



SECONDA UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



APPUNTI DEL CORSO DI GEOMETRIA 3

(Topologia Generale - Omotopia e Gruppo Fondamentale)

FRANCESCO MAZZOCCA



Anno Accademico 2015/16

Disegno di copertina:
Il nastro di Möbius,
di Maurits Cornelis Escher, 1963

Indice

Prefazione	1
1 Elementi di Topologia Generale	3
1.1 Notazioni, richiami e preliminari	3
1.2 Spazi metrici e funzioni continue	5
1.2.1 Complementi ed esempi	12
1.2.2 Isometrie e proprietà metriche	14
1.3 Spazi topologici: prime proprietà ed esempi	17
1.4 Complementi	29
1.4.1 La topologia di Zariski	29
1.4.2 Alcuni assiomi di separazione	31
1.4.3 Successioni	33
1.5 Funzioni continue e omeomorfismi	34
1.5.1 Proprietà topologiche di uno spazio metrico	38
1.5.2 Complementi ed esempi	39
1.6 Spazi connessi	45
1.6.1 Connessione in \mathbb{R} e \mathbb{R}^n e connessione per poligonali	48
1.6.2 Componenti connesse	51
1.7 Spazi compatti	52
1.8 Prodotti	58
1.8.1 Compattezza in \mathbb{R} e \mathbb{R}^n	65
1.9 Complementi	67

1.9.1	Compattificazione di Alexandrov	67
1.9.2	Prodotti di famiglie di spazi	69
1.10	Quozienti	71
1.10.1	Esempi	78
1.11	Superfici topologiche	84
1.11.1	Classificazione delle superfici compatte	87
	INDICE DELLE FIGURE.	92
	RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	94

Prefazione

Questi appunti raccolgono buona parte degli argomenti delle lezioni del corso di *Geometria 3* per gli studenti del *Corso di Laurea in Matematica* della Seconda Università degli Studi di Napoli, a Caserta. Essi si presentano spesso schematici e mancano molti dei commenti e delle dimostrazioni indispensabili per una presentazione completa degli argomenti trattati. È pertanto consigliabile integrare la loro lettura con quella di un buon libro di testo, per esempio [8].

Avvertiamo che nella preparazione del corso, e quindi nella stesura di queste note, abbiamo tenuto conto delle conoscenze già acquisite dagli studenti nei precedenti corsi di *Algebra*, *Analisi matematica* e *Geometria*.

Nel concludere, desideriamo ringraziare in anticipo quanti vorranno segnalarci eventuali errori e/o omissioni.

Caserta, dicembre 2015.

Francesco Mazzocca

Capitolo 1

Elementi di Topologia Generale

“ Per comprendere la matematica occorre far funzionare il cervello, e questo costa sempre un certo sforzo. Non è possibile fare la matematica "a fumetti", non è possibile trasformare la sua storia in una novellina. Chi è pigro di mente, chi non prova gioia nel far lavorare il suo cervello, è meglio che non cominci neppure a leggere. Chi invece non si spaventa per le fatiche della mente, non si scoraggi se qua e là, a prima vista, non capisce, e non pretenda di leggere tutto di seguito; ma legga attentamente, un poco per volta, saltando le cose più difficili, o facendosele spiegare da chi ha studiato più di lui.”

Lucio Lombardo Radice

(*"La Matematica da Pitagora a Newton"*, Prefazione)

1.1 Notazioni, richiami e preliminari

Nel seguito useremo le seguenti notazioni standard:

- \mathbb{N} = insieme dei numeri naturali.
- \mathbb{Z} = anello dei numeri interi.
- \mathbb{Q} = campo dei numeri razionali.
- \mathbb{R} = campo dei numeri reali.
- \mathbb{N}^+ , \mathbb{Z}^+ , \mathbb{Q}^+ , \mathbb{R}^+ = insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali positivi, rispettivamente.
- \mathbb{C} = campo dei numeri complessi.
- \mathbb{R}^n = spazio euclideo n -dimensionale.

- $\mathbb{R}^{n,m}$ = spazio vettoriale delle matrici con n righe e m colonne a coefficienti reali.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo, o segmento, di \mathbb{R} chiuso e limitato di estremi a, b).
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (intervallo, o segmento, di \mathbb{R} limitato, chiuso a sinistra e aperto a destra di estremi a, b ; un intervallo di questo tipo sarà detto intervallo c.a.).
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (intervallo, o segmento, di \mathbb{R} limitato, aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi a, b).
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervallo, o segmento, di \mathbb{R} aperto e limitato di estremi a, b).
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < +\infty\}$ (intervallo chiuso semilimitato a sinistra, o semiretta destra chiusa di estremo a).
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$ (intervallo aperto semilimitato a sinistra, o semiretta destra aperta di estremo a).
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq +\infty\}$ (intervallo chiuso semilimitato a destra, o semiretta sinistra chiusa di estremo a).
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$ (intervallo aperto semilimitato a destra, o semiretta sinistra aperta di estremo a).
- $|a|$ = valore assoluto del numero reale a .
- $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ (norma di \mathbf{a}).
- $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a + ib \in \mathbb{C}$ (modulo del numero complesso $a + ib$).
- $GL(n, \mathbb{F})$ = Gruppo delle matrici quadrate invertibili sul campo \mathbb{F} (gruppo lineare di grado n su \mathbb{F}).
- $\mathbb{F}[\mathbf{X}] = \mathbb{F}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ = Anello dei polinomi sul campo \mathbb{F} nelle variabili X_1, X_2, \dots, X_n ($\mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$).

Nel seguito, se a è un elemento di un insieme X , a volte per semplicità denoteremo ancora con a il sottoinsieme $\{a\}$ contenente il solo punto a (**singleton di a**).

DEFINIZIONE 1.1.1. (Ricoprimenti e partizioni) Sia X un insieme non vuoto. Una famiglia $\{A_j\}_{j \in J}$ di sottoinsiemi di X prende il nome di **ricoprimento di X** se

$$X = \bigcup_{j \in J} A_j,$$

cioè se, per ogni $x \in X$, esiste un indice $t \in J$ tale che $x \in A_t$. Un ricoprimento i cui elementi sono sottoinsiemi a due a due disgiunti è una **partizione** di X .

Ricordiamo che le classi d'equivalenza di una relazione d'equivalenza su X sono una partizione di X e, viceversa, gli elementi di una partizione di X sono le classi d'equivalenza di un'unica relazione d'equivalenza su X . Più in generale, un **ricoprimento di un sottoinsieme Y di X** è una famiglia $\{A_j\}_{j \in J}$ di sottoinsiemi di X tali che

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j. \quad \square$$

Ricordiamo che, per un sottoinsieme Y di X , si definisce **complemento** o **complementare** di Y in X , e si denota con $\mathcal{C}_X(Y)$ l'insieme

$$\mathcal{C}_X(Y) = X \setminus Y = \{a \in X : a \notin Y\}.$$

L'insieme $\mathcal{C}_X(Y)$ si denota anche con $\mathcal{C}(Y)$ se X è chiaro dal contesto. Se $\{Y_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X , risulta

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} \mathcal{C}(Y_j) \quad \text{e} \quad \mathcal{C}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{j \in J} \mathcal{C}(Y_j) \quad (1.1)$$

Se X e T sono insiemi e $f : X \rightarrow T$ una funzione tra X e T , detti A, B due sottoinsiemi di X e C, D due sottoinsiemi di T , risulta

$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B) \quad \text{e} \quad A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B), \quad (1.2)$$

$$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \quad \text{e} \quad C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D). \quad (1.3)$$

Inoltre, se

$$\{A_i\}_{i \in I}, \quad \{C_j\}_{j \in J}$$

sono famiglie di sottoinsiemi di X e T , rispettivamente, risulta

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{e} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i), \quad (1.4)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} C_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(C_j) \quad \text{e} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} C_j\right) \subseteq \bigcap_{j \in J} f^{-1}(C_j). \quad (1.5)$$

1.2 Spazi metrici e funzioni continue

Gli elementi di \mathbb{R}^n saranno indifferentemente chiamati **punti** o **vettori**. Ricordiamo che si definisce **distanza euclidea** tra due punti \mathbf{a} e \mathbf{b} di \mathbb{R}^n , e si denota con $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, il numero reale non negativo

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}. \quad (1.6)$$

Osserviamo che nel caso $n = 1$, la (1.6) si riduce a

$$d(a, b) = |b - a|,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. La distanza in \mathbb{R}^n è dunque una funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ed è ben noto che verifica le seguenti **proprietà fondamentali**:

- $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$,
- $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ se, e solo se, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (**proprietà di coincidenza**),
- $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ (**proprietà simmetrica**),
- $d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ (**proprietà triangolare**),

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

La distanza euclidea in \mathbb{R}^n permette di dare la classica definizione di *funzione continua*, nota al Lettore dai corsi di analisi matematica.

DEFINIZIONE 1.2.1. (Funzioni continue tra \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m) Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **continua in un punto** $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se, per ogni numero reale positivo ϵ , esiste un numero reale positivo δ_ϵ tale che

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta_\epsilon \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a})) < \epsilon. \quad (1.7)$$

La funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **continua** in \mathbb{R}^n se è continua in ogni punto di \mathbb{R}^n . □

OSSERVAZIONE 1.2.2. (Continuità delle funzioni polinomiali tra \mathbb{R}^n e \mathbb{R}) Posto $\mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$, sia $f(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ un polinomio nelle variabili X_1, X_2, \dots, X_n a coefficienti reali. La funzione

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

prende il nome di **funzione polinomiale** (associata ad f). È noto dai corsi di analisi matematica che le funzioni polinomiali sono continue. □

Il concetto di distanza euclidea in \mathbb{R}^n , utilizzando le sue proprietà fondamentali, si generalizza in modo naturale ad insiemi arbitrari nel seguente modo.

DEFINIZIONE 1.2.3. (Spazi metrici) Sia X un insieme non vuoto. Una funzione

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

prende il nome di **distanza**, o **metrica** su X , se, per ogni $a, b, c \in X$, verifica le seguenti proprietà (**assiomi di spazio metrico**):

(M1) $d(a, b) \geq 0$,

- (M2) $d(a, b) = 0$ se, e solo se, $a = b$ (**proprietà di coincidenza**),
 (M3) $d(a, b) = d(b, a)$ (**proprietà simmetrica**),
 (M4) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (**proprietà triangolare**).

Quando d è una metrica su X , il numero reale $d(a, b)$ prende il nome di **distanza tra a e b** , la coppia (X, d) si chiama **spazio metrico** e gli elementi di X si dicono **punti**. Uno spazio metrico (X, d) si dice **limitato** se l'insieme

$$\{d(a, b) : a, b \in X\}$$

è limitato superiormente, cioè se ammette l'estremo superiore (**diametro di X**). In questo caso anche la distanza d si dice **limitata**. Se (X, d) non è limitato si dice **illimitato o non limitato**. \square

DEFINIZIONE 1.2.4. (Sottospazi metrici) Siano (X, d) uno spazio metrico e Y un sottoinsieme non vuoto di X . La funzione $d|_Y$ (restrizione di d a $Y \times Y$), definita da

$$d|_Y(a, b) = d(a, b), \text{ per ogni } a, b \in Y,$$

risulta una metrica su Y , detta **metrica indotta da d su Y o restrizione di d a Y** . Lo spazio metrico $(Y, d|_Y)$ si dice **sottospazio** (metrico) di (X, d) e, se non vi è luogo ad equivoci, la metrica $d|_Y$ si denota semplicemente con d e $(Y, d|_Y)$ semplicemente con Y . Il sottoinsieme Y si dice **limitato** se è limitato come sottospazio metrico. \square

ESEMPIO 1.2.5. (Spazi euclidei) La distanza euclidea d in \mathbb{R}^n , definita dalla (1.6), è chiaramente una metrica (non limitata) su \mathbb{R}^n . Lo spazio metrico relativo (\mathbb{R}^n, d) si chiama **spazio euclideo n -dimensionale** e si denota con \mathbb{E}^n , o semplicemente con \mathbb{R}^n . Per $n = 1, 2$ si parla di **retta euclidea** e **piano euclideo**, rispettivamente. \square

ESEMPIO 1.2.6. (Metrica euclidea su $\mathbb{R}^{n,m}$) Sia $\mathbb{R}^{n,m}$ l'insieme delle matrici di tipo $n \times m$ ad elementi in \mathbb{R} . Posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m}$$

e

$$\mathbf{a} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,m}, \dots, a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,m}) \in \mathbb{R}^{nm},$$

la funzione $f : A \in \mathbb{R}^{n,m} \rightarrow \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nm}$ è biunivoca e induce su $\mathbb{R}^{n,m}$ una metrica d , ponendo $d(A, B) = d(f(A), f(B))$. Tale metrica si dice **metrica euclidea di \mathbb{R}^n** . \square

La nozione di continuità di cui alla **Definizione 1.2.1** si generalizza agli spazi metrici nel seguente modo.

DEFINIZIONE 1.2.7. (Funzioni continue tra spazi metrici) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in un punto $a \in X$ se, per ogni numero reale positivo ϵ , esiste un numero reale positivo δ_ϵ tale che

$$x \in X \text{ e } d_X(x, a) < \delta_\epsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon. \quad (1.9)$$

La funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in X se è continua in ogni punto di X . \square

Nel seguito riterremo assegnato uno spazio metrico (X, d) , che spesso denoteremo semplicemente con X , se non vi è luogo ad equivoci.

DEFINIZIONE 1.2.8. (Intorni sferici e sfere) Per ogni $a \in X$ e $r > 0$ numero reale, si definiscono i seguenti sottoinsiemi di X :

- $B_r(a) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$,
l'**intorno sferico aperto** di centro a e raggio r ;
- $D_r(a) := \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$,
l'**intorno sferico chiuso** di centro a e raggio r ;
- $S_r(a) := D_r(a) \setminus B_r(a) = \{x \in S : d(a, x) = r\}$,
la **superficie sferica** di centro a e raggio r . \square

Gli intorni sferici aperti e chiusi, vengono anche chiamati **sfere**, **palle** o **dischi** aperti e chiusi, rispettivamente. Essi sono evidentemente insiemi limitati.

Spesso parleremo semplicemente di intorni sferici, sfere, palle e dischi, omettendo gli aggettivi aperti e chiusi, se questi sono chiari dal contesto o non sono necessari. Per esempio, se diciamo "intorno sferico $B_r(a)$ ", è chiaro dalla notazione che stiamo parlando di un intorno sferico aperto.

OSSERVAZIONE 1.2.9. Per ogni $a \in X$ e $r > 0$ numero reale, gli intorni sferici $B_r(a)$ e $D_r(a)$ contengono il punto a e quindi sono non vuoti, mentre la sfera $S_r(a)$ può essere vuota. Se, generalizzando la **Definizione 1.2.8**, si assume che r possa essere anche nullo, allora risulta $B_0(a) = \emptyset$, $D_0(a) = S_0(a) = \{a\}$. \square

OSSERVAZIONE 1.2.10. Nel caso della retta euclidea, gli intorni sferici aperti e chiusi si riducono agli intervalli limitati rispettivamente aperti e chiusi; più precisamente si ha:

$$B_r(a) = (a - r, a + r) \text{ e } D_r(a) = [a - r, a + r].$$

Inoltre, la superficie sferica $S_r(a)$ si riduce all'insieme di due punti $\{a - r, a + r\}$. Nel caso del piano euclideo, gli intorni sferici e le superfici sferiche si dicono rispettivamente **intorni circolari** e **circonferenze**. \square

OSSERVAZIONE 1.2.11. Nella **Definizione 1.2.7** di funzione continua la (1.9) può riscriversi, usando gli intorni sferici, nel seguente modo:

$$x \in B_{\delta_\epsilon}(a) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(a)), \quad (1.10)$$

ove, evidentemente, $B_{\delta_\epsilon}(a)$ e $B_\epsilon(f(a))$ sono intorni sferici negli spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) , rispettivamente. \square

ESERCIZIO 1.2.12. Provare che, per ogni $a \in X$,

1. le famiglie $\{B_r(a)\}_{r>0}$, $\{D_r(a)\}_{r>0}$, $\{S_r(a)\}_{r\geq 0}$ sono ricoprimenti di X ;
2. risulta

$$B_r(a) \cap B_s(a) = B_t(a), \quad D_r(a) \cap D_s(a) = D_t(a), \quad (1.11)$$

ove $t = \min\{r, s\}$ è il più piccolo tra r e s . \square

PROPOSIZIONE 1.2.13. Sia x un punto dell'intorno sferico $B_r(a)$. Allora esiste un numero reale positivo $s > 0$ tale che $B_s(x)$ è contenuto in $B_r(a)$.

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo s tale che $0 < s < r - d(a, x)$. Allora, applicando la disuguaglianza triangolare ad ogni punto $y \in B_s(x)$, abbiamo

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s < d(a, x) + r - d(a, x) = r$$

e l'asserto è provato. \square

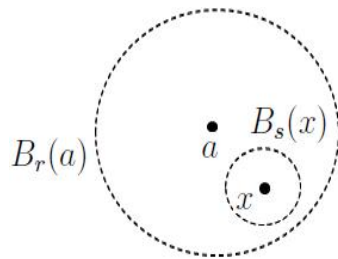


Figura 1.1: Proposizione 1.2.13

PROPOSIZIONE 1.2.14. Siano $B_r(a)$ e $B_t(b)$ due intorni sferici ad intersezione non vuota. Allora, per ogni $c \in B_r(a) \cap B_t(b)$, esiste un numero reale positivo s tale che

$$B_s(c) \subseteq B_r(a) \cap B_t(b).$$

Equivalentemente, l'intersezione di due intorni sferici aperti, se non è vuota, è unione di intorni sferici aperti.

DIMOSTRAZIONE. In forza della **Proposizione 1.2.13** esistono due interni sferici $B_h(c)$ e $B_k(c)$ di centro c contenuti rispettivamente in $B_r(a)$ e $B_t(b)$. Allora, se s è un numero reale positivo minore di $\min\{h, k\}$, risulta $B_s(c) \subseteq B_r(a) \cap B_t(b)$. \square

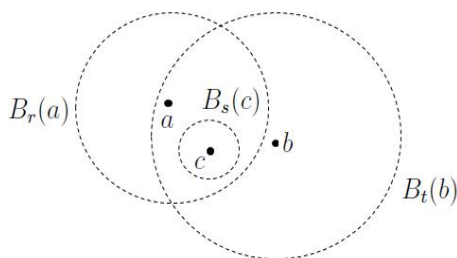


Figura 1.2: Proposizione 1.2.14

PROPOSIZIONE 1.2.15. (Proprietà di Hausdorff, o di separazione) Se a, b sono punti distinti di X , esistono due interni sferici di centro rispettivamente a e b che risultano ad intersezione vuota.

DIMOSTRAZIONE. Sia r un numero reale tale che $0 < r < \frac{1}{2}d(a, b)$. Allora gli interni sferici $B_r(a)$ e $B_r(b)$ sono ad intersezione vuota. Infatti, se esistesse un punto $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$, avremmo

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{d(a, b)}{2} + \frac{d(a, b)}{2} = d(a, b),$$

il che è assurdo. \square

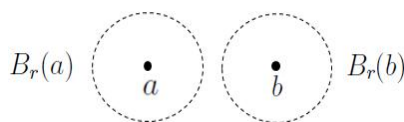


Figura 1.3: Proprietà di Hausdorff

PROPOSIZIONE 1.2.16. Per ogni punto a di uno spazio metrico, risulta

$$\bigcap_{r>0} B_r(a) = \{a\}. \quad (1.12)$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo l'esistenza di un punto $b \neq a$ in $\bigcap_{r>0} B_r(a)$ e poniamo $s = d(a, b)$. Allora $b \notin B_s(a)$ e ciò è assurdo. \square

DEFINIZIONE 1.2.17. (Insiemi aperti e chiusi, interni) Sia assegnato uno spazio metrico (X, d) . Un insieme di punti A di X prende il nome di **insieme aperto**, o

semplicemente **aperto**, se è unione di sfere aperte di (X, d) o se è vuoto. Un insieme di punti C di X prende il nome di **insieme chiuso**, o semplicemente **chiuso**, se risulta il complementare di un aperto. Un insieme di punti U di X prende il nome di **intorno** di un punto $a \in X$ se contiene un aperto contenente a . \square

ESERCIZIO 1.2.18. Provare che in uno spazio metrico valgono le seguenti proprietà:

- *gli intorni sferici aperti sono aperti;*
- *un insieme A è aperto se, per ogni suo punto a , esiste un intorno sferico aperto di centro a contenuto in A ;*
- *gli intorni sferici chiusi e le superfici sferiche sono chiusi;*
- *i punti sono chiusi;*
- *un punto è aperto se, e solo se, esiste un numero reale positivo k tale che $d(a, x) > k$, per ogni punto x diverso da a ;*
- *un insieme aperto è intorno di ogni suo punto.* \square

PROPOSIZIONE 1.2.19. (Proprietà degli aperti) *L'insieme $\tau_d(X)$ di tutti gli aperti di uno spazio metrico (X, d) verifica le seguenti proprietà:*

- *l'insieme vuoto e X sono aperti;*
- *l'unione di un insieme di aperti è un aperto;*
- *l'intersezione di due (e quindi di un numero finito) aperti è un aperto.*

DIMOSTRAZIONE. È una facile conseguenza dell'Esercizio 1.2.12 e della Proposizione 1.2.14. \square

ESEMPIO 1.2.20. (Intersezione di un insieme infinito di aperti) *L'intersezione di tutti gli intorni sferici aperti con centro un fissato punto $a \in \mathbb{R}^n$ è uguale ad $\{a\}$, che ovviamente non è unione di sfere aperte. Abbiamo così un esempio di un insieme infinito di aperti la cui intersezione non è un aperto. Osserviamo che in \mathbb{R}^n esistono anche insiemi infiniti di aperti la cui intersezione è un aperto. Per esempio, con $r > 0$, l'intersezione di tutti gli intorni sferici aperti di centro a e contenenti $B_r(a)$ è uguale ad $B_r(a)$, che è un aperto.* \square

OSSERVAZIONE 1.2.21. *L'insieme di tutti gli intorni sferici aperti con centro un fissato punto di \mathbb{R}^n , pur non contenendo tutti gli aperti di \mathbb{R}^n , verifica le tre proprietà degli aperti descritte nella Proposizione 1.2.19. Questo prova che tali proprietà non sono caratteristiche dell'insieme di tutti gli aperti di uno spazio metrico.* \square

PROPOSIZIONE 1.2.22. (Due proprietà equivalenti alla continuità in un punto) *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua in un punto $a \in X$ se, e solo se, vale una delle seguenti proprietà:*

- (i) per ogni aperto A' di Y contenente $f(a)$, esiste un aperto A di X contenente a tale che $f(A) \subseteq A'$;
- (ii) per ogni intorno U' di $f(a)$ in Y , esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq U'$.

DIMOSTRAZIONE. Sia f continua in $a \in X$ e, fissato un aperto A' di Y contenente $a' = f(a)$, consideriamo un intorno sferico $B_s(a')$ in Y contenuto in A' . Allora, per la continuità di f in a , esiste un intorno sferico aperto $B_r(a)$ in X tale che $f(B_r(a)) \subseteq B_s(a') \subseteq A'$. Così, essendo $B_r(a)$ un aperto di X , abbiamo che la continuità di f in a implica la (i).

Supponiamo ora che la f verifichi la (i), fissiamo un intorno U' di $f(a)$ in Y e consideriamo un aperto A' di Y contenente a' e contenuto in U' . Allora esiste un aperto U di X contenente a tale che $f(U) \subseteq A' \subseteq U'$ e U è un intorno di a . Abbiamo, così che (i) implica (ii).

Per finire, supponiamo che valga la (ii) e fissiamo un numero reale $\epsilon > 0$. Allora esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq B_\epsilon(f(a))$ e, scelto $\delta_\epsilon > 0$ in modo che $B_{\delta_\epsilon}(a) \subseteq U$, risulta

$$x \in B_{\delta_\epsilon}(a) \subseteq U \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(a)).$$

Questo significa che f è continua in a (cfr. (1.10)) e l'asserto è completamente provato. \square

PROPOSIZIONE 1.2.23. (Due proprietà equivalenti alla continuità) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua in X se, e solo se, vale una delle seguenti proprietà:

- (i) per ogni aperto A' di Y , $f^{-1}(A')$ è un aperto di X ;
- (ii) Per ogni $a \in X$ e per ogni intorno U' di $f(a)$ in Y , $f^{-1}(U')$ è un intorno di a in X .

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalla proposizione precedente. \square

OSSERVAZIONE 1.2.24. Notiamo esplicitamente che le proprietà (i) e (ii) delle **Proposizioni 1.2.22 e 1.2.23** utilizzano soltanto nozioni relative agli aperti. Questo significa che potrebbero essere utilizzate per una definizione equivalente di funzione continua, senza un esplicito riferimento alla metrica. \square

1.2.1 Complementi ed esempi

ESEMPIO 1.2.25. (Distanza euclidea su \mathbb{C}^n) Ricordiamo che è possibile identificare \mathbb{R}^{2n} con \mathbb{C}^n (nel caso $n = 1$ abbiamo il *piano di Gauss*) mediante la funzione biunivoca

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} \rightarrow (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_n + ib_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Allora la distanza euclidea di \mathbb{R}^{2n} può trasportarsi in \mathbb{C}^n ponendo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2 + \cdots + |y_n - x_n|^2},$$

per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. La distanza su \mathbb{C}^n così ottenuta si chiama **distanza euclidea su \mathbb{C}^n** . \square

ESEMPIO 1.2.26. (Metrica discreta) Sia X un insieme non vuoto e, per ogni due elementi $a, b \in X$, si ponga

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ 1 & \text{se } a \neq b \end{cases}. \quad (1.13)$$

La funzione d , come facilmente si verifica, è una metrica su X , detta **metrica discreta**. In questa metrica

- ogni punto è aperto e, di conseguenza, ogni sottoinsieme di X è aperto, in quanto unione dei suoi punti;
- per ogni punto $a \in X$, risulta $S_1(a) = X \setminus \{a\}$ e $S_r(a) = \emptyset$, per ogni $r \neq 1$. \square

ESEMPIO 1.2.27. Per ogni due punti $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ del piano euclideo \mathbb{R}^2 , si ponga

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}. \quad (1.14)$$

La funzione d , come facilmente si verifica, è una metrica su \mathbb{R}^2 . \square

ESEMPIO 1.2.28. Sia X l'insieme delle funzioni continue dell'intervallo $[0, 1]$ in \mathbb{R} . Posto

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \quad d'(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\},$$

per ogni $f, g \in X$, si ha che d e d' sono due distanze su X . \square

ESEMPIO 1.2.29. Sia X l'insieme delle funzioni continue dell'intervallo $[0, 1]$ in \mathbb{R} e si ponga

$$d(f, g) = \min\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\},$$

per ogni $f, g \in X$. Osserviamo che, se per due elementi f, g di X , risulta $d(f, g) = 0$, non necessariamente deve essere $f = g$. Ne segue che d non verifica la proprietà (M3) e, quindi, d non è una metrica su X . \square

ESEMPI 1.2.30. Siano (X, d) uno spazio metrico e r un numero reale positivo. Posto, per ogni $a, b \in X$,

$$d'(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}, \quad d''(a, b) = rd(a, b) \quad \text{e} \quad d'''(a, b) = \min\{1, d(a, b)\},$$

si ha che d' , d'' e d''' sono tre distanze su X . Per le metriche d' e d''' , risulta $d'(a, b), d'''(a, b) \leq 1$, per ogni $a, b \in X$ e, quindi, d' e d''' sono esempi di metriche limitate. \square

Considerato uno spazio metrico (X, d) , siano x un punto di X e A, B due sottoinsiemi di X . Gli insiemi di numeri reali

$$\{d(a, x) : a \in A\}, \quad \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

sono limitati inferiormente da 0 e, quindi, ammettono estremi inferiori che denoteremo rispettivamente con $d(x, A)$ e $d(A, B)$. I numeri reali $d(x, A)$ e $d(A, B)$ si chiamano rispettivamente **distanza tra x e A** e **distanza tra A e B** . Valgono le seguenti proprietà di facile verifica:

- (1) $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0$;
- (2) $d(A, B) = d(B, A)$;
- (3) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A, B) = 0$;
- (4) $x \in S_r(a), A = B_r(a) \Rightarrow d(x, A) = 0$;
- (5) $d(a, b) = 2r, A = B_r(a), B = B_r(b) \Rightarrow d(A, B) = 0$.

1.2.2 Isometrie e proprietà metriche

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione di X in Y . Si dice che f **conserva le distanze** se risulta

$$d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b)), \quad \text{per ogni } a, b \in X. \quad (1.15)$$

In questo caso la f , in forza della proprietà (M2), è necessariamente iniettiva.

DEFINIZIONE 1.2.31. (Isometrie) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione biunivoca $f : X \rightarrow Y$ che conserva le distanze prende il nome **isometria** di X in Y . Un'isometria di (X, d_X) in sé prende anche il nome di **movimento** di (X, d_X) . \square

PROPOSIZIONE 1.2.32. *Un'isometria tra due spazi metrici è una funzione continua.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla **Proposizione 1.2.23.** \square

OSSERVAZIONE 1.2.33. Un'isometria tra due spazi metrici trasforma aperti e chiusi del primo spazio rispettivamente in aperti e chiusi del secondo. \square

Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ isometrie. È facile provare che:

- la funzione identità di X è un'isometria di X in sé;
- la funzione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ dell'isometria $f : X \rightarrow Y$ è un'isometria di Y in X ;
- la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ delle due isometrie f e g è un'isometria di X in Z .

Le tre precedenti proprietà assicurano che la relazione

$$"X \sim Y \text{ se esiste un'isometria di } X \text{ su } Y "$$

è una relazione d'equivalenza nella classe di tutti gli spazi metrici. Due spazi metrici di una stessa classe d'equivalenza si dicono **isometrici**. L'insieme delle isometrie di uno spazio metrico X in se stesso, rispetto all'operazione di composizione di funzioni, risulta un gruppo che si chiama **gruppo delle isometrie** o **gruppo dei movimenti** di X e si denota con $Mov(X)$.

ESEMPIO 1.2.34. (Movimenti di \mathbb{R}^n) Ricordiamo che una matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ si dice **ortogonale** se l'inversa A^{-1} coincide con la trasposta A^t . Le matrici ortogonali d'ordine n formano un sottogruppo del gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$, che si chiama **gruppo ortogonale** e si denota con $O(n)$. Dai corsi di *Geometria 1* e *Geometria 2* sono noti i seguenti risultati.

- Un'applicazione F di \mathbb{R}^n in sé, con $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, è un movimento se, e solo se, è rappresentata da un'equazione del tipo

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

ove $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è un generico vettore,

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e A_F è la matrice ortogonale d'ordine n le cui colonne sono ordinatamente uguali alle componenti dei vettori

$$F(1, 0, \dots, 0), F(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, F(0, \dots, 0, 1).$$

Inoltre, F conserva l'orientamento di \mathbb{R}^n se, e solo se, il determinante della matrice A_F è positivo. I movimenti F di \mathbb{R}^n per cui $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ sono automorfismi vettoriali e si dicono **applicazioni ortogonali**.

- Un'applicazione F di \mathbb{R}^n in sé è un movimento se, e solo se, è rappresentata da un'equazione del tipo

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

ove $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ è un vettore fissato e

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è l'equazione di un movimento che fissa il vettore nullo $\mathbf{0}$. Inoltre, F conserva l'orientamento di \mathbb{R}^n se, e solo se, il determinante della matrice A è positivo. Si osservi che, se $(b_1, b_2, \dots, b_n) \neq \mathbf{0}$, F non è una funzione lineare. \square

OSSERVAZIONE 1.2.35. I movimenti di \mathbb{R}^n che fissano il vettore nullo costituiscono un sottogruppo $Mov_0(\mathbb{R}^n)$ del gruppo $Mov(\mathbb{R}^n)$. L'applicazione

$$F \in Mov_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow A_F \in \mathbb{O}(n)$$

è un isomorfismo tra i gruppi $Mov_0(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{O}(n)$.

I movimenti di \mathbb{R}^n che fissano il vettore nullo e conservano l'orientamento (**rotazioni di centro 0**) costituiscono un sottogruppo $Mov_0^+(\mathbb{R}^n)$ del gruppo $Mov_0(\mathbb{R}^n)$. Le matrici ortogonali a determinante positivo (**matrici ortogonali speciali**) costituiscono un sottogruppo $\mathbb{O}^+(n)$ (**gruppo ortogonale speciale**) del gruppo ortogonale $\mathbb{O}(n)$. L'applicazione

$$F \in Mov_0^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow A_F \in \mathbb{O}^+(n)$$

è un isomorfismo tra i gruppi $Mov_0^+(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{O}^+(n)$. \square

Le **proprietà metriche** di uno spazio metrico (X, d) sono le proprietà di X invarianti per isometrie, ovvero invarianti rispetto al gruppo $Mov(X)$. Si ha, dunque, che ogni proprietà metrica vera in X è tale in un qualsiasi spazio isometrico a X , e viceversa. Quanto detto ci permette di identificare due spazi metrici che siano isometrici; in altre parole, *lo studio degli spazi metrici, rispetto alle proprietà metriche, si fa a meno di isometrie.*

OSSERVAZIONE 1.2.36. (Geometria euclidea) La **geometria euclidea** è lo studio delle proprietà metriche di \mathbb{E}^n . \square

ESEMPIO 1.2.37. La proprietà di uno spazio metrico di essere limitato è una proprietà metrica. Si ha subito, infatti, che non può esistere un'isometria tra uno spazio metrico limitato ed uno illimitato. \square

1.3 Spazi topologici: prime proprietà ed esempi

Molte nozioni e proprietà di uno spazio metrico dipendono essenzialmente dalle proprietà degli insiemi aperti descritte nella **Proposizione 1.2.19** piuttosto che dagli assiomi (M1),(M2),(M3),(M4) della metrica. Per questo motivo, usando le proprietà fondamentali degli aperti di uno spazio metrico, si introducono delle strutture più generali degli spazi metrici stessi: **gli spazi topologici.**

DEFINIZIONE 1.3.1. (Spazi topologici) Siano X un insieme non vuoto, i cui elementi chiamiamo **punti**, e τ una famiglia di sottoinsiemi di X , i cui elementi chiamiamo **insiemi aperti** o, più semplicemente **aperti**. L'insieme τ prende il nome di **topologia** su X se valgono le seguenti proprietà (**assiomi degli aperti**):

- (A1) *l'insieme vuoto e X sono aperti (aperti banali);*
- (A2) *l'unione di un insieme di aperti è un aperto;*
- (A3) *l'intersezione di due aperti (e quindi di un numero finito) è un aperto.*

Quando τ è una topologia su X , la coppia (X, τ) prende il nome di **spazio topologico** e X si dice **sostegno** dello spazio. \square

DEFINIZIONE 1.3.2. (Confronto di topologie) Siano τ e σ due topologie su uno stesso insieme X . Si dice che τ è **meno fine** di σ , e si scrive $\tau \leq \sigma$, se ogni aperto di τ è anche un aperto di σ , cioè $\tau \subseteq \sigma$. Quando τ è meno fine di σ si dice anche che σ è **più fine** di τ . Se $\tau \not\leq \sigma$ e $\sigma \not\leq \tau$ si dice che τ e σ sono **inconfrontabili**. \square

OSSERVAZIONE 1.3.3. Nell'insieme di tutte le topologie su un insieme X , la relazione di finezza risulta un ordine parziale. \square

DEFINIZIONE 1.3.4. (Sottospazi) Se (X, τ) è uno spazio topologico e Y un sottoinsieme non vuoto di X , la famiglia

$$\tau_Y = \{Y \cap A \text{ con } A \in \tau\}$$

è una topologia su Y , detta **topologia indotta**. Lo spazio topologico (Y, τ_Y) prende il nome di **sottospazio topologico** o, più semplicemente **sottospazio**, di X . \square

OSSERVAZIONE 1.3.5. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X . Ogni aperto di X contenuto in Y è un aperto nella topologia indotta su Y . \square

ESERCIZIO 1.3.6. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X . Provare che gli aperti nella topologia indotta su Y sono tutti e soli gli aperti di X contenuti in Y se, e solo se, Y è un aperto in X . \square

Nel seguito riterremo sempre assegnato uno spazio topologico (X, τ) , che spesso denoteremo soltanto con X , se ciò non darà luogo ad equivoci. Inoltre, ogni sottoinsieme di X sarà sempre riguardato come suo sottospazio.

DEFINIZIONE 1.3.7. (Insiemi chiusi) Un sottoinsieme C di uno spazio topologico X si dice **insieme chiuso** o, più semplicemente **chiuso**, se il suo complementare $\mathcal{C}(C)$ è un aperto in X . Se Y è un sottoinsieme di X , un **chiuso di Y** è un sottoinsieme di Y chiuso nella topologia indotta. \square

ESERCIZIO 1.3.8. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X . Provare che i chiusi nella topologia indotta su Y sono tutte e sole le intersezioni dei chiusi di X con Y , in particolare, ogni chiuso di X contenuto in Y è un chiuso nella topologia indotta su Y . Provare, inoltre, che i chiusi nella topologia indotta su Y sono tutti e soli i chiusi di X contenuti in Y se, e solo se, Y è un chiuso in X . \square

L'insieme di tutti i chiusi dello spazio topologico (X, τ) sarà denotato con \mathcal{C}_τ o, più semplicemente, con \mathcal{C} . È chiaro che, essendo il complemento di un chiuso un aperto e valendo le (1.1), vi è una dualità tra l'insieme τ degli aperti e quello \mathcal{C}_τ dei chiusi, che scambia tra loro "aperti con chiusi", "unione con intersezione" e "contenente con contenuto". Questo, tra l'altro, significa che la conoscenza di \mathcal{C}_τ equivale alla conoscenza di τ . Utilizzando le (1.1) è facile provare che i chiusi di uno spazio topologico X verificano le seguenti proprietà:

- l'insieme vuoto e X sono chiusi (**chiusi banali**);
- l'unione di due chiusi (e quindi di un numero finito) è un chiuso;
- l'intersezione di un insieme di chiusi è un chiuso.

Se un insieme di chiusi di una topologia τ su X verifica le tre precedenti proprietà, non è detto che sia la famiglia di tutti i chiusi di τ . Per esempio, supponiamo che esista in (X, τ) un chiuso non contenente un fissato punto $a \in X$. Allora l'insieme costituito dal vuoto e da tutti i chiusi contenenti a verifica le nostre proprietà e non è l'insieme di tutti i chiusi di (X, τ) . Ciò nonostante, le proprietà in questione possono considerarsi caratteristiche dei chiusi e possono essere usate come assiomi per definire una topologia, nel senso precisato dalla proposizione che segue.

PROPOSIZIONE 1.3.9. *Siano X un insieme non vuoto e \mathcal{C} un insieme di sottoinsiemi di X , i cui elementi chiamiamo chiusi. Supponiamo che siano verificate le seguenti proprietà (**assiomi dei chiusi**):*

- (C1) *l'insieme vuoto e X sono chiusi;*
- (C2) *l'unione di due chiusi (e quindi di un numero finito) è un chiuso;*
- (C3) *l'intersezione di un insieme di chiusi è un chiuso.*

Allora $\tau = \{\mathcal{C}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ è l'unica topologia su X per cui \mathcal{C} è l'insieme dei chiusi; cioè $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\tau$.

DIMOSTRAZIONE. È una facile conseguenza delle (1.1). □

ESEMPI 1.3.10. Siano X un insieme non vuoto e $P(X)$ l'insieme delle sue parti.

- $\{\emptyset, X\}$ è una topologia su X , detta **banale**. Questa topologia ha solo due aperti (il minimo numero possibile), che sono anche chiusi. Essa è la meno fine fra tutte le topologie definite su X .
- $P(X)$, l'insieme delle parti di X , è una topologia su X , detta **discreta**. In questa topologia ogni sottoinsieme di X è aperto e chiuso. La topologia discreta è la più fine fra tutte le topologie definite su X e coincide con quella banale solo nel caso in cui X è un singleton, cioè un insieme con un unico elemento.
- $\{\emptyset, Y, X\}$, con $\emptyset \neq Y \subset X$, è una topologia su X , detta **topologia con tre aperti**. I chiusi di questa topologia sono: $\emptyset, \mathcal{C}(Y), X$.
- X e i suoi sottoinsiemi finiti sono i chiusi di una topologia su X , detta **topologia cofinita**. Gli aperti non vuoti di questa topologia sono i *sottoinsiemi cofiniti*, cioè i complementari degli insiemi finiti. Quando X è finito, la topologia cofinita coincide con quella discreta. □

ESEMPIO 1.3.11. (Topologia somma) Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici con sostegni disgiunti e poniamo

$$\tau = \tau_1 \cup \tau_2 = \{A_1 \cup A_2 \subseteq X_1 \cup X_2 \text{ con } A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}. \quad (1.18)$$

La famiglia τ , come subito si prova, è una topologia sull'unione $X_1 \cup X_2$ che prende il nome di **topologia somma**, o **unione**, di τ_1 e τ_2 . Lo spazio topologico $(X_1 \cup X_2, \tau)$ si chiama **spazio somma**, o **unione**, di (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) e sarà denotato con $X_1 \sqcup X_2$. È facile rendersi conto che valgono le seguenti proprietà:

- ogni aperto in X_1 e X_2 è aperto anche in $X_1 \sqcup X_2$, in particolare X_1 e X_2 sono aperti in $X_1 \sqcup X_2$;
- la topologia indotta da τ su X_i è τ_i , $i = 1, 2$; □

ESEMPIO 1.3.12. (Topologia indotta su X da $f : X \rightarrow Y$) Siano X un insieme, (Y, σ) uno spazio topologico e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. La famiglia

$$f^{-1}(\sigma) = \{f^{-1}(A) : A \in \sigma\}$$

è una topologia su X che prende il nome di **topologia indotta da f su X** . □

ESEMPIO 1.3.13. (Topologia indotta su Y da $f : X \rightarrow Y$) Siano (X, τ) uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. La famiglia

$$\tau_f = \{T \subseteq Y \text{ tale che } f^{-1}(T) \in \tau\}$$

è una topologia su Y che prende il nome di **topologia indotta da f su Y** . □

ESEMPIO 1.3.14. (Topologia naturale di \mathbb{R}) Un sottoinsieme A di \mathbb{R} si dice **aperto naturale** se è vuoto o se è unione di intervalli aperti. L'insieme degli aperti naturali di \mathbb{R} è una topologia su \mathbb{R} , detta **topologia naturale** (cfr. **Proposizione 1.2.19**). □

ESEMPIO 1.3.15. (Topologia naturale di \mathbb{R}^n) Sia n un intero positivo. Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice **aperto naturale** se è vuoto o se è unione di sfere aperte. L'insieme degli aperti naturali di \mathbb{R}^n è una topologia su \mathbb{R}^n , detta **topologia naturale**. Ovviamente, nel caso $n = 1$, si ritrova la topologia naturale di \mathbb{R} (cfr. **Proposizione 1.2.19**) □

ESEMPIO 1.3.16. (Topologia naturale di $\mathbb{R}^{n,m}$) Sia $\mathbb{R}^{n,m}$ l'insieme delle matrici di tipo $n \times m$ ad elementi in \mathbb{R} . Posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{a} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{2,m}, \cdots, a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,m}),$$

la funzione $f : A \in \mathbb{R}^{n,m} \rightarrow \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nm}$ è biunivoca e la topologia indotta su $\mathbb{R}^{n,m}$ dalla funzione f si dice **topologia naturale di $\mathbb{R}^{n,m}$** . Chiaramente la topologia naturale di $\mathbb{R}^{n,m}$ è proprio quella indotta dalla metrica euclidea d (cfr. **Esempio 1.2.6**). □

ESEMPIO 1.3.17. (Topologia associata ad una metrica) L'insieme $\tau_d(X)$ di tutti gli aperti di uno spazio metrico (X, d) è una topologia su X , detta **topologia associata alla metrica** d . Per esempio, la topologia associata alla metrica euclidea di \mathbb{R}^n è la topologia naturale di \mathbb{R}^n (cfr. **Proposizione 1.2.19**). \square

ESEMPIO 1.3.18. (Topologia del tiro a bersaglio) Sia a un punto di uno spazio metrico X . Allora l'insieme vuoto, X e gli intorni sferici aperti di centro a sono gli aperti di una topologia su X , che si dice **topologia del tiro a bersaglio**. \square

ESEMPIO 1.3.19. (Topologia delle semirette sinistre aperte) Per ogni numero reale a , chiamiamo **semiretta sinistra aperta di vertice** a , e la denotiamo con S_a , l'intervallo $(-\infty, a)$. È chiaro che, se $a < b$, risulta $S_a \cap S_b = S_a$. D'altra parte, se $\{S_a\}_{a \in A}$ è una famiglia di semirette sinistre aperte, risulta

$$\bigcup_{a \in A} S_a = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } A \text{ non è limitato superiormente} \\ S_e, & \text{se } A \text{ è limitato superiormente e } e = \sup\{A\} \end{cases}.$$

Allora, l'insieme vuoto, \mathbb{R} e le semirette sinistre aperte sono gli aperti di una topologia su \mathbb{R} , che si chiama **topologia delle semirette sinistre aperte** o **topologia della semicontinuità superiore** di \mathbb{R} . In questa topologia i chiusi non banali sono le semirette destre chiuse. Osserviamo che ogni semiretta S_a è unione di intervalli aperti perché risulta

$$S_a = \bigcup_{b < a} (b, a).$$

Ne segue che la **topologia delle semirette sinistre aperte** è *meno fine* di quella naturale di \mathbb{R} . \square

ESERCIZIO 1.3.20. Provare che la topologia delle semirette sinistre aperte di \mathbb{R} e quella cofinita su un insieme infinito verificano la seguente proprietà: *due aperti non vuoti sono ad intersezione non vuota*. \square

Nel seguito, tranne esplicito avviso, supporremo sempre che \mathbb{R}^n , $n > 0$, sia dotato della topologia naturale e, se non vi è luogo ad equivoci, i suoi aperti naturali saranno chiamati semplicemente aperti. Analogamente, supporremo sempre che uno spazio metrico (X, d) sia dotato della topologia associata a d .

DEFINIZIONE 1.3.21. Uno spazio topologico (X, τ) si dice **metrizzabile** se esiste una metrica d su X la cui topologia associata τ_d coincide con τ . \square

ESEMPI 1.3.22. Le topologie associate alle metriche, ovviamente, sono metrizzabili "per costruzione". La topologia con tre aperti su un insieme X , con $|X| > 2$, e la topologia di \mathbb{R} delle semirette sinistre aperte non sono metrizzabili perché i loro punti non sono tutti chiusi (cfr. **Esercizio 1.2.18**). \square

DEFINIZIONE 1.3.23. (Basi) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una sua famiglia di aperti. Si dice che \mathcal{B} è una **base** (per la topologia τ) se ogni aperto di X è unione di elementi di \mathcal{B} . \square

ESEMPIO 1.3.24. (Sfere aperte e basi) Una base della topologia associata ad uno spazio metrico è, per costruzione, l'insieme di tutte le sfere aperte. In particolare, gli intorni circolari aperti di \mathbb{R}^2 e gli intervalli aperti di \mathbb{R} sono basi rispettivamente per \mathbb{R}^2 e \mathbb{R} . \square

ESERCIZIO 1.3.25. Siano X uno spazio topologico, Y un suo sottospazio e \mathcal{B} una base di X . Provare che la famiglia degli aperti di Y ottenuti intersecando gli elementi di \mathcal{B} con Y è una base di Y . \square

Tenendo presente che l'intersezione di due elementi di una base è un aperto, si ha subito la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.3.26. Sia X uno spazio topologico. Se $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ è una base di X , allora sono verificate le seguenti proprietà:

- \mathcal{B} è un ricoprimento di aperti di X ;
- per ogni $x \in B_s \cap B_t$, esiste $k \in J$ tale che $x \in B_k \subseteq B_s \cap B_t$, per ogni $s, t \in J$ (cioè $B_s \cap B_t$ è unione di elementi di \mathcal{B}).

Se un insieme di aperti \mathcal{B} di una topologia τ su X verifica le due precedenti proprietà, non è detto che \mathcal{B} sia una base per τ . Per esempio, gli intorni sferici di centro un fissato punto di \mathbb{R}^n verificano le nostre proprietà e, evidentemente, non costituiscono una base della topologia naturale. Anche le proprietà in questione, però, possono essere usate come assiomi per una topologia nel senso precisato dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.3.27. Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottoinsiemi di X per cui siano verificate le seguenti proprietà (**assiomi delle basi**):

(B1) \mathcal{B} è un ricoprimento di X .

(B2) Per ogni $x \in B_s \cap B_t$, esiste $k \in J$ tale che $x \in B_k \subseteq B_s \cap B_t$, per ogni $s, t \in J$.

Allora l'insieme vuoto e le unioni di elementi di \mathcal{B} sono gli aperti di un'unica topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ su X per cui \mathcal{B} è una base (**topologia associata a \mathcal{B}**).

DIMOSTRAZIONE. È lasciata al Lettore. \square

È chiaro che, se \mathcal{B} è una base per una topologia τ su X , la topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ associata a \mathcal{B} coincide con τ .

ESEMPIO 1.3.28. (La retta di Sorgenfrey) L'insieme \mathcal{B}_{ca} degli intervalli c.a. di \mathbb{R} , cioè del tipo $[a, b)$, verifica gli assiomi delle basi e quindi esiste un'unica topologia su \mathbb{R} per cui \mathcal{B}_{ca} è una base (cfr. **Proposizione 1.3.27**). Questa topologia si chiama topologia di **Sorgenfrey** o **degli intervalli c.a.** e i suoi aperti non vuoti sono le unioni di intervalli c.a.. L'insieme dei numeri reali con questa topologia si chiama **retta di Sorgenfrey**. Osserviamo che ogni intervallo aperto (a, b) è unione di intervalli c.a. perché risulta

$$(a, b) = \bigcup_{a < c < b} [c, b).$$

Ne segue che *la topologia naturale di \mathbb{R} è meno fine di quella di Sorgenfrey.* \square

DEFINIZIONE 1.3.29. (Secondo assioma di numerabilità) Si dice che uno spazio topologico X verifica il **secondo assioma di numerabilità**, o che è uno spazio \mathcal{N}_2 , se possiede una base finita o numerabile. \square

ESEMPIO 1.3.30. (\mathbb{R}^n è \mathcal{N}_2) In \mathbb{R}^n la famiglia

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(\mathbf{a}) : n \geq 1 \text{ intero e } \mathbf{a} \text{ punto a coordinate razionali}\}$$

è una base numerabile e, quindi, \mathbb{R}^n è \mathcal{N}_2 . \square

ESEMPIO 1.3.31. (La retta di Sorgenfrey non è \mathcal{N}_2) Sia \mathcal{B} una base della topologia di Sorgenfrey. Allora, fissato un numero reale positivo a , per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subseteq [x, x + a)$. Se $y \in \mathbb{R}$ e $y > x$, risulta $x \notin [y, y + a)$ e quindi $x \notin B_y$. Ne segue che la funzione

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow B_x \in \mathcal{B}$$

è iniettiva e, di conseguenza, la cardinalità di \mathcal{B} non può essere minore di $|\mathbb{R}|$, la potenza del continuo. Abbiamo così che \mathcal{B} non è numerabile. \square

ESEMPIO 1.3.32. (\mathbb{R} con la topologia discreta non è \mathcal{N}_2) Nella topologia discreta di \mathbb{R} tutti i punti sono aperti e quindi, in questa topologia, ogni base deve necessariamente contenere tutti i loro singleton. D'altra parte \mathbb{R} non è numerabile e di conseguenza la topologia discreta di \mathbb{R} non può avere basi finite o numerabili. Ovviamente, allo stesso modo, si vede che *la topologia discreta su un qualsiasi insieme non numerabile non è \mathcal{N}_2 .* \square

DEFINIZIONE 1.3.33. (Intorni e sistemi fondamentali di intorni) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e a un suo punto.

- Un sottoinsieme U di X si dice **intorno di** a se contiene un aperto contenente a .

- Una famiglia $\mathcal{U}_a = \{U_j\}_{j \in J}$ di intorni di a si dice **sistema fondamentale di intorni di a** se ogni aperto A contenente a contiene un intorno $U_s \in \mathcal{U}_a$.
- Un **sistema fondamentale di intorni di X** è una famiglia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$, ove \mathcal{U}_a è un sistema fondamentale di intorni di a , per ogni $a \in X$. \square

PROPOSIZIONE 1.3.34. (Intorni e aperti) Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico. Un sottoinsieme A di X è aperto se, e solo se, ogni punto di A possiede almeno un intorno contenuto in A .

DIMOSTRAZIONE. Se A è aperto, risulta intorno di ogni suo punto. Se ogni punto a di un insieme $A \subseteq X$ possiede un intorno U_a contenuto in A , esiste un aperto A_a tale che $a \in A_a \subseteq U_a \subseteq A$. Allora risulta $A = \cup_{a \in A} A_a$ e A , in quanto unione di aperti, è un aperto. \square

ESERCIZIO 1.3.35. Siano (X, τ) uno spazio topologico e Y un sottospazio con la topologia indotta τ_Y . Provare che:

- se $a \in Y$ e U è un intorno di a in X , allora $U \cap Y$ è un intorno di a in τ_Y ;
- se $a \in Y$ e \mathcal{U}_a è un sistema fondamentale di intorni di a in X , allora $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}_a\}$ è un sistema fondamentale di intorni di a in τ_Y .

PROPOSIZIONE 1.3.36. (Sistemi fondamentali di intorni e basi) Se $X = (X, \tau)$ è uno spazio topologico, si ha:

- se $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X , allora $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \bigcup_{a \in X} \mathcal{U}_a$ è una base di X ;
- se \mathcal{B} è una base di X , posto $\mathcal{U}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in B\}$ per ogni $a \in X$, la famiglia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X .

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X , allora $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \bigcup_{a \in X} \mathcal{U}_a$ è un ricoprimento di aperti di X . Inoltre, se A è un aperto, ogni punto $a \in A$ appartiene ad un intorno $U \in \mathcal{U}_a$ contenuto in A e, così, $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ è una base di X .

D'altra parte, se \mathcal{B} è una base di X e, per $a \in X$, si pone $\mathcal{U}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in B\}$, ogni aperto A contenente a contiene un elemento di \mathcal{U}_a contenuto in A . Ne segue che $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X . \square

DEFINIZIONE 1.3.37. (Primo assioma di numerabilità) Si dice che uno spazio topologico X verifica il **primo assioma di numerabilità**, o che è uno spazio \mathcal{M}_1 , se ogni suo punto possiede un sistema fondamentale di intorni finito o numerabile. \square

ESEMPIO 1.3.38. (Gli spazi metrici sono \mathcal{M}_1) Per ogni punto a di uno spazio metrico X , la famiglia

$$\mathcal{U}_a = \{B_{\frac{1}{n}}(a) : n \geq 1 \text{ intero}\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di a finito o numerabile e, quindi, X è \mathcal{M}_1 . \square

PROPOSIZIONE 1.3.39. ($\mathcal{N}_2 \Rightarrow \mathcal{N}_1$) Se uno spazio topologico X è \mathcal{N}_2 , allora è anche \mathcal{N}_1 .

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla seconda parte **Proposizione 1.3.36.** \square

ESEMPIO 1.3.40. (La retta di Sorgenfrey è \mathcal{N}_1) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, la famiglia

$$\left\{ \left[a, a + \frac{1}{n} \right), n \text{ intero positivo} \right\}$$

è un sistema fondamentale di intorni numerabile di a nella topologia di Sorgenfrey. La retta di Sorgenfrey è dunque \mathcal{N}_1 . Questo è un esempio di spazio \mathcal{N}_1 che non è \mathcal{N}_2 (cfr. **Esempio 1.3.31**); così abbiamo che la proposizione precedente non può invertirsi. \square

ESERCIZIO 1.3.41. Provare che gli spazi topologici discreti sono \mathcal{N}_1 . \square

DEFINIZIONE 1.3.42. (Chiusura e interno di un insieme) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X . L'intersezione di tutti i chiusi di X contenenti Y si chiama **chiusura di Y** e si denota con \bar{Y} . L'unione di tutti gli aperti di X contenuti in Y si chiama **interno, o parte interna, di Y** e si denota con $\overset{\circ}{Y}$. Un punto appartenente $\overset{\circ}{Y}$ si dice **interno a Y** . Un punto interno al complemento di Y si dice **esterno a Y** . \square

Se $Y \subseteq X$, l'insieme dei chiusi contenenti Y è non vuoto perché X stesso è un chiuso contenente Y . Così, la chiusura \bar{Y} di Y , essendo intersezione di chiusi, è un chiuso contenente Y e, se Y è non vuoto, anche \bar{Y} è non vuoto. L'interno $\overset{\circ}{Y}$ di Y , essendo unione di aperti, è un aperto contenuto in Y e può essere vuoto pur essendo Y non vuoto. Le funzioni

$$Y \in P(X) \rightarrow \bar{Y} \in P(X) \quad \text{e} \quad Y \in P(X) \rightarrow \overset{\circ}{Y} \in P(X)$$

prendono rispettivamente il nome di **operatore di chiusura** e **operatore di passaggio all'interno** dello spazio topologico X .

ESERCIZIO 1.3.43. (Proprietà della chiusura e dell'interno) Provare che valgono le seguenti proprietà per la chiusura e l'interno di un insieme $Y \subseteq X$:

- | | |
|--|--|
| • $Y \subseteq \bar{Y}$ | • $\overset{\circ}{\bar{Y}} \subseteq Y$ |
| • $Y = \bar{Y} \Leftrightarrow Y$ è chiuso | • $Y = \overset{\circ}{Y} \Leftrightarrow Y$ è aperto |
| • $\overline{\bar{Y}} = \bar{Y}$ | • $\overset{\circ}{\overset{\circ}{Y}} = \overset{\circ}{Y}$ |
| • $\bar{\emptyset} = \emptyset$ | • $\overset{\circ}{X} = X$ \square |

OSSERVAZIONE 1.3.44. In uno spazio topologico, in forza del precedente esercizio, si ha che

- gli insiemi chiusi sono tutti e soli gli elementi uniti nell'operatore di chiusura,
- gli insiemi aperti sono tutti e soli gli elementi uniti nell'operatore di passaggio all'interno. \square

PROPOSIZIONE 1.3.45. Se $X = (X, \tau)$ è uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X , risulta

$$\overline{Y \cup T} = \overline{Y} \cup \overline{T} \quad e \quad \overset{\circ}{Y} \cap \overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{Y \cap T}. \quad (1.19)$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'essere $Y \subseteq \overline{Y}$, $T \subseteq \overline{T}$ segue $Y \cup T \subseteq \overline{Y} \cup \overline{T}$ e, quindi, $\overline{Y \cup T} \subseteq \overline{\overline{Y} \cup \overline{T}} = \overline{Y} \cup \overline{T}$. D'altra parte, dall'essere $Y, T \subseteq Y \cup T$ segue $\overline{Y}, \overline{T} \subseteq \overline{Y \cup T}$ e, quindi, $\overline{Y} \cup \overline{T} \subseteq \overline{Y \cup T}$. Abbiamo così la prima delle (1.19); la seconda si prova in modo analogo. \square

ESERCIZIO 1.3.46. Siano X un insieme non vuoto e

$$Y \in P(X) \rightarrow \overline{Y} \in P(X) \quad (1.20)$$

una funzione tale che

$$Y \subseteq \overline{Y}, \quad \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{Y \cup T} = \overline{\overline{Y} \cup \overline{T}},$$

per ogni $Y, T \subseteq X$. Provare che la famiglia $\mathcal{C} = \{C \subseteq X : C = \overline{C}\}$ è la famiglia dei chiusi dell'unica topologia su X per cui la funzione (1.20) è l'operatore di chiusura. \square

ESERCIZIO 1.3.47. Siano X un insieme non vuoto e

$$Y \in P(X) \rightarrow \overset{\circ}{Y} \in P(X) \quad (1.21)$$

una funzione tale che

$$\overset{\circ}{Y} \subseteq Y, \quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{Y}} = \overset{\circ}{Y}, \quad \overset{\circ}{X} = X, \quad \overset{\circ}{Y} \cap \overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{Y \cap T},$$

per ogni $Y, T \subseteq X$. Provare che la famiglia $\tau = \{A \subseteq X : A = \overset{\circ}{A}\}$ è la famiglia degli aperti dell'unica topologia su X per cui la funzione (1.21) è l'operatore di passaggio all'interno. \square

ESERCIZIO 1.3.48. Provare che in uno spazio metrico X risulta:

$$\overline{B_r(a)} = D_r(a), \quad D_r(a) = B_r(a), \quad S_r(a) = \emptyset,$$

per ogni $a \in X$ e ogni numero reale positivo r . \square

DEFINIZIONE 1.3.49. (Aderenza) Siano X uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X . Un punto $a \in X$ si dice **di aderenza per Y** , o **aderente ad Y** , se ogni intorno di a è ad intersezione non vuota con Y . \square

PROPOSIZIONE 1.3.50. (Aderenza e chiusura) L'insieme dei punti di aderenza di un insieme di punti Y di uno spazio topologico coincide con la chiusura \bar{Y} di Y .

DIMOSTRAZIONE. Proveremo, per contrapposizione, che un punto y non è di aderenza per Y se, e solo se, y non appartiene alla chiusura di Y .

Se y non è aderente a Y , esiste un aperto A contenente y e disgiunto da Y . Allora il complemento di A è un chiuso contenente Y cui y non appartiene e ciò significa che y non appartiene alla chiusura di Y . Viceversa, se $y \notin \bar{Y}$, il complemento di \bar{Y} è un aperto contenente y disgiunto da Y e, così, y non è aderente a Y . \square

DEFINIZIONE 1.3.51. (Punti di accumulazione, isolati e di frontiera, insiemi densi) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X . Un punto a aderente a Y si dice

- **di accumulazione per Y** se ogni intorno di a contiene qualche punto di Y diverso da a ;
- **isolato per Y** se esiste un intorno di a che interseca Y nel solo punto a ;
- **di frontiera per Y** se è aderente anche a $\mathcal{C}(Y)$.

L'insieme dei punti di accumulazione di Y prende il nome di **derivato di Y** e si denota con $D(Y)$. L'insieme dei punti isolati di Y prende il nome di **isolato di Y** e si denota con $I(Y)$. L'insieme dei punti di frontiera di Y prende il nome di **frontiera di Y** e si denota con ∂Y . Se ogni punto dello spazio X è aderente a Y , cioè $\bar{Y} = X$, si dice che Y è **denso in X** . \square

ESERCIZIO 1.3.52. Provare che, per $Y \subseteq X$, valgono le seguenti relazioni:

$$\bar{Y} = Y \cup D(Y) = Y \cup \partial Y, \quad I(Y) = \bar{Y} \setminus D(Y). \quad (1.22)$$

\square

DEFINIZIONE 1.3.53. (Spazi separabili) Uno spazio topologico X si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme D finito o numerabile che sia denso in X , cioè $\bar{D} = X$. \square

PROPOSIZIONE 1.3.54. ($\mathcal{N}_2 \Rightarrow$ separabilità) Se uno spazio topologico X è \mathcal{N}_2 , allora è anche separabile.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una base di X , con J insieme finito o numerabile. Allora, usando l'assioma della scelta, possiamo considerare un punto $x_j \in B_j$, per ogni $j \in J$, e costruire l'insieme $D = \{x_j : j \in J\}$. Ora, se y è un punto di X , ogni intorno di y contiene un elemento di \mathcal{B} contenente y e, quindi, un punto di D . Così ogni punto di X è aderente a D , che per costruzione è finito o numerabile. \square

ESEMPIO 1.3.55. (\mathbb{R}^n è separabile) In forza della precedente proposizione \mathbb{R}^n con la topologia naturale, essendo \mathcal{N}_2 , è separabile. Per esempio, l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n a coordinate razionali è denso in \mathbb{R}^n e numerabile. \square

ESEMPIO 1.3.56. (La retta di Sorgenfrey è separabile) Ogni intervallo di \mathbb{R} del tipo $[a, b)$ contiene numeri razionali. Ciò significa che l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali, che è numerabile, è denso in \mathbb{R} con la topologia di Sorgenfrey. In altre parole, la retta di Sorgenfrey è separabile. Questo è un *esempio di spazio separabile che non è \mathcal{N}_2* (cfr. **Esempio 1.3.31**); così abbiamo che la proposizione precedente non può invertirsi. \square

La **Proposizione 1.3.54** si inverte nel caso degli spazi metrici.

PROPOSIZIONE 1.3.57. (Negli spazi metrici la separabilità implica \mathcal{N}_2) Uno spazio metrico (X, d) che sia separabile è anche \mathcal{N}_2 .

DIMOSTRAZIONE. Se D è un insieme numerabile di punti di X tale che $\overline{D} = X$, vogliamo provare che la famiglia

$$\mathcal{B} = \{B_q(y) : y \in D, q \in \mathbb{Q}^+\},$$

che è numerabile, risulta una base di X . A tale scopo, osservato che \mathcal{B} è un ricoprimento di X , basta far vedere che ogni intorno sferico $B_r(x)$, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$ è unione di elementi di \mathcal{B} .

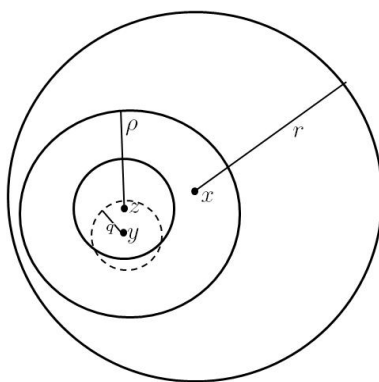


Figura 1.4: Proposizione 1.3.57

Per ogni punto $z \in B_r(x)$, sia $\rho \in \mathbb{R}^+$ tale che $B_\rho(z) \subseteq B_r(x)$ e, considerato un punto $y \in B_{\frac{\rho}{2}}(z) \cap D$, sia $q \in \mathbb{Q}^+$ tale che

$$d(y, z) < q < \frac{\rho}{2},$$

da cui $z \in B_q(y) \in \mathcal{B}$. Proviamo che $B_q(y) \subseteq B_\rho(z)$:

$$t \in B_q(y) \Rightarrow d(t, z) \leq d(t, y) + d(y, z) < q + q < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho,$$

quindi z appartiene a $B_q(y)$ e l'asserto è provato. \square

1.4 Complementi

1.4.1 La topologia di Zariski

Siano \mathbb{F} un campo infinito, X_1, X_2, \dots, X_n indeterminate e, posto

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n),$$

sia $\mathbb{F}[\mathbf{X}] = \mathbb{F}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi su \mathbb{F} in X_1, X_2, \dots, X_n . Ricordiamo che un elemento $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n$ è uno **zero** di un polinomio $f(\mathbf{X}) \in \mathbb{F}[\mathbf{X}]$, o dell'equazione algebrica $f(\mathbf{X}) = 0$, se risulta $f(\mathbf{a}) = 0$. Un insieme di punti di \mathbb{F}^n prende il nome di **insieme algebrico**, o **varietà algebrica**, se è il luogo degli zeri di un sistema di equazioni algebriche. Se

$$S = \{f_i(\mathbf{X})\}_{i \in I}$$

è un insieme di polinomi di $\mathbb{F}[\mathbf{X}]$, denotiamo con $V(S)$ l'insieme algebrico luogo degli zeri del sistema

$$\{f_i(\mathbf{X}) = 0\}_{i \in I}, \quad (1.23)$$

poniamo cioè

$$V(S) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n : f_i(\mathbf{a}) = 0, \text{ per ogni } i \in I\}, \quad (1.24)$$

e diciamo che $V(S)$ è rappresentato dalle (1.23), o che le (1.23) sono le equazioni di $V(S)$. Vale il risultato fondamentale seguente.

PROPOSIZIONE 1.4.1. (Teorema della base di Hilbert) *Ogni sistema di equazioni algebriche a coefficienti in un campo \mathbb{F} è equivalente ad un sistema finito. Equivalentemente, ogni insieme algebrico può essere rappresentato da un numero finito di equazioni.* \square

Un sistema incompatibile, per esempio $\{X_1 = 0, X_1 = 1\}$, e un'identità, per esempio $\{0 = 0\}$, rappresentano rispettivamente l'insieme vuoto e l'intero spazio \mathbb{F}^n . Abbiamo così che:

(C1) *L'insieme vuoto e \mathbb{F}^n sono insiemi algebrici.*

Siano $X = V(S)$ e $Y = V(T)$ due insiemi algebrici rappresentati rispettivamente da S e T . Posto

$$W = \{f(\mathbf{X})g(\mathbf{X}) : f \in S \text{ e } g \in T\}$$

consideriamo l'insieme algebrico $Z = V(W)$. Un punto $\mathbf{a} \in X \cup Y$ è tale che $f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) = 0$, per ogni $f \in S$ e $g \in T$, e quindi

$$X \cup Y \subseteq Z.$$

D'altra parte, se un punto $\mathbf{a} \in Z$ non appartiene a X (risp. a Y), esiste $\bar{f} \in S$ (risp. $\bar{g} \in T$) tale che $\bar{f}(\mathbf{a}) \neq 0$ (risp. $\bar{g}(\mathbf{a}) \neq 0$) e, dovendo essere $\bar{f}(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) = 0$ per ogni $g \in T$ (risp. $f(\mathbf{a})\bar{g}(\mathbf{a}) = 0$ per ogni $f \in S$), risulta $\mathbf{a} \in Y$ (risp. $\mathbf{a} \in X$), e quindi

$$Z \subseteq X \cup Y.$$

Risulta dunque $Z = X \cup Y$ e abbiamo che:

(C2) *L'unione di due insiemi algebrici è un insieme algebrico.*

Siano ora $\{V_i = V(S_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ una famiglia di insiemi algebrici ove ogni V_i è rappresentato da S_i , per ogni $i \in \mathcal{I}$. Allora si ha subito che il sistema associato a $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} S_i$ rappresenta l'intersezione degli insiemi algebrici V_i , al variare di $i \in \mathcal{I}$, cioè

$$V\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} S_i\right) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} V(S_i).$$

Ne segue che:

(C3) *L'intersezione di una famiglia di insiemi algebrici è un insieme algebrico.*

Gli insiemi algebrici di \mathbb{F}^n verificano dunque gli assiomi dei chiusi e, quindi, essi sono i chiusi di un'unica topologia su \mathbb{F}^n , che prende il nome di **topologia di Zariski** di \mathbb{F}^n . In questa topologia gli aperti sono i complementari degli insiemi algebrici.

PROPOSIZIONE 1.4.2. La topologia di Zariski di \mathbb{F}^n verifica le seguenti proprietà:

- ogni punto è chiuso;
- ogni insieme algebrico è intersezione di (un numero finito di) insiemi algebrici ciascuno dei quali è rappresentato da una sola equazione (**ipersuperfici algebriche**);
- i complementari delle ipersuperfici algebriche costituiscono una base.

DIMOSTRAZIONE. Segue dall'uguaglianza

$$\{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)\} = V(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n),$$

per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n$, e dal **teorema della base di Hilbert**. □

PROPOSIZIONE 1.4.3. *Se l'unione di due insiemi algebrici $V(S)$ e $V(T)$ è \mathbb{F}^n , allora uno dei due insiemi coincide con \mathbb{F}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi $V(S) \neq \mathbb{F}^n$, esiste un polinomio $f(X) \in S$ non identicamente nullo. Allora, ogni $g(X) \in T$ è identicamente nullo perché è identicamente nullo il prodotto $f(X)g(X)$. Ne segue che $V(T) = \mathbb{F}^n$. Allo stesso modo si ragiona se si assume $V(T) \neq \mathbb{F}^n$ e l'asserto è completamente provato. \square

Il corollario che segue è immediata conseguenza della proposizione precedente.

COROLLARIO 1.4.4. *Nella topologia di Zariski di \mathbb{F}^n , l'intersezione di due aperti non vuoti è non vuota.*

OSSERVAZIONE 1.4.5. La topologia di Zariski può definirsi anche quando \mathbb{F} è un campo finito. In questo caso si ottiene la topologia discreta su \mathbb{F}^n (provarlo per esercizio). \square

1.4.2 Alcuni assiomi di separazione

Molte proprietà di ampie classi di spazi topologici dipendono dal fatto che questi sono "sufficientemente" ricchi di aperti ed è in quest'ambito che si inquadrano gli argomenti che tratteremo nel presente numero.

DEFINIZIONE 1.4.6. Sia X uno spazio topologico. Si dice che X è

- **uno spazio T_0** se, per ogni coppia di punti distinti di X , esiste un intorno di uno dei due che non contiene l'altro (*assioma, o proprietà, di separazione T_0 o di Kolmogoroff*);
- **uno spazio T_1** se, per ogni coppia di punti distinti a, b di X , esiste un intorno di a non contenente b e uno di b non contenente a (*assioma, o proprietà, di separazione T_1 o di Fréchet*);
- **uno spazio T_2** se, per ogni coppia di punti a, b distinti di X , esistono un intorno di a e uno di b ad intersezione vuota (*assioma, o proprietà, di separazione T_2 o di Hausdorff*). \square

ESEMPI 1.4.7. (Spazi non T_0) In uno spazio metrico (X, d) le sfere aperte con centro un fissato punto a sono gli aperti non banali della topologia del tiro a bersaglio su X (cfr. **Esempio 1.3.18**). Allora, se due punti distinti sono ad una stessa distanza $r > 0$ da a , ogni intorno che ne contenga uno contiene anche l'altro. Ne segue che tale topologia non è T_0 .

La topologia con tre aperti è un altro esempio di topologia che non è T_0 . \square

PROPOSIZIONE 1.4.8. ($T_1 \Leftrightarrow$ punti chiusi) *Uno spazio topologico X è T_1 se, e solo se, ogni suo punto è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che X sia T_1 , consideriamo un suo punto a . Allora, ogni punto $b \neq a$ appartiene ad un intorno contenuto in $X \setminus \{a\}$ e, quindi, questo insieme è aperto. Da ciò segue che $\{a\}$ è un chiuso. Viceversa, se ogni punto di X è chiuso e $a, b \in X$ sono punti distinti, allora $X \setminus \{a\}$ è un intorno di b non contenente a e $X \setminus \{b\}$ è un intorno di a non contenente b . Abbiamo così che X è T_1 . \square

ESEMPIO 1.4.9. (Spazi T_1) In forza della precedente proposizione risultano T_1 le seguenti topologie:

- la topologia associata ad uno spazio metrico e quindi, in particolare, la topologia naturale di \mathbb{R}^n ;
- la topologia della retta di Sorgenfrey;
- la topologia di Zariski;
- la topologia cofinita;
- la topologia discreta. \square

È immediato rendersi conto che *ogni spazio T_2 è anche T_1 e che ogni spazio T_1 è anche T_0* . Queste due implicazioni non possono invertirsi, come provano gli esempi che seguono.

ESEMPIO 1.4.10. (Spazio T_0 e non T_1) La topologia di \mathbb{R} delle semirette sinistre aperte è T_0 e non è T_1 . \square

ESEMPIO 1.4.11. (Spazio T_1 e non T_2) La topologia di Zariski e la topologia cofinita su un insieme infinito sono T_1 e non sono T_2 . \square

ESEMPIO 1.4.12. (Spazi T_2) Gli spazi metrici (in particolare \mathbb{R}^n con la topologia naturale), la retta di Sorgenfrey e gli spazi discreti sono T_2 . \square

PROPOSIZIONE 1.4.13. *Sia X uno spazio topologico T_1 i cui aperti non vuoti siano infiniti. Sia y un punto di accumulazione per un sottoinsieme Y di X . Allora, per ogni aperto A contenente y , l'insieme $A \cap Y$ è infinito (in particolare questo risultato vale in \mathbb{R}^n con la topologia naturale).*

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto contenente y , esiste un punto $y_1 \in A \cap Y$ diverso da y e possiamo definire l'insieme

$$A_1 = A \setminus \{y_1\} = A \cap (X \setminus \{y_1\}),$$

che è un aperto in quanto intersezione di due aperti. Poiché $y \in A_1$, esiste un punto $y_2 \in A_1$ diverso da y, y_1 e possiamo definire l'insieme

$$A_2 = A \setminus \{y_1, y_2\} = A \cap (X \setminus \{y_1, y_2\}),$$

che è un aperto contenente y . Ora, continuando in questo modo, possiamo costruire per induzione l'insieme infinito $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ di punti di $A \cap Y$. \square

1.4.3 Successioni

Se X è uno spazio topologico e N un sottoinsieme numerabile dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali denotiamo con $\{x_n\}_{n \in N}$, o semplicemente con $\{x_n\}$, una successione di suoi punti. Ricordiamo che la successione $\{x_n\}_{n \in N}$ non è altro che la funzione $n \in N \rightarrow x_n \in X$ e avvertiamo che, tranne esplicito avviso, assumeremo $N = \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 1.4.14. (Successioni convergenti) Una successione $\{x_n\}$ di punti di uno spazio topologico X si dice **convergente ad un punto** $\ell \in X$ se, per ogni intorno U di ℓ , esiste un intero positivo m tale che, per ogni $n > m$, risulta $x_n \in U$. In questo caso ℓ prende il nome di **limite** della successione $\{x_n\}$ e si scrive $x_n \rightarrow \ell$. \square

OSSERVAZIONE 1.4.15. È facile rendersi conto che il limite di una successione $\{x_n\}$ è punto di accumulazione per l'insieme degli elementi della successione stessa. Non è invece vero che un punto di accumulazione per l'insieme dei punti di $\{x_n\}$ sia necessariamente un limite della successione, come mostra il seguente esempio. La successione di \mathbb{R} definita da

- $x_n = \frac{1}{n}$, per $n \neq 0$ pari,
- $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, per n dispari.

ha 0 e 1 come punti di accumulazione e nessuno dei due è limite della successione, come facilmente si prova. \square

PROPOSIZIONE 1.4.16. (Unicità del limite negli spazi T_2) In uno spazio topologico T_2 una successione convergente ammette un unico limite.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che una successione $\{x_n\}$ di uno spazio T_2 abbia due limiti distinti ℓ, ℓ' e siano U, U' rispettivamente un intorno di ℓ e uno di ℓ' ad intersezione vuota. Allora, esistono due interi positivi m, m' tali che per $n > m$, $x_n \in U$ e per $n > m'$, $x_n \in U'$. Ora, per $n > m, m'$, risulta $x_n \in U$ e $x_n \in U'$; ciò è assurdo essendo U e U' disgiunti. \square

DEFINIZIONE 1.4.17. (Successioni di Cauchy) Una successione $\{x_n\}$ di punti di uno spazio metrico (X, d) si dice **di Cauchy** se, per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un intero positivo m tale che $d(x_p, x_q) < \epsilon$, per ogni $p, q > m$. \square

PROPOSIZIONE 1.4.18. (Le successioni convergenti sono di Cauchy) In uno spazio metrico X ogni successione convergente è di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\{x_n\}$ sia una successione di X convergente ad un punto ℓ e fissiamo un numero reale $\epsilon > 0$. Allora esiste un intero m tale che $x_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(\ell)$, per ogni $n > m$. Ne segue che

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

per ogni $p, q > m$. Abbiamo così che $\{x_n\}$ è di Cauchy. \square

ESEMPIO 1.4.19. (Successioni di Cauchy non convergenti) La successione $\{\frac{1}{n}\}$ della retta euclidea converge a 0 e quindi è di Cauchy. La stessa successione quindi, considerata come successione di \mathbb{R}^+ con la topologia indotta da quella della retta euclidea, è ancora di Cauchy ma non è convergente. \square

DEFINIZIONE 1.4.20. (Spazi metrici completi) Uno spazio metrico X si dice **completo** se ogni sua successione di Cauchy