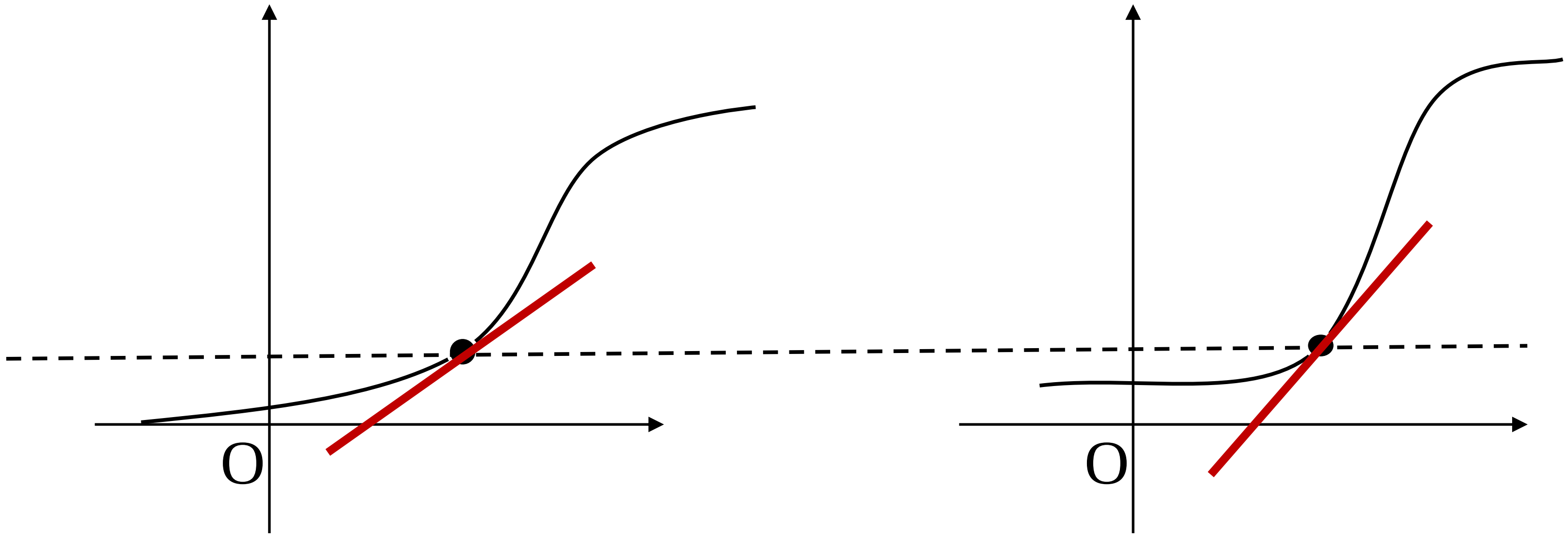
La retta tangente al grafico della funzione f in un punto di ascissa x_0 non può essere parallela all'asse delle ordinate affinché la funzione f sia derivabile nel punto x_0

Significato geometrico della derivata: conclusioni

Se f è una funzione derivabile in un punto x_0, allora nel punto di coordinate $(x_0 ,f(x_0))$ il suo grafico ammette una retta tangente non parallela all'asse delle ordinate

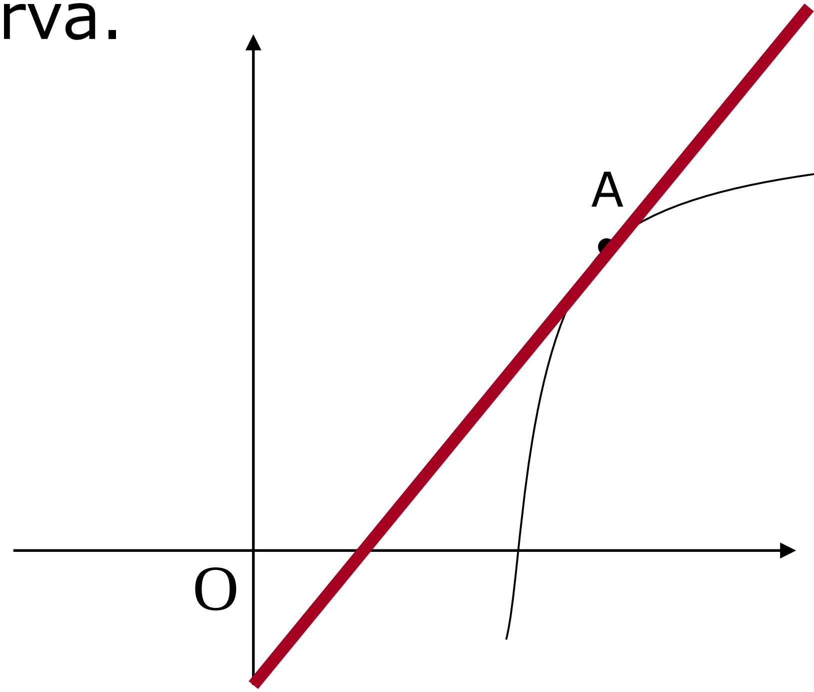
Una funzione derivabile in un intervallo, è una funzione il cui grafico è dotato di retta tangente in ogni suo punto

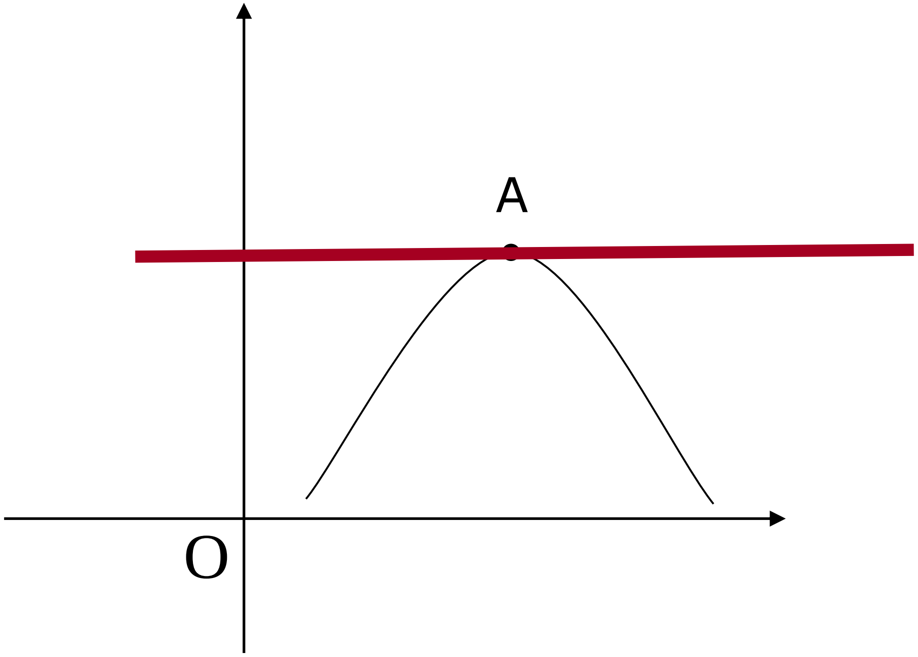
Dove sono più in «pendenza»?:



Esercizio

Disegnare la retta tangente al punto A delle seguenti curva.





Cosa rappresenta la derivata in quel punto?