38. Teorema di Fermat. Punti stazionari.

Applicazioni delle derivate

Uno degli studi più proficui del calcolo della derivata consiste nella ricerca degli estremi di una funzione

Derivata

Definizione derivata di una funzione in un punto (30)
Definizione derivata di una funzione (30)

Significato della derivata

Derivata in un punto (32)
Derivata di una funzione (32)

Regole di calcolo delle derivata

elementari (33)
somma, prodotto, … (34)
funzioni composte (35)
funzioni inverse (35)

Derivata e continuita

derivata => continuita (31)
continuita NON => derivata (31)
funzioni non derivabili. Punti angolosi, cuspidi, … (36)

Applicazioni delle derivata

Equazione della retta tangente in un punto al grafico di una funzione. (37)
Teorema di Fermat. Punti stazionari. (38)
Caratterizzazione delle funzioni monotone. (39)
Concavità e convessità. Criterio di convessità. (40)
Teorema di'Hopital. (41)

Indice della lezione

- Riepilogo definizione estremi di una funzione (massimo/minimo relativi/assoluti)
- Interpretazione grafica estremi di una funzione
- Definizione punti stazionari
- Relazione estremi/punti stazionari

38. Teorema di Fermat. Punti stazionari.

Massimo assoluto

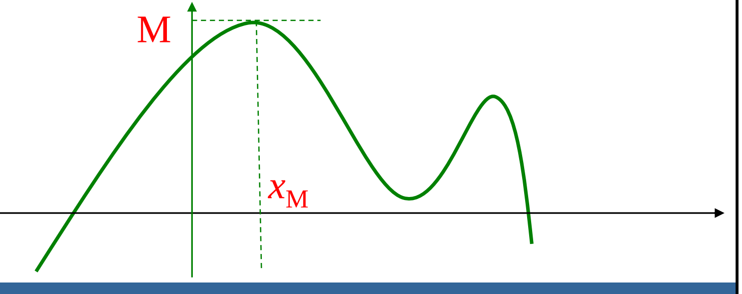
Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \varnothing$$

• si dice che il numero reale M è il massimo assoluto di f se M è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più grande valore

$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_M \in A : f(x_M) = M \\ \forall x \in A,\ f(x) \leq M \end{cases}$$

x_M punto di massimo assoluto

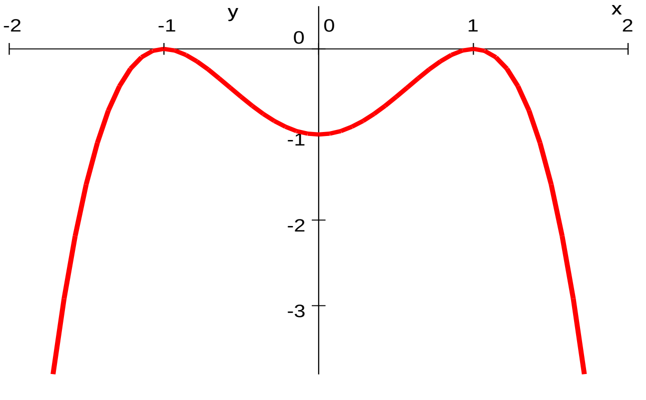


Massimo assoluto: osservazioni

•Il massimo di una funzione, se esiste, è unico

•Una funzione può avere più punti di massimo

Esempio



Minimo assoluto

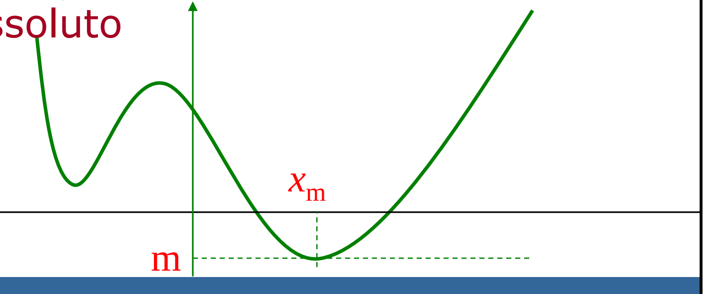
Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R, \; A, B \neq \varnothing$$

• si dice che il numero reale m è il minimo assoluto di f se m è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più piccolo valore

$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_m \in A : f(x_m) = m \\ \forall x \in A, \; f(x) \geq m \end{cases}$$

x_m punto di minimo assoluto



Massimo relativo

Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R, \; A, B \neq \varnothing$$

• dato un punto x_0 di A si dice che $L = f(x_0)$ è un massimo relativo per f se

$$\exists \text{ intorno } I_{x_0} \text{ tale che}$$

$$\forall x \in I_{x_0} \cap A, \; f(x) \leq L$$

x_0 punto di massimo relativo

Minimo relativo

Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \emptyset$$

• dato un punto x_0 di A si dice che $l = f\,(x_0)$ è un minimo relativo per f se

$$\exists \text{ intorno } I_{x_0} \text{ tale che}$$

$$\forall x \in I_{x_0} \cap A,\ f(x) \geq l$$

x_0 punto di minimo relativo

Minimo e massimo: osservazioni

Assegnata una funzione f definita in un intervallo $[a,b]$, ricordiamo che:

