

EQUAZIONI DEL BILANCIO

Il soggetto che ci accingiamo ora a trattare, le equazioni del bilancio e le loro applicazioni a sistemi ingegneristici, costituisce la naturale estensione della termodinamica degli stati di equilibrio a sistemi evolutivi nel tempo. Vale la pena di ricordare che le equazioni delle trasformazioni termodinamiche fin qui analizzate rappresentano dei *legami delle grandezze termodinamiche tra stati (di equilibrio classico)*, senza che la variabile temporale sia presa in considerazione. Nello studio dei sistemi evolutivi, lo sviluppo della trasformazione è analizzato nel tempo; l'equilibrio è garantito a livello locale e il sistema evolve *spontaneamente*, ovvero *irreversibilmente*, verso stati (di *equilibrio locale*) susseguentisi nel tempo, con produzione di entropia.

Allo scopo di risolvere un campo di moto, per determinare, cioè, l'evoluzione in ogni punto del campo delle incognite termodinamiche e cinematiche, è necessario impostare un sistema di equazioni. Le incognite termodinamiche sono due, quanti sono i gradi di libertà specifici o intensivi; in aggiunta va considerata l'incognita cinematica vettoriale rappresentata dalla velocità (ovvero, in generale, dalle sue tre componenti scalari). Il totale delle incognite scalari, nel caso di un sistema semplice, è cinque, e servono dunque cinque equazioni scalari, in generale di tipo differenziale. I principi base della fisica invocati per ricavare tali equazioni sono:

- Principio di conservazione della massa totale;
- Principio di conservazione dell'energia totale;
- La seconda legge di Newton, che esprime, in forma vettoriale, il bilancio della quantità di moto.

Attraverso queste tre equazioni, due scalari e una vettoriale, il sistema è in linea di principio chiuso e si può passare, assegnate le condizioni iniziali e al contorno, alla risoluzione del campo di moto. Come si vedrà nel seguito, o come l'allievo avrà modo di apprezzare nell'ambito di altri corsi, di volta in volta potrà essere conveniente formulare in alternativa altre equazioni del bilancio, per esempio dell'energia cinetica o dell'entropia.

Passiamo ora a richiamare la formulazione di una equazione generale del bilancio di una grandezza estensiva, che sarà poi particolarizzata per ciascuna grandezza (ad esempio, massa, quantità di moto, energia totale). È utile osservare che il bilancio è intrinsecamente formulato per grandezze estensive, perché bisogna che sia garantita la sommabilità. Definito il sistema di controllo, formulare il bilancio di una grandezza G significa, concettualmente, individuare un intervallo di tempo di osservazione in cui valutare le variazioni di G all'interno del sistema e le cause di tali variazioni. Da un punto di vista logico-matematico può essere conveniente stimare la rapidità di variazione di G nel tempo (cioè la derivata) come

$$\frac{dG}{dt} = \text{scambi} + \text{produzioni}$$

dove gli scambi e le produzioni di G sono definiti nell'unità di tempo. Per quantificare gli scambi è conveniente introdurre il concetto di **flusso**, ovvero la quantità di G che si muove (si *trasporta*) attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo.

Una analisi dimensionale conduce a

$$[\varphi_G] = \frac{[G]}{[L^2][T]} = \frac{[G][L]}{[L^3][T]} = [g^+][\frac{L}{T}] = [g^+][V]$$

da cui si può porre formalmente

$$\underline{\varphi_G} = \rho g \underline{V}$$

avendo indicato il flusso con il simbolo $\underline{\varphi}$ e la velocità locale (del centro di massa di una singola particella costituita, per l'ipotesi del continuo, da una moltitudine di molecole) con \underline{V} . Naturalmente per il flusso di massa è $\underline{\varphi}_m = \rho \underline{V}$, essendo $g=1$. L'ente flusso così definito è intrinsecamente un **flusso convettivo**, in quanto $\underline{\varphi}_G$ racchiude il concetto che il flusso di massa trasporta con sé (convette) la quantità G . Tale meccanismo esprime, dunque, il trasporto di una grandezza associato al trasporto della massa. Oltre a questo, esiste un altro meccanismo di trasporto, ovvero un altro tipo di flusso, non legato al trasporto di massa, il **flusso diffusivo**. Il concetto del trasporto diffusivo è legato strettamente a meccanismi di tipo microscopico, cioè all'attività molecolare. Naturalmente in generale sono presenti entrambi i flussi e sovente si suole dire che il flusso diffusivo è la parte del trasporto *misurata* da un osservatore che si muove, puntualmente, con la velocità macroscopica in quel punto. Il flusso totale può scriversi perciò come

$$\underline{\varphi}_G = \rho g \underline{V} + \underline{j}_G$$

avendo indicato con \underline{j}_G il flusso diffusivo.

Naturalmente se $G = m \underline{V}$, la quantità di moto, il flusso di G è una diade $\underline{\varphi}_G = \rho \underline{V} \underline{V}$, ovvero un ente tensoriale.

Vediamo come possiamo esprimere gli **scambi**.

Sia V un volume di controllo, per il momento considerato fisso nel riferimento adottato, individuato da una superficie S . Lo scambio va valutato su S , perché questa è la superficie che separa il sistema dall'ambiente esterno. Individuiamo un punto sulla frontiera sul quale sia definito il flusso. Prendiamo la normale alla superficie nello stesso punto e orientiamola (per una convenzione adottata abbastanza universalmente) in modo che sia positiva verso l'esterno (normale uscente); l'ammontare di G scambiato dal sistema attraverso la superficie S nell'unità di tempo è l'integrale della componente normale del flusso, vale a dire:

$$scambio = - \int_S \underline{n} \cdot \underline{\varphi}_G dS$$

da cui si ricava

$$\frac{dG}{dt} = - \int_S \underline{n} \cdot \underline{\varphi}_G dS + produzioni.$$

E' stato introdotto il segno meno perché il contributo allo scambio è positivo se il flusso $\underline{\varphi}_G$ ha verso uscente dalla superficie e in tale caso fisicamente l'ammontare di G nel sistema diminuisce.

Per quanto concerne la **produzione**, essa va controllata punto per punto all'interno del volume V . La si definisce come la quantità di G che si produce per unità di volume e di tempo

$$[\dot{g}^+] = \frac{[G]}{[L^3][T]} = [\rho \dot{g}]$$

Allo stesso modo si definisce la produzione per unità di massa e di tempo

$$[\dot{g}] = \frac{[G]}{[T][m]}$$

Possiamo scrivere a questo punto la forma generale dell'equazione del bilancio

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho g dV = - \int_S \underline{n} \cdot \underline{\varphi}_G dS + \int_V \rho \dot{g} dV$$

dove l'ammontare di G nel volume di controllo è valutato come $G = \int_V \rho g dV$, essendo in generale sia la densità di massa che la stessa g non distribuiti uniformemente nel volume di controllo. Si fa esplicitamente notare che tale formulazione vale per un volume di controllo fisso nel riferimento esterno adottato. Se, come si vedrà nel seguito, il volume di controllo è variabile nel tempo (circostanza che in generale è contemplata nel cosiddetto approccio lagrangiano) l'operatore di derivata temporale è applicato alla funzione integranda (sotto l'integrale) ed è da intendersi quale derivata parziale.

- **APPLICAZIONI AI MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI**

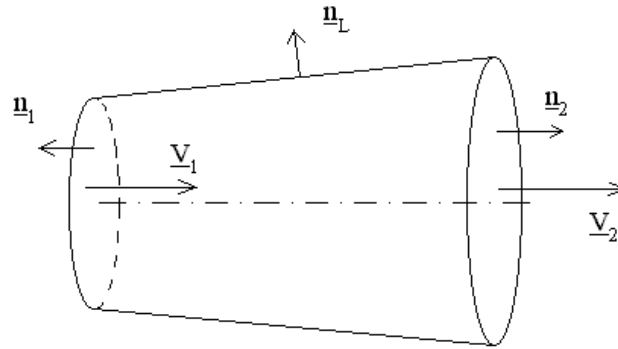
Bilancio (conservazione) della massa totale

Essendo nulli i flussi diffusivi e le produzioni di massa si ha (si ricordi anche che $g=1$):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho V + \int_S \underline{n} \cdot \rho \underline{V} dS = 0$$

Il flusso di massa è puramente convettivo: la diffusione di massa è presente solo in sistemi a più specie quando a diffondere è una singola specie soggetta gradienti non nulli di concentrazione. La produzione è invece nulla perché la massa è una grandezza conservativa. Naturalmente, nel caso di sistemi a più componenti in cui si prevede la possibilità di reazioni chimiche, si può formulare un bilancio di massa per ogni singola specie e in tal caso la produzione di una singola specie non è necessariamente nulla.