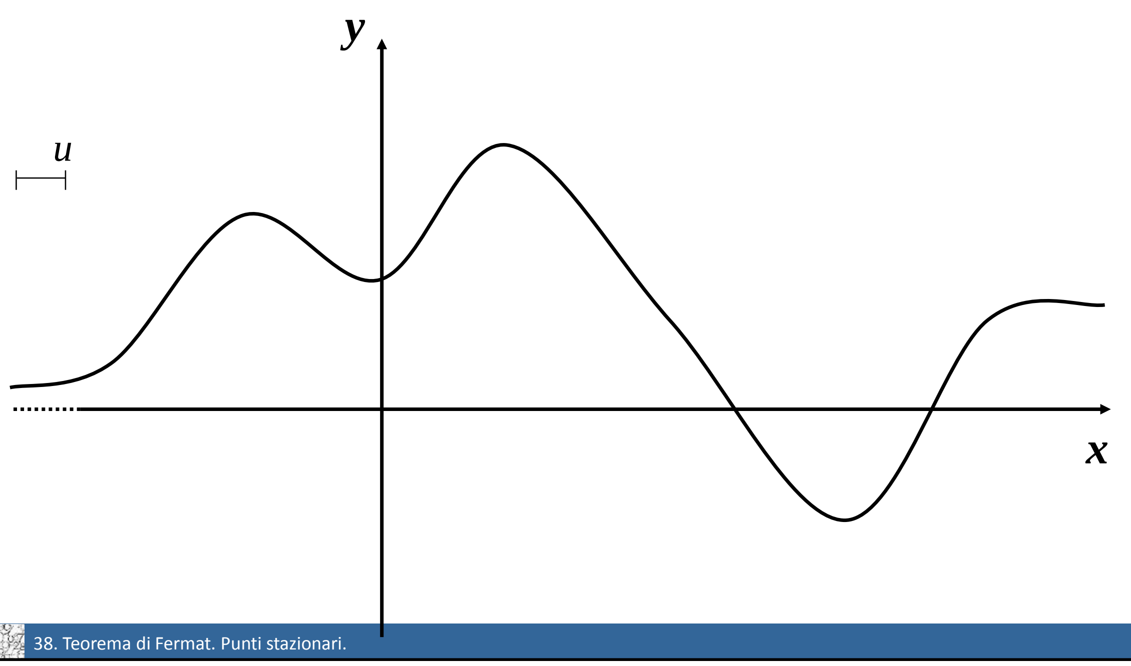
• il minimo ed il massimo assoluti di f in $[a,b]$, se esistono, sono <u>unici</u>

(naturalmente, i punti di massimo e minimo assoluti possono non essere unici)

• minimi ed il massimi relativi di f in $[a,b]$ possono non essere unici

• un estremo assoluto di f in $[a,b]$ è anche estremo relativo ma non vale il viceversa

Esempio: max/min relativi/assoluti?



In particolare, introduciamo la seguente definizione:

Def. I punti x in cui la derivata di una funzione f si annulla vengono detti

punti stazionari per f

Cioè i punto x_0 tale che $f'(x_0)=0$

Cioè i punto x_0 tale che *la tangente in quel punto è orizzontale*

Teorema di Fermat: Relazione tra estremi/punti stazionari

Teorema di Fermat

Sia $f:[a,b]\rightarrow R$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e sia x_0 un punto di estremo relativo.

$\Downarrow$

$f'(x_0)=0$

x_0 è un punto stazionario per f

Fermat: f derivabile in x_0 & x_0 estremo relativo => f'(x_0)=0

A partire da tale teorema, possiamo affermare che in punto x_0 di estremo relativo per una funzione f in cui f sia derivabile, la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale

Teorema di Fermat: dimostrazione

Per ipotesi, sappiamo che f è una funzione derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e che x_0 è un punto di estremo relativo per f.

Per fissare le idee, supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo

per definizione di massimo relativo

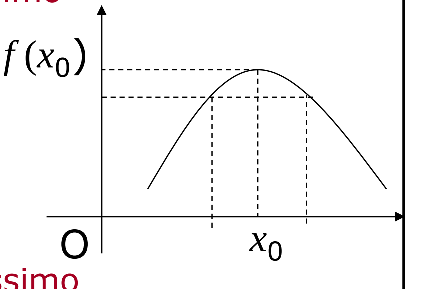
$$\exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$$

$$\exists I_{x_0} : \forall x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \qquad \Rightarrow f(x) - f(x_0) \le 0$$

In particolare:

$$x > x_0 \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0 \text{ perché } x_0 \text{ è punto di massimo}}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \le 0$$

$$x - x_0 > 0$$



$$x < x_0 \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0 \text{ perché } x_0 \text{ è punto di massimo}}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \ge 0$$

$$x - x_0 < 0$$

Passando ai limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno, ha lo stesso segno del rapporto

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Per il teorema della permanenza del segno, ha lo stesso segno del rapporto

$\Rightarrow$ Poiché per ipotesi esiste $f'(x_0)$ => l'unica possibilità è che sia:

$$f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) = 0$$

Teorema di Fermat: Relazione tra estremi/punti stazionari

Teorema di Fermat

Sia $f:[a,b] \to R$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e sia x_0 un punto di estremo relativo

$$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow}$$

x_0 è un punto stazionario per f

Il viceversa non è però valido!

Cioè, possono esistere punti stazionari, in cui si annulla la derivata prima di f, che non sono punti di estremo relativo

Fermat: f derivabile in x_0 & x_0 estremo relativo => $f'(x_0)=0$

$\cancel{\Leftarrow}$

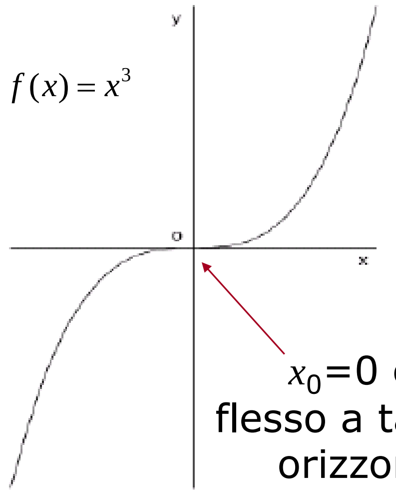
Sia data la funzione $f(x) = x^3$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 3x^2$

Dunque, in $x_0 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = 0$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ è un punto stazionario per la funzione f

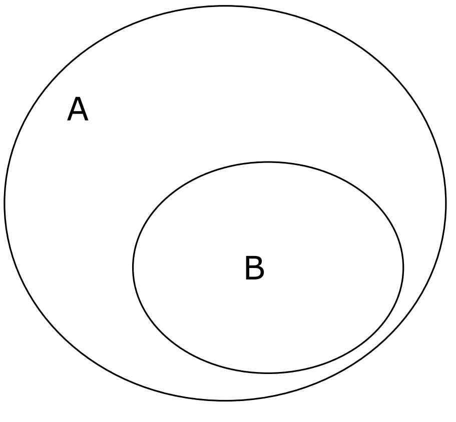
Ma x_0=0 <u>non</u> è un punto di estremo relativo per f



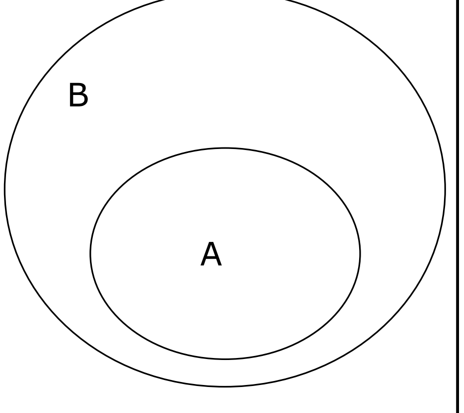
x_0=0 è un flesso a tangente orizzontale

A => B

In insiemistica?



No



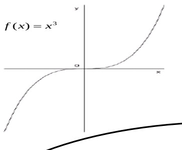
SI

Fermat: f derivabile in x_0 & x_0 estremo relativo => $f'(x_0)=0$

Osservazione 1.

Dal teorema di Fermat, possiamo affermare che i punti di estremo relativo per una funzione interni all'intervallo di definizione vanno ricercati tra i punti stazionari

$f'(x_0)=0$



f derivabile (o interni intervallo) in x_0 & x_0 estremo relativo

Fermat: f derivabile in x_0 & x_0 estremo relativo => $f'(x_0)=0$

Punti derivabili

f'(x0)=0

Criteri di monotonia

Estremo relativo | No estremo relativo

Punti non derivabili

~~f'(x0)=0~~

~~Criteri di monotonia~~

~~Estremo relativo~~ | ~~No estremo relativo~~

Fermat: f derivabile in x_0 & x_0 estremo relativo => $f'(x_0)=0$

Osservazione 1.

Dal teorema di Fermat, possiamo affermare che i punti di estremo relativo per una funzione interni all'intervallo di definizione vanno ricercati tra i punti stazionari

Osservazione 2.

Nei punti in cui una funzione non è derivabile non è possibile applicare il teorema di Fermat. Così, in tali punti bisogna studiare a parte il comportamento della funzione

Esempio:

Sia data la funzione $f(x)=|x|$

La funzione valore assoluto non è derivabile nel punto x_0=0 (punto angoloso), quindi non possiamo applicare Fermat, però, dal grafico si vede chiaramente che il punto x_0=0 è un punto di minimo assoluto