Il bilancio di una grandezza conservativa in genere viene anche detta **equazione di conservazione**. Consideriamo ora il moto di un fluido in un condotto con sezioni rette ad area non costante (vedi figura sotto). Supponiamo che la superficie laterale sia impermeabile, il flusso così entra attraverso la sezione 1 e esce dalla sezione 2. Denominate \underline{n}_1 e \underline{n}_2 le normali (per convenzione uscenti) alle superfici S_1 e S_2 , la velocità della corrente è parallela a tali normali nelle sezioni di ingresso e di uscita (ovvero, in ogni altra sezione del condotto).



Ipotizziamo il moto **stazionario**. Allora, se non sono presenti variazioni nel tempo, l'equazione di conservazione dà

$$\int_S \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$

dove si osservi che in questo caso il prodotto scalare integrando è commutativo.

Essendo la superficie laterale impermeabile, il flusso di massa attraverso questa superficie è nullo, e pertanto, valutando separatamente i contributi attraverso le superfici di ingresso e di uscita, si ha

$$\int_{S_1} \rho_1 \underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 dS + \int_{S_2} \rho_2 \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 dS = 0$$

Il primo termine rappresenta la massa che entra attraverso S_1 per unità di tempo, il secondo la massa che esce da S_2 per unità di tempo. A rigore l'integrando non è costante, infatti la velocità varia punto per punto in ogni sezione, dovendo, per la presenza della viscosità, essere nulla sulla parete e presumibilmente massima in corrispondenza dell'asse del condotto; il profilo di velocità, nelle condizioni del cosiddetto flusso completamente sviluppato (che potranno essere approfondite in sede esercitativa) assume in particolare la forma di un paraboloide. In opportune condizioni, però, si possono trascurare fenomeni di tipo dissipativo (ipotizzando cioè il numero di Reynolds della corrente sufficientemente elevato) e considerare la velocità costante in ogni sezione. In generale, allora, definiamo moto **unidimensionale** il modello di moto in cui tutte le grandezze sono ritenute costanti in una stessa sezione. Tale modello prevede che le grandezze possono variare solo in una direzione, in questo caso lungo l'asse del condotto. Se non si vuole fare ricorso all'assenza di fenomeni dissipativi, si può introdurre il modello di moto unidimensionale con riferimento al valor medio integrale del modulo della velocità in ogni sezione

$$\bar{V} = \frac{1}{S} \int_S V dS = 0$$

dove con V si è indicato il modulo del vettore velocità e con \bar{V} il suo valor medio.

In sintesi, nel caso di moto unidimensionale, risultando evidentemente in valore assoluto $V = \int_S \underline{V} \cdot \underline{n} dS$, la conservazione della massa si scrive

$$-\rho_1 V_1 S_1 + \rho_2 V_2 S_2 = 0$$

con il segno meno al primo termine poiché i vettori \underline{n}_l e \underline{V}_l hanno verso opposto. La superficie laterale è stata considerata evidentemente impermeabile. Dal momento che le sezioni 1 e 2 sono generiche, segue che

$$\rho VS = cost$$

cioè la portata massica $\dot{m} = \rho VS$ è costante in ogni sezione, sebbene densità e velocità possano variare da sezione a sezione (anche variabile). Questa equazione esprime il concetto fisico della cosiddetta continuità. Nel caso in cui il moto sia anche **incomprimibile** (per $M^2 \ll 1$ si può considerare $\rho = cost$), avremo

$$VS = cost,$$

Vale, dunque, la costanza della portata volumetrica.

Bilancio di entropia

L'equazione del bilancio di entropia si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dv + \int_A \rho s \underline{V} \cdot \underline{n} dA + \int_A \underline{J}_s \cdot \underline{n} dA = \int_V \rho \dot{s} dv$$

Si noti esplicitamente che in questa sede la superficie di controllo è stata indicata con il simbolo A per evitare confusione con il simbolo che denota l'entropia.

Nell'ipotesi che il sistema sia chiuso, la componente normale del flusso di massa è nulla

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dv + \int_A \underline{J}_s \cdot \underline{n} dA = \int_V \rho \dot{s} dv$$

Per definizione il flusso diffusivo di entropia è in relazione con il flusso di energia nel modo calore secondo la relazione

$$\underline{J}_s = \frac{\underline{J}_q}{T}$$

Vale la pena di ricordare che questa ultima posizione è una estensione a sistemi evolutivi della definizione iniziale di entropia introdotta nell'ambito della termodinamica degli stati di equilibrio

come $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

Inoltre, la produzione di entropia non è mai negativa $\dot{s} \geq 0$.

Per un sistema chiuso si può quindi valutare la variazione infinitesima di entropia nell'intervallo infinitesimo di tempo dt come

$$dS = - \left[\int_A \frac{\underline{J}_q}{T} \cdot \underline{n} dA \right] dt + \left[\int_V \rho \dot{s} dv \right] dt$$

Si nota che cause di variazione di entropia possono essere due: scambi diffusivi con l'ambiente e produzioni di entropia nel sistema. Si può allora scrivere sinteticamente

$$dS = \delta S_{est} + \delta S_{int}$$

Abbiamo così ricondotto formalmente l'equazione di bilancio dell'entropia a una forma analoga a quella introdotta nell'ambito della termodinamica degli stati di equilibrio.

Ritornando ai sistemi aperti, e in particolare all'analisi del moto unidimensionale stazionario in un tratto di condotto, se ipotizziamo il moto adiabatico (punto per punto sulla superficie di controllo sono nulli gli scambi di calore, ovvero la componente normale del flusso \underline{J}_q è nulla) e reversibile (tutte le cause che contribuiscono alla produzione di entropia sono trascurabili; ad esempio gli effetti viscosi, che sono *piccoli* se il numero di Reynolds è sufficientemente grande), il bilancio di entropia si riduce a

$$\int_A (\rho \underline{V}) s \cdot \underline{n} \, dA = 0$$

Volendo essere un po' più rigorosi, nella termodinamica dei processi evolutivi nel tempo, la sola ipotesi di reversibilità, ovvero assenza di produzione di entropia, dovrebbe garantire automaticamente anche l'ipotesi di adiabaticità (poiché la presenza di un flusso di calore produrrebbe entropia). Nella pratica, si preferisce mantenere separate le due condizioni di adiabaticità e assenza di produzioni di entropia, e legare quest'ultima, in certe circostanze semplici, alla trascurabilità degli effetti viscosi.

Per moti unidimensionali e superficie laterale impermeabile, analogamente a quanto sviluppato per il bilancio di massa, l'ultima equazione assume la forma

$$-(\rho_1 V_1 A_1) s_1 + (\rho_2 V_2 A_2) s_2 = 0$$

e, sfruttando il risultato della equazione di continuità, $\dot{m} = \rho VA = \text{cost}$ in ogni sezione, si può concludere che l'entropia è costante in ogni sezione.

Il moto allora può definirsi isentropico, ovvero, poiché il valore dell'entropia è lo stesso non solo lungo le linee di corrente nella direzione del moto, ma anche in ogni punto di una sezione ortogonale all'asse del condotto, esso è omoentropico. Ogni sezione retta può essere vista come rappresentativa dello stato del sistema e le proprietà termodinamiche di questo, variabili lungo la direzione del moto, risultano legate tra di loro dalle relazioni algebriche che esprimono la trasformazione isentropica, già ricavate nell'ambito della termodinamica degli stati.

Nel caso che il fluido evolvente sia un gas perfetto a calore specifico costante, al variare della sezione sussistono le relazioni

$$pv^\gamma = \text{cost}$$

$$Tv^{\gamma-1} = \text{cost}$$

$$pT^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \text{cost}.$$

Bilancio dell'energia totale

Poiché la produzione di energia totale è per definizione identicamente nulla, il bilancio di energia totale è classificabile come equazione di conservazione. L'energia totale di un sistema non è univocamente definita nel senso che a seconda del tipo di sistema in oggetto e del tipo di fenomenologie in studio, essa può includere di volta in volta diverse forme di energia. In linea di principio, quindi, si potrebbero considerare, oltre alle usuali energia interna, energia cinetica e energia potenziale gravitazionale, anche l'energia elettromagnetica o l'energia in gioco durante le reazioni chimiche, e via dicendo. Può essere utile osservare che quando una determinata forma di energia non è presa in considerazione nel definire l'energia totale, non è detto ovviamente che il suo valore sia identicamente nullo, bensì che le sue variazioni nel corso della trasformazione vissuta dal sistema sono nulle.

Nel caso dei sistemi semplici ad un componente, che rappresentano attualmente l'oggetto del nostro studio, si pone

$$E_{TOT} = U + \frac{1}{2} mV^2 + mgz$$

o, in termini specifici

$$e_{TOT} = u + \frac{1}{2} V^2 + gz$$

dove z rappresenta la coordinata spaziale verticale (quota), orientata verso l'alto.

L'energia cinetica è associata a fenomeni di tipo macroscopico e può anche essere vista come **energia cinetica ordinata**, laddove l'energia interna, legata al moto caotico delle molecole e quindi associata a fenomeni di tipo microscopico, può essere considerata come **energia cinetica disordinata**. Si osservi che mentre l'energia totale si conserva per definizione, una particolare forma di energia può crearsi e/o distruggersi, ovvero può verificarsi la trasformazione di un tipo di energia in un altro.

In forma integrale il bilancio o la conservazione dell'energia totale si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho \underline{V}) e_{TOT} \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_{e_{TOT}} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Abbiamo già osservato che gli scambi avvengono per mezzo di flussi di tipo convettivo e diffusivo. Attraverso il meccanismo diffusivo l'energia può essere scambiata in due modi, nel modo **lavoro** e nel modo **calore**. Quando lo scambio è causato da una differenza di temperatura esso per definizione è associato al modo calore. Il trasporto di energia nel modo calore è una fenomenologia così vasta che costituisce argomento di corsi specifici, e sarà comunque oggetto dell'ultima parte del presente corso di Termofluidodinamica.

In generale, dunque, si pone

$$\underline{J}_{e_{TOT}} = \underline{J}_L + \underline{J}_q$$

Le espressioni formali dei flussi diffusivi dell'energia nei modi calore e lavoro, al pari di quelle di tutti i flussi diffusivi, sono fornite da una teoria generale della termodinamica dei processi irreversibili, che è una parte della termodinamica che esula dagli scopi del presente corso. Richiami a tale teoria saranno fatti nel corso di Gasdinamica.

Per il flusso di energia nel modo lavoro, come si vedrà un poco più dettagliatamente nel seguito, risulta

$$\underline{J}_L = -(\underline{\tau} \cdot \underline{V})$$

che estende la definizione classica di lavoro, o meglio di potenza meccanica, quale prodotto (scalare) tra una forza e lo spostamento, ovvero la velocità di spostamento, del suo punto di applicazione.

Il flusso diffusivo di calore può essere classicamente espresso dalla legge di Fourier

$$\underline{J}_q = -\lambda \underline{\nabla} T$$

dove λ è il coefficiente di scambio termico (del fluido) per conduzione. La *conduzione* è uno dei tre meccanismi secondo cui viene modellato il trasferimento di calore e, per quanto detto, è una fenomenologia tipicamente diffusiva. Gli altri meccanismi sono l'*irraggiamento* e la *convezione*, i cui principi di base saranno descritti nella parte del corso dedicata alla trasmissione del calore.

Possiamo a questo punto dare una formulazione integrale abbastanza generale dell'equazione dell'energia totale

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho \underline{V} e_{TOT}) \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_L \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS = 0$$

Volendo giustificare da un punto di vista fisico la espressione prima riportata del flusso di lavoro \underline{J}_L , iniziamo a osservare che in fisica generale il lavoro è definito come il prodotto scalare di una forza per uno spostamento. Se indichiamo con \underline{f} la forza per unità di superficie (in generale una forza è variabile da punto a punto sulla superficie), il lavoro scambiato attraverso la superficie elementare dS è fornito da $dL = \underline{f} \cdot \underline{r} dS$, dove \underline{r} è lo spostamento. Poiché in generale in fluidodinamica si è interessati alla rapidità di variazione dello spostamento, piuttosto che allo spostamento, la potenza (lavoro per unità di tempo) elementare scambiata può esprimersi come $d\dot{L} = \underline{f} \cdot \underline{V} dS$. Ricordando che, introdotto il tensore degli sforzi $\underline{\tau}$, dalla meccanica del continuo si ha $\underline{f} = \underline{n} \cdot \underline{\tau}$, la potenza elementare assume la forma $d\dot{L} = (\underline{n} \cdot \underline{\tau}) \cdot \underline{V} dS$ e, integrando su tutta la superficie di scambio, la potenza totale scambiata risulta essere $\dot{L} = \int_S (\underline{n} \cdot \underline{\tau}) \cdot \underline{V} dS$. Infine, per la simmetria del tensore degli sforzi (derivante dall'equilibrio locale alle rotazioni in assenza di coppie interne del tipo elettromagnetico), si può porre

$$\dot{L} = \int_S \underline{n} \cdot (\underline{\tau} \cdot \underline{V}) dS$$

Se si confronta tale espressione con l'equivalente termine di scambio di lavoro per unità di tempo presente nell'equazione di bilancio dell'energia, e cioè $\int_S \underline{n} \cdot \underline{J}_L dS$ (vale naturalmente la proprietà commutativa del prodotto scalare tra vettori), e considerando poi che, esprimendo la quantità $\underline{f} = \underline{n} \cdot \underline{\tau}$ una forza agente sul sistema, la corrispondente potenza scambiata è entrante nel sistema e dunque, per convenzione, negativa, per confronto si può porre

$$\underline{J}_L = -(\underline{\tau} \cdot \underline{V})$$

Questa relazione ha un carattere locale generale, valendo per ogni punto interno al sistema, oltre che sulla sua superficie di controllo, dove contribuisce allo scambio di lavoro attraverso l'integrale della sua componente normale.

Decomposizione di \underline{J}_L

Possiamo decomporre il termine di flusso diffusivo di energia nel modo lavoro utilizzando la classica decomposizione del tensore degli sforzi $\underline{\tau}$ tra la sua parte reversibile, la pressione (legata allo scambio di quantità di moto delle molecole nel loro moto disordinato), e quella irreversibile, legata alla viscosità (ovvero alla deformazione dell'intorno locale del sistema). Il bilancio di energia si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho \underline{V} e_{TOT}) \cdot \underline{n} dS - \int_S (\underline{\tau} \cdot \underline{V}) \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS = 0$$

essendo

$$\underline{\tau} = -p\underline{U} + \underline{\tau}_d$$

si ha

$$\underline{\tau} \cdot \underline{V} = (-p\underline{U} + \underline{\tau}_d) \cdot \underline{V} = -p\underline{V} + \underline{\tau}_d \cdot \underline{V}$$

e sostituendo nell'equazione del bilancio risulta

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho \underline{V} e_{TOT}) \cdot \underline{n} dS + \int_S p\underline{V} \cdot \underline{n} dS - \int_S (\underline{\tau}_d \cdot \underline{V}) \cdot \underline{n} dS + \int_S \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS = 0$$

Analizziamo ora i termini

- $\int_S p\underline{V} \cdot \underline{n} dS$: è il lavoro compiuto dallo sforzo di pressione ed è detto **lavoro di pulsione**;
- $-\int_S (\underline{\tau}_d \cdot \underline{V}) \cdot \underline{n} dS$: è il lavoro legato allo sforzo viscoso

Si osservi che nell'ipotesi di assenza di fenomeni dissipativi (nel nostro ambito, per moto a numero di Reynolds sufficientemente grande) le pareti del condotto, impermeabili, sono linee di corrente, e il lavoro degli sforzi viscosi attraverso la superficie laterale è nullo. Tuttavia, esso è da considerarsi significativamente non nullo nel caso in cui ci sia un dispositivo (idealizzato come un'elica, ovvero una turbomacchina in generale, come nel caso di un compressore o una turbina) avente lo scopo di realizzare un processo di scambio di energia nel modo lavoro con il fluido, e in tal caso viene definito genericamente **lavoro (potenza) di elica**

$$\dot{L}_{elica} = -\int_{S_L} (\underline{\tau}_d \cdot \underline{V}) \cdot \underline{n} dS$$

Per le superfici permeabili il lavoro scambiato nel caso di moto unidimensionale (per il quale in una certa sezione è significativa la sola componente di velocità nella direzione del moto, per fissare le idee indichiamola con u , e le altre due componenti nel piano della sezione sono nulle) è fornito da componenti del tensore degli sforzi unicamente proporzionali a $\frac{\partial u}{\partial x}$, avendo indicato con x l'ascissa

curvilinea lungo l'asse del condotto. Se, allora, si fa l'ipotesi classica che tutte le grandezze (come si vedrà, anche quelle termodinamiche) variano *debolmente* nella direzione del moto, è $\frac{\partial u}{\partial x} \approx 0$, e il lavoro scambiato attraverso le superfici permeabili del sistema è totalmente trascurato.

Consideriamo ora il termine convettivo dell'equazione del bilancio dell'energia. Si ha

$$\int_S (\rho \underline{V} e_{TOT}) \cdot \underline{n} dS = \int_S \rho \underline{V} \left(u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \cdot \underline{n} dS$$

Se combiniamo questo termine con quello diffusivo dovuto al lavoro di pulsione, si ottiene la quantità

$$\int_S \rho \left(u + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \underline{V} \cdot \underline{n} dS = \int_S \rho \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \underline{V} \cdot \underline{n} dS$$

dove si è introdotta l'entalpia termodinamica specifica $h = u + \frac{p}{\rho}$.

Se ora definiamo una nuova grandezza specifica che rappresenta il contenuto energetico totale della corrente

$$H = h + \frac{V^2}{2} + gz$$

detta **entalpia totale**, l'equazione di bilancio dell'energia totale si può riscrivere

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho \underline{V} H) \cdot \underline{n} dS + \int_{S_L} \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS + \dot{L}_{elica} = 0}$$

Circa la potenza termica scambiata, dopo avere espresso il flusso termico mediante la legge di Fourier $\underline{J}_q = -\lambda \nabla T$, si osservi che per una superficie permeabile qualunque (e quindi per S_1 e S_2) si può scrivere

$$-\int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS = -\int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dS$$

che costituisce un termine trascurabile nell'ipotesi che la temperatura vari debolmente lungo l'ascissa longitudinale del condotto

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \rho e_{TOT} dv + \int_S (\rho \underline{V} H) \cdot \underline{n} dS + \int_{S_L} \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS + \dot{L}_{elica} = 0}$$

in cui si osservi che, sulla base delle considerazioni su esposte, sia la potenza termica nel modo calore che la potenza meccanica di elica risultano valutate solo attraverso la superficie laterale del condotto.

Ritornando a riferirci al tratto di condotto in analisi, nell'ipotesi di moto unidimensionale stazionario, l'equazione dell'energia si può evidentemente scrivere come

$$\dot{m}(H_2 - H_1) = - \int_{S_L} \underline{J}_q \cdot \underline{n} dS - \dot{L}_{elica}$$

cioè

$$\boxed{\dot{m}(H_2 - H_1) = \dot{Q} - \dot{L}_{elica}}$$

avendo denotato con \dot{Q} la potenza termica scambiata complessivamente attraverso la superficie laterale.

L'equazione dell'energia appena ottenuta mostra una evidente analogia con l'equazione del primo principio della termodinamica $\boxed{m(u_2 - u_1) = Q - L}$ in quanto entrambe individuano come causa di variazione dell'energia gli scambi nei modi lavoro e calore, anche se in un caso ci si riferisce all'energia totale, nell'altro alla sola energia interna.

Si possono fare le ulteriori considerazioni, evidenziando le seguenti *differenze* interpretative:

- Il primo principio deriva dall'equazione del bilancio dell'energia quando il sistema è chiuso e non ci sono termini convettivi di scambio. L'altra relazione vale invece per sistemi aperti.
- Il primo principio fa riferimento a variazioni Δu tra due stati (la variabile temporale nella termodinamica degli stati d'equilibrio essendo non rilevante), mentre l'espressione valida per i sistemi aperti fa riferimento a variazioni tra due sezioni nell'ipotesi di stazionarietà del moto.
- Nell'espressione del primo principio sono state trascurate le forme di energia cinetica e potenziale.

Ritornando all'equazione

$$\dot{m}(H_2 - H_1) = \dot{Q} - \dot{L}_{elica}$$

Si sottolinea che $\dot{L}_{elica} \neq 0$ se all'interno del condotto ci sono organi mobili, quali ad esempio il **compressore**, che compie lavoro sul sistema, o la **turbina** che assorbe lavoro dal sistema. Inoltre, pur in assenza di organi mobili, la potenza di elica è non nulla quando gli effetti viscosi alle pareti non sono trascurabili, generando l'effetto dissipativo generalmente descritto come *perdite di carico*. In questo caso si è già visto che gli scambi convettivi sono convenientemente descritti attraverso l'introduzione del modulo della velocità media. Scambi di calore possono, d'altra parte, essere presenti sia per la presenza di **scambiatori di calore** che per la presenza di combustione interna; in quest'ultimo caso si parla di **adduzione di calore**.

Applicazione dell'equazione dell'energia: il teorema di Bernoulli

Supponiamo ora che il flusso nel condotto sia anergodico (senza scambio di lavoro) e adiabatico. L'equazione dell'energia per moti stazionari e unidimensionali si semplifica fornendo

$$\boxed{\Delta H = 0} \Leftrightarrow H = h + \frac{V^2}{2} + gz = \text{cost}$$

Sotto queste ipotesi, cioè, il moto è omoenergetico, ovvero l'entalpia totale si conserva costante in tutto il campo. Quest'ultima è l'**espressione generalizzata dell'equazione di Bernoulli** e vale evidentemente per moti che sono anche omoentropici. Formulando le equazioni del bilancio in

forma differenziale, ovvero a livello locale, nell'ambito della discussione che classicamente fa riferimento al teorema di Crocco, si mostra che un moto isoentropico è necessariamente isoentalpico (e quindi irrotazionale). Si ricorda che in tale formulazione il valore costante di H può in generale variare da linea di corrente a linea di corrente (moto isoentalpico). Nel presente caso di moto unidimensionale, la costante è necessariamente la stessa per ogni linea di corrente (le grandezze sono infatti costanti in ogni sezione trasversale) e il moto è allora omoentalpico. E' possibile ottenere un'altra espressione semplificata dell'equazione di Bernoulli, valida per moti incomprimibili. Ricordando la definizione di entalpia termodinamica, si può scrivere

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost$$

Poiché il moto è isoentropico ($s=cost$) e incomprimibile ($v=cost$), l'energia interna $u(s,v)$ è costante e potrà essere portata a secondo membro. L'equazione allora diventa

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost$$

che è **l'equazione di Bernoulli nella forma classica incomprimibile**. Questa relazione è del tipo energetico, ma può avere una interpretazione dinamica se moltiplicata per ρ :

$$p + \rho \frac{V^2}{2} + \rho gz = cost$$

La somma della pressione termodinamica, di quella dinamica e di quella idrostatica, è costante lungo una linea di corrente. E' da notare che, in tale caso, è possibile ricavare l'equazione di Bernoulli anche dall'equazione della quantità di moto. Ciò sembra essere sintomo di una perdita di efficacia informativa, in realtà, ipotizzando $\rho = cost$, le incognite diminuiscono in numero.

• EQUAZIONE DEL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Una metodologia per ricavare in approccio integrale l'equazione di bilancio della quantità di moto è basata sulla scrittura della legge di Newton

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{V})$$

scritta per sistema a massa in generale non costante, dove \underline{F} è la risultante di tutte le forze esterne applicate, superficiali e di campo. Si osservi che nello spirito della legge di Newton la derivata temporale è "misurata" da un osservatore solidale con il moto della massa stessa. Poiché nel campo, in generale, le distribuzioni di \underline{V} e di ρ non sono uniformi, la quantità di moto va espressa per la singola particella e poi integrata nell'intero volume di controllo. L'espressione della legge di Newton diventa

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \underline{V} dv = \underline{F}$$

dove per la derivata temporale si è impiegato il simbolo $\frac{D}{Dt}$ per distinguere tale derivata dalla derivata temporale effettuata (o “misurata”) da un osservatore solidale con il riferimento fisso (denominata talvolta anche derivata locale). Anticipiamo qui che la derivata temporale effettuata in un riferimento solidale con il sistema in moto prende il nome di derivata sostanziale.

A questo punto non ci resta che distinguere in \underline{F} le forze superficiali e quelle di campo. Per quanto riguarda le forze superficiali, lo sforzo è $\underline{n} \cdot \underline{\tau} = \underline{\tau} \cdot \underline{n}$ per la simmetria del tensore degli sforzi, e la risultante delle forze superficiali che agiscono sul sistema è pertanto l'integrale: $\int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$. Per le forze di campo, trascurando fenomeni di tipo elettromagnetico, dobbiamo considerare la sola forza gravitazionale $\int_V \rho \underline{g} dv$. In definitiva l'equazione che esprime la legge di Newton, bilancio della quantità di moto, è

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_V \rho \underline{V} dv = \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS + \int_V \rho \underline{g} dv}$$

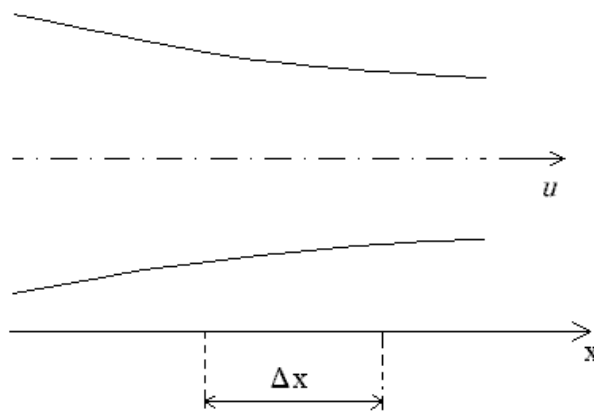
Nella logica dell'equazione del bilancio, l'integrale superficiale è il termine di scambio di tipo diffusivo e quello di volume il termine di produzione. In questa schematizzazione l'accelerazione gravitazionale \underline{g} è da considerarsi la produzione di quantità di moto.

La mancanza del termine di tipo convettivo negli scambi è giustificata dalla natura lagrangiana dell'equazione di Newton. Introducendo il concetto della derivata sostanziale ed il suo legame con la derivata locale, si può far comunque comparire un termine di scambio convettivo.

Derivata sostanziale e teorema del trasporto

Le definizioni formali matematiche delle due derivate sono ovviamente le stesse ma il significato fisico è profondamente diverso. La derivata lagrangiana o sostanziale rappresenta la variazione nel tempo di una grandezza misurata da un osservatore che si muove solidale con la particella, mentre quella euleriana o locale rappresenta la variazione misurata in un punto fisso dello spazio.

Per chiarire questo concetto facciamo un esempio. Consideriamo un condotto a sezione variabile in cui ci sia un flusso unidimensionale stazionario ed incomprimibile per il quale l'equazione di continuità fornisce $VS = cost$, dove S è la sezione locale che varia con l'ascissa longitudinale x .



Poiché il moto è stazionario, in un punto fissato lungo l'asse del condotto la velocità u non varia nel tempo. La derivata locale sarà in ogni punto identicamente nulla, cioè

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = 0 \quad \forall x$$

Se invece desideriamo misurare la derivata sostanziale dobbiamo stimare la u della stessa particella in due istanti diversi (e quindi in due stazioni diverse); formalmente è

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

D'altra parte, gli incrementi Δt e Δx non sono indipendenti tra loro, ma legati dalla relazione $\Delta t = \Delta x / u$, dove la velocità u può essere quella valutata (approssimativamente) nella stazione x (e al tempo t). La precedente relazione si può riscrivere

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta x} u = u \frac{du}{dx}$$

Il primo membro rappresenta la definizione della derivata sostanziale e per essa viene usualmente impiegato il simbolo della D maiuscola per distinguerla dalla derivata euleriana, cioè quella misurata a punto fisso. Si ha dunque

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{du}{dx}$$

Appare abbastanza evidente che fisicamente la derivata sostanziale della velocità è l'accelerazione, che non è dunque legata ad una derivata euleriana, bensì ad una derivata lagrangiana. D'altra parte, essendo il moto stazionario, a punto fisso la derivata temporale della velocità è zero, ma un osservatore che si muovesse nel condotto solidale col flusso rileverebbe una velocità variabile (per l'osservatore medesimo, temporalmente) e dunque avvertirebbe il classico effetto della accelerazione.

Occorre adesso fornire una espressione generale e più rigorosa della derivata sostanziale.

In una visione lagrangiana si definisce la traiettoria come il luogo di punti occupati dalla particella al variare del tempo. In formula, la traiettoria di una determinata particella è definita dalla funzione

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{r}_0, t)$$

dove \underline{r}_0 è la particella (individuata dalla sua posizione all'istante iniziale) ed \underline{r} il vettore posizione che assume la particella al variare del tempo.

Nella visione euleriana, è da definirsi la funzione

$$\underline{r}_0 = \underline{r}_0(\underline{r}, t)$$

dove \underline{r} è un punto fisso per il quale, istante per istante, passerà una nuova particella di nome \underline{r}_0 .

Le due formulazioni non sono indipendenti, si può passare dalla formulazione euleriana a quella lagrangiana e viceversa. In questa sede non ci occuperemo di tale trasformazione.

Relazione tra le formulazioni euleriana e lagrangiana. Teorema del trasporto di Reynolds

Sia g una grandezza funzione del tempo e dello spazio, $g = g(x, y, z, t)$

Se a loro volta, x, y e z dipendono dalla particella e dal tempo ($\underline{r} = \underline{r}(r_0, t)$), si può scrivere

$$g = g(x(x_0, y_0, z_0, t), y(x_0, y_0, z_0, t), z(x_0, y_0, z_0, t), t)$$

dove come al solito $\underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ individua la particella. Deriviamo nel tempo questa funzione.

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{x,y,z} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0,y_0,z_0} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x_0,y_0,z_0} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x_0,y_0,z_0}$$

dove $\frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{x,y,z}$ è la derivata di g nel tempo, fissato un punto nello spazio, $\frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0,y_0,z_0}$, $\frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x_0,y_0,z_0}$,

$\frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x_0,y_0,z_0}$ sono le velocità u, v, w di una fissata una particella di nome \underline{r}_0 .

Ricordando la definizione del gradiente ∇g di una funzione g , segue la relazione tra le due derivate

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{x,y,z} + \underline{V} \cdot \nabla g$$

La derivata sostanziale è uguale alla somma della derivata locale più un termine dovuto al fatto che l'osservatore che misura la derivata sostanziale si muove in un campo in cui è presente un gradiente della grandezza g .

Se le variazioni spaziali sono perpendicolari alla velocità si ha

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t}$$

e in questo caso le derivate lagrangiana e euleriana coincidono.

Nel caso della **quantità di moto**

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{x,y,z} + \underline{V} \cdot \nabla V = \underline{a}$$

che, per definizione, è proprio l'accelerazione.

Questo legame tra le derivate vale anche per volumi di controllo di dimensioni finite (nella formulazione integrale), e viene espresso dal teorema del trasporto o teorema di Reynolds, qui di seguito formulato nel caso generale di volume di controllo $V(t)$ variabile nel tempo

$$\frac{DG}{Dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho g) dV + \int_S \rho g \underline{V} \cdot \underline{n} dS$$

Nel caso del bilancio di massa, cioè $G=m$, poiché il sistema di controllo è rappresentato dalla materia inclusa nel volume di controllo individuato ad un certo istante (l'istante attuale), di cui si monitora l'evoluzione, ne deriva che per definizione $\frac{Dm}{Dt} = 0$, da cui ne consegue che

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS$$

che coincide con l'equazione di conservazione della massa prima formulata per un volume di controllo fisso nel riferimento adottato (il che consente di portare l'operatore di derivazione temporale fuori dall'integrale).

Ritorniamo ora all'equazione di bilancio della quantità di moto, prima ottenuta dalla legge di Newton (formulazione lagrangiana). Possiamo ottenere, con l'ausilio del teorema del trasporto, ovvero facendo comparire il contributo di flusso **convettivo**, una formulazione di tipo euleriano del bilancio della quantità di moto.

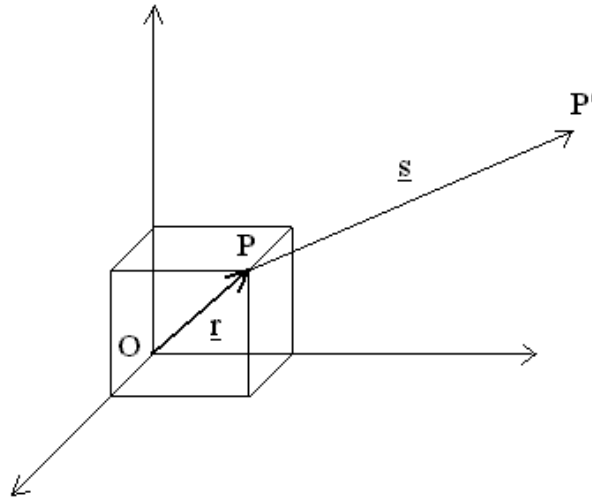
$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{V}) dv + \int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS = \int_S \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} dS + \int_V \rho \underline{g} dv$$

Fisicamente, il termine $\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{V}) dv + \int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS$ è la **forza d'inerzia** definita in senso lagrangiano. Se il moto è stazionario la forza d'inerzia è solo $\int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS$. Inoltre, se il volume di controllo che si sta considerando è fisso nel riferimento adottato (questo è, ad esempio, il caso di un tratto di condotto), la derivata parziale all'interno dell'integrale può essere ovviamente portata fuori l'operatore integrale. Il termine $-\int_S \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} dS$ rappresenta lo scambio dovuto al flusso **diffusivo** che formalmente è $-\underline{\underline{\tau}}$.

Per chiudere il sistema abbiamo quindi, scritto una nuova equazione vettoriale, l'equazione del bilancio della quantità di moto, che in questa forma però introduce una nuova incognita, $\underline{\underline{\tau}}$, ossia altre nove incognite scalari. Per chiudere definitivamente il sistema occorre legare il tensore degli sforzi alle altre incognite principali, il che sarà realizzato introducendo le relazioni fenomenologiche esprimenti il legame tensione-deformazione tipico di un mezzo continuo.

Caratterizzazione delle deformazioni del mezzo

Un mezzo continuo, sia esso solido o liquido, se soggetto a sollecitazioni esterne, si deforma. Il sistema reagisce a tali deformazioni sviluppando nel proprio interno degli sforzi interni, o tensioni, che garantiscono l'equilibrio del sistema stesso, insieme con le sollecitazioni esterne che le hanno generate. In un regime di comportamento elastico le tensioni sono proporzionali alle deformazioni. Allo scopo di caratterizzare inizialmente lo stato della deformazione, scegliamo un punto P interno al mezzo e consideriamo un suo intorno a forma di cubetto (l'intorno non è detto che debba essere necessariamente un cubetto, se la geometria e il tipo di sollecitazioni suggeriscono una simmetria sferica, l'intorno potrà essere una piccola sferetta). Studiamo la deformazione del cubetto a causa di sollecitazioni esterne. Il punto P può essere scelto come baricentro del cubetto o come uno dei vertici, e sia \underline{r} il vettore posizione del generico punto P di coordinate (x, y, z) prima della deformazione.



Dopo la deformazione, valutando lo spostamento di ogni punto dell'intorno (interno e di frontiera), si può ricostruire l'intorno del punto a trasformazione avvenuta. Sia \underline{s} il vettore spostamento di P a seguito della trasformazione e P' la posizione occupata da P a trasformazione avvenuta. Lo spostamento \underline{s} è funzione del punto

$$\underline{s} = \underline{s}(x, y, z) = (u, v, w)$$

e lo studio della deformazione non può prescindere dalla conoscenza di tale funzione. Se lo spostamento è piccolo possiamo pensare di sviluppare \underline{s} in serie di Taylor intorno all'origine degli assi e fermarci al primo ordine.

Ricordiamo lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione $f(x)$ intorno ad un punto $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \varepsilon_3(x).$$

Se x è sufficientemente prossimo a x_0 (lo spostamento è piccolo), possiamo approssimare f ai soli primi due termini della serie di Taylor, commettendo un errore di ordine $(x - x_0)^2$, linearizzando così la funzione f .

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Linearizziamo, dunque, le funzioni scalari

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z)$$

che rappresentano le componenti dello spostamento \underline{s} . Come punto iniziale dello sviluppo consideriamo l'origine degli assi $\underline{0} \equiv (0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u(\underline{0}) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 x + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 y + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_0 z \\
 v(x, y, z) &= v(\underline{0}) + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_0 x + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_0 y + \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_0 z \\
 w(x, y, z) &= w(\underline{0}) + \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_0 x + \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_0 y + \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_0 z
 \end{aligned}$$

Avendo linearizzato le funzioni scalari, in modo compatto, per \underline{s} si può scrivere

$$\underline{s}(\underline{r}) = \underline{s}(\underline{0}) + \underline{r} \cdot \underline{\nabla s}|_0$$

dove $\underline{\nabla s}|_0$ è la diade

$$\underline{\nabla s}|_0 = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_0 & \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_0 & \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_0 & \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_0 & \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_0 \end{bmatrix}$$

Lo spostamento di un generico intorno di P è somma quindi di due contributi. Se l'intorno subisse uno spostamento puramente traslatorio basterebbe assegnare solo lo spostamento di un punto per conoscere come si muove tutto l'intorno: $\underline{s}(\underline{0})$ è lo spostamento dovuto alla **traslazione rigida**.

Tutti gli altri contributi allo spostamento, rotazione rigida e deformazione, sono contenuti nell'altro termine: $\underline{r} \cdot \underline{\nabla s}|_0$ (si noti che è possibile separare e sovrapporre i vari contributi dello spostamento grazie alla linearizzazione del sistema). Le tensioni nascono quindi a causa del secondo termine, o più precisamente, a causa della parte del secondo termine che è responsabile delle deformazioni. Cerchiamo quindi di separare nell'ente $\underline{r} \cdot \underline{\nabla s}|_0$ la parte dovuta alla deformazione, isolando il termine dovuto alla rotazione rigida. Per fare ciò decomponiamo la matrice $\underline{\nabla s}$ (da qui in avanti ometteremo il pedice per indicare che la diade è calcolata in O) nella sue parti simmetrica e antisimmetrica

$$\underline{\nabla s} = (\underline{\nabla s})^a + (\underline{\nabla s})^s$$

dove

$$\begin{cases} (\underline{\nabla s})^a = \frac{\underline{\nabla s} - (\underline{\nabla s})^T}{2} \\ (\underline{\nabla s})^s = \frac{\underline{\nabla s} + (\underline{\nabla s})^T}{2} \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\underline{s}(\underline{r}) = \underline{s}(\underline{0}) + \underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})^a + \underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})^s$$

Vediamo quale è il contributo allo spostamento del punto P di questi due nuovi termini.
Per quanto riguarda la parte antisimmetrica, si ha

$$(\underline{\nabla \underline{s}})^a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{v_x - u_y}{2} & \frac{w_x - u_z}{2} \\ \frac{u_y - v_x}{2} & 0 & \frac{w_y - v_z}{2} \\ \frac{u_z - w_x}{2} & \frac{v_z - w_y}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

I tre elementi significativi sono le componenti del rotore di \underline{s} , $\frac{1}{2} \underline{\nabla} \wedge \underline{s} = \underline{\Omega}$ che si dimostra essere proprio lo spostamento angolare. Dunque il termine $\underline{r} \cdot (\underline{\nabla \underline{s}})^a$ è lo spostamento che un corpo subisce quando esso ruota rigidamente attorno ad un asse definito da $\underline{\Omega}$ (per caratterizzare un moto rigido rotatorio è sufficiente conoscere $\underline{\Omega}$). Abbiamo individuato così l'atto di moto della rotazione rigida; questo contributo, come la traslazione rigida, non genera tensioni.

Veniamo ora al termine $\underline{r} \cdot (\underline{\nabla \underline{s}})^s$, contributo allo spostamento di P che genera deformazione, con conseguente nascita di una tensione. Avremo

$$(\underline{\nabla \underline{s}})^s = \begin{bmatrix} u_x & \frac{v_x + u_y}{2} & \frac{w_x + u_z}{2} \\ \frac{v_x + u_y}{2} & v_y & \frac{w_y + v_z}{2} \\ \frac{w_x + u_z}{2} & \frac{w_y + v_z}{2} & w_z \end{bmatrix}$$

Questo termine può essere a sua volta scomposto in altri due termini:

- La deformazione di solo volume (isotropa, come è quella derivante dalla dilatazione termica,);
- La deformazione di sola forma, che altera gli angoli del cubetto elementare.

Per individuare i due nuovi termini procediamo ad una nuova decomposizione di $(\underline{\nabla \underline{s}})^s$: estraiamo da questo ente diadico la sua traccia e scriviamo la matrice come somma di una matrice a traccia nulla (simmetrica) e di un'altra (a carattere isotropo) la cui traccia è uguale a quella della matrice di partenza.

$$(\underline{\nabla \underline{s}})^s = (\underline{\nabla \underline{s}})_0^s + \frac{\theta}{3} \underline{\underline{U}}$$

dove θ è la traccia della matrice di partenza (la traccia, per definizione, è la somma degli elementi della diagonale principale) e $\underline{\underline{U}}$ è la matrice unitaria. In forma matriciale

$$(\underline{\nabla s})^s = \begin{bmatrix} u_x - \frac{\theta}{3} & \frac{v_x + u_y}{2} & \frac{w_x + u_z}{2} \\ \frac{v_x + u_y}{2} & v_y - \frac{\theta}{3} & \frac{w_y + v_z}{2} \\ \frac{w_x + u_z}{2} & \frac{w_y + v_z}{2} & w_z - \frac{\theta}{3} \end{bmatrix} + \frac{\theta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\underline{s}(\underline{r}) = \underline{s}(\underline{0}) + \underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})^a + \underline{r} \cdot (\underline{\nabla s})_0^s + \frac{\theta}{3} (\underline{r} \cdot \underline{U}).$$

Concentriamo la nostra attenzione sugli ultimi due termini. Essendo $\underline{r} \cdot \underline{U} = \underline{r}$, l'ultimo termine, $\frac{\theta}{3} \underline{r}$, ci indica che il punto si sposta nella direzione di \underline{r} (vettore posizione di P prima dello spostamento) di una quantità $\frac{\theta}{3}$. Ciò avviene per ogni \underline{r} , cioè per ogni punto, quindi la trasformazione è isotropa: $\frac{\theta}{3} \underline{r}$ è rappresentativo della **deformazione di solo volume**. Si noti che la quantità θ è per definizione $\theta = u_x + v_y + w_z$, cioè coincide con la divergenza del vettore velocità $\theta = \underline{\nabla} \cdot \underline{V}$.

La stessa interpretazione fisica, cioè che la divergenza della velocità rappresenta una deformazione di volume, può essere ottenuta partendo dall'equazione di continuità in forma locale

$$\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{V}$$

Quanto è stato detto finora circa la caratterizzazione della deformazione di un intorno vale in linea di principio per un mezzo continuo, quindi sia per un solido che per un fluido. In realtà, mentre per i solidi la situazione fisica è prevalentemente statica, e quindi effettivamente la deformazione può essere caratterizzata dal gradiente degli spostamenti, per i fluidi si è in generale interessati alla velocità di deformazione, intesa come derivata temporale dello spostamento. La precedente trattazione vale, pertanto, per i fluidi a patto di parlare di velocità di deformazione in luogo della deformazione stessa. In altri termini, la trattazione formale è identica pur di sostituire al vettore \underline{s} il vettore velocità \underline{V} .

Il termine $\underline{r} \cdot (\underline{\nabla V})_0^s$ rappresenta (per esclusione) **la velocità di deformazione di sola forma**. In definitiva, il contributo alle deformazioni, di sola forma e di solo volume, nel caso di fluidi sono

$$\underline{r} \cdot (\underline{\nabla V})_0^s + \frac{\theta}{3} \underline{r} \quad \text{con } \theta = \underline{\nabla} \cdot \underline{V}.$$

Cerchiamo ora un'espressione per il **tensore degli sforzi** $\underline{\tau}$

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Innanzitutto ricordiamo che quando non ci sono coppie interne al mezzo di natura magnetica, come è nel nostro caso, il tensore degli sforzi è simmetrico. Definiamo lo **sforzo normale medio**

$$\pi = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3},$$

cioè lo sforzo normale medio è un terzo della traccia della matrice.

Il tensore $\underline{\underline{\tau}}$ può essere così decomposto

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \pi & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \pi & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

cioè

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_0 + \pi \underline{\underline{U}}$$

L'obiettivo dell'analisi è ora quello di definire una relazione tra lo sforzo e la deformazione, ossia una relazione tra causa ed effetto, che stabilisca un legame, in particolare, tra $\underline{\underline{\tau}}_0$ e $(\underline{\underline{\nabla V}})_0^S$, e tra π e θ .

Dobbiamo tenere presente che tra gli sforzi normali è presente la pressione termodinamica, che non è certamente definita come effetto conseguente delle deformazioni. La pressione termodinamica è un'aliquota "non dissipativa" del tensore degli sforzi, in pratica è l'aliquota dello sforzo normale che non determina produzione di entropia, in quanto essa è associata alle collisioni tra le molecole e non allo stato della deformazione del mezzo fluido.. Si osservi che, poiché la pressione termodinamica p è uno sforzo intrinsecamente di compressione, e considerato che per convenzione gli sforzi sono definiti positivi se di trazione, nell'espressione generale di $\underline{\underline{\tau}}$ occorre considerare il termine di pressione p preceduto dal segno meno. Poiché lo sforzo normale di pressione termodinamica è isotropo, ovvero uguale in tutte le direzioni, avremo

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_0 + (\pi + p)\underline{\underline{U}} - p\underline{\underline{U}}$$

La parte di $\underline{\underline{\tau}}$ che si origina a seguito delle deformazioni è $\underline{\underline{\tau}}_0 + (\pi + p)\underline{\underline{U}}$, la parte dovuta all'agitazione molecolare è $-p\underline{\underline{U}}$ (la pressione termodinamica). La quantità

$$\underline{\underline{\tau}}_d = \underline{\underline{\tau}}_0 + (\pi + p)\underline{\underline{U}}$$

viene anche detta **parte dissipativa** del tensore degli sforzi.

Esistono delle relazioni che esprimono un legame tra deformazioni (causa) e tensioni (effetto), e nel caso di piccole deformazioni tali relazioni sono lineari; un fluido che ha un comportamento elastico di questo tipo viene detto **newtoniano**. Seguendo questo modello, avremo le relazioni fenomenologiche sforzo-deformazione

$$\begin{cases} \underline{\underline{\tau}}_0 = 2\mu(\underline{\underline{\nabla V}})_0^s \\ \pi + p = \mu_2 \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} \end{cases}$$

secondo le quali $\underline{\underline{\tau}}_0$ è proporzionale alla deformazione di sola forma per il tramite del coefficiente 2μ , e la somma dello sforzo normale medio e della pressione termodinamica è proporzionale alla deformazione di volume per il tramite del coefficiente μ_2 . μ e μ_2 sono detti rispettivamente **primo e secondo coefficiente di viscosità dinamica**.

In definitiva

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{U}} + 2\mu(\underline{\underline{\nabla V}})_0^s + \mu_2(\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}})\underline{\underline{U}}$$

L'espressione del singolo **sforzo normale**, per esempio quello lungo l'asse x è

$$\sigma_x = -p + \mu_2 \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} \right)$$

cioè

$$\sigma_x = -p + \left(\mu_2 - \frac{2}{3} \mu \right) \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = -p + \left(\mu_2 - \frac{2}{3} \mu \right) \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = -p + \left(\mu_2 - \frac{2}{3} \mu \right) \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

Se $\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} = 0$, moto incomprimibile, il secondo termine sarà nullo, non avremo cioè deformazioni di volume. Inoltre avremo

$$\pi + p = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi = -p}$$

per moti incomprimibili lo sforzo normale medio di tipo viscoso è proprio uguale, a meno del segno, alla pressione termodinamica.

Per la maggior parte dei fluidi di interesse accade che $\lambda \ll \mu$. Nei casi in cui λ sia trascurabile possiamo considerare valida la relazione $\pi = -p$ anche per moti compressibili. Per l'aria tale approssimazione è abbastanza ragionevole.

E' doveroso fare una considerazione: μ_2 e μ , per regimi di moto laminare, sono proprietà della materia e non del moto e si possono ricavare grazie alla termodinamica, in particolare utilizzando la teoria cinetica dei gas. In regime turbolento è possibile adottare una modellistica che introduce gli stessi coefficienti i quali, però, risultano dipendere, oltre che dal fluido, anche dal moto e la trattazione diventa alquanto più complessa (il regime turbolento è caratterizzato da macrostrutture vorticosi che hanno un moto non regolare nel tempo e nello spazio).

Ricaviamo ora **l'espressione del generico sforzo tangenziale**. Lo sforzo tangenziale è legato alla esclusivamente alla deformazione di sola forma, e risulta

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

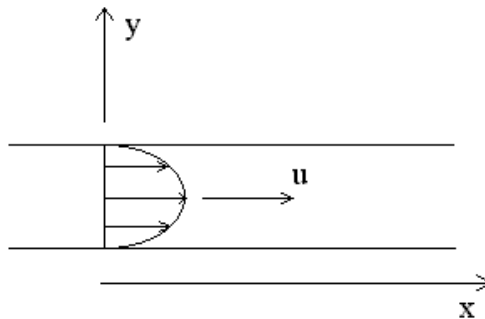
$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Supponiamo di avere un moto piano (piano xy), e consideriamo lo sforzo τ_{xy} . Nel caso in cui non c'è variazione rispetto a y della componente lungo x della velocità $\left(\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \right)$ si ottiene la classica

legge di Newton: $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

Consideriamo, a titolo di esempio, il moto bidimensionale piano di un fluido viscoso che scorre in un canale, come rappresentato in figura.



Nel regime continuo, non può esserci moto relativo tra fluido e parete solida. Trascurando i cosiddetti effetti di ingresso (moto completamente sviluppato, ad accelerazione nulla) è ipotizzabile che la componente della velocità in direzione y sia nulla. Il profilo lungo y della componente u è ragionevolmente simmetrico rispetto all'asse del canale e, dovendo essere una funzione regolare, esso seguirà un andamento presumibilmente parabolico. Il moto è ipotizzato essere laminare, cioè esso è schematizzabile come un insieme di lamine di spessore infinitesimo, ognuna in moto relativo rispetto alle altre con una certa velocità diversa da quelle adiacenti. Si produce, quindi, uno scorrimento relativo tra le diverse lamine, tra le quali si manifesta uno sforzo tangenziale τ che per

ogni valore della coordinata y è dato da $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y$ (si ricordi che la componente di velocità v in

questo caso è nulla). In particolare, volendo valutare l'attrito tra il fluido e la parete, questo è dato

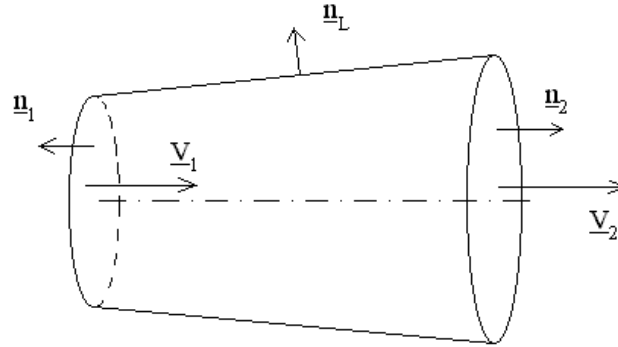
dalla legge di Newton valutata per $y=0$, cioè $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$.

La quantità di moto diffonde, quindi, nella direzione perpendicolare al moto tramite il coefficiente μ , che è una proprietà del fluido.

La schematizzazione del moto qui sopra descritta si riconduce al cosiddetto modello del moto completamente sviluppato in condotti, che può essere rigorosamente sviluppato utilizzando le equazioni differenziali del moto, come lo studente avrà modo di apprezzare in altri corsi.

Applicazione del bilancio di quantità di moto a moti unidimensionali stazionari. Calcolo della spinta

Si consideri ancora una volta lo schema di flusso rappresentato in figura, nella ipotesi di moto unidimensionale e stazionario.



L'equazione della quantità di moto nella sua forma generale, scritta per un volume di controllo fisso, è

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dv + \int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS + \int_S p \underline{n} dS - \int_{S=d} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS = m \underline{g}$$

dove

- $\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dv + \int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS$ è la **forza d'inerzia**;
- $\int_S p \underline{n} dS$ è il termine **diffusivo non dissipativo**, ovvero fisicamente è la risultante delle forze di pressione;
- $-\int_{S=d} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$ è il termine **diffusivo dovuto all'attrito** del fluido sulla superficie di controllo;
- $m \underline{g}$ è la **forza peso** (forza i campo).

Se il moto è stazionario il primo contributo della forza d'inerzia è nullo. L'equazione diventa

$$\int_S \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dS + \int_S p \underline{n} dS - \int_{S=d} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS = m \underline{g}$$

Poiché il moto è unidimensionale, se la superficie laterale è impermeabile, il primo termine può valutarsi come

$$-\rho_1 V_1 V_1 S_1 + \rho_2 V_2 V_2 S_2 = \dot{m}(V_2 - V_1),$$

cioè, in altri termini, la forza d'inerzia è uguale alla portata massica per la variazione di velocità. Il secondo termine si può scrivere

$$\int_S p \underline{n} dS = p_1 \underline{n}_1 S_1 + p_2 \underline{n}_2 S_2 + \int_{S_L} p \underline{n} dS$$

Poiché $\underline{\tau}_d = 0$ sulle superfici S_1 e S_2 , in quanto V è costante su tutti i punti di una stessa sezione trasversale e il moto varia lentamente nella direzione assiale, $\frac{\partial u}{\partial x} \approx 0$, l'equazione del bilancio diventa

$$\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 \underline{n}_1 S_1 + p_2 \underline{n}_2 S_2 + \int_{S_L} p \underline{n} dS - \int_{S_L} \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dS = m \underline{g}$$

Chiamiamo **spinta** l'azione del fluido sulla superficie impermeabile, che evidentemente è la risultante delle forze di pressione e degli sforzi viscosi. Si ha, per definizione

$$\underline{S} = \int_{S_L} p \underline{n} dS - \int_{S_L} \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dS$$

per cui l'equazione del bilancio si scrive

$$\boxed{\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 S_1 \underline{n}_1 + p_2 S_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = m \underline{g}}$$

Introduciamo ora una nuova grandezza: l'**impulso**. Poiché

$$\underline{V}_1 = -V_1 \underline{n}_1; \quad \underline{V}_2 = V_2 \underline{n}_2; \quad \dot{m} = \rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2,$$

il bilancio di quantità moto si può scrivere

$$(p_1 + \rho_1 V_1^2) S_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho_2 V_2^2) S_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = m \underline{g}$$

Se, allora, si definisce impulso I la quantità

$$I = p + \rho V^2$$

l'equazione diventa

$$I_1 S_1 \underline{n}_1 + I_2 S_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = m \underline{g}$$

Supponiamo di avere un moto per il quale $m \underline{g}$ può essere trascurato (il numero di Froude, cioè, è sufficientemente grande, il che è verificato in generale se le variazioni di quota sono estremamente piccole o al limite nulle), e inoltre che il moto sia non viscoso e simmetrico. Sotto queste ipotesi la spinta è nulla. L'equazione, nel caso di condotto a sezione costante, diventa

$$I_1 - I_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I = p + \rho V^2 = \text{cost}$$

Ritorniamo ora all'equazione generale scritta in precedenza e applichiamo tale equazione al calcolo della spinta prodotta da un fluido che scorre nell'interno di un condotto. Sebbene l'esempio di applicazione sia del tutto generale, esso può utilmente essere considerato allo scopo di calcolare la spinta prodotta da un turboreattore, in particolare (ma non necessariamente) nel caso che il motore sia fissato ad un banco prova di laboratorio. Gli effetti gravitazionali sono trascurabili perché il banco è orizzontale e, una volta proiettata lungo la direzione orizzontale, l'equazione diventa

$$\dot{m}(V_2 - V_1) - p_1 S_1 + p_2 S_2 + S_x = 0$$

Se il termine derivante dalla variazione di velocità è relativamente grande, è possibile trascurare il contributo delle pressioni e, di conseguenza, si ottiene

$$S_x = -\dot{m}(V_2 - V_1)$$

dove il segno meno sta a significare che la spinta del fluido sulle pareti è diretta verso l'asse negativo delle x , cioè verso sinistra con riferimento alla figura.

Nella pratica il flusso è accelerato alla velocità di uscita V_2 attraverso il processo di combustione, che adduce energia al flusso stesso, e mediante l'impiego di un condotto di uscita a sezione variabile, detto ugello, che consente di utilizzare tale incremento di energia sotto forma di incremento di energia cinetica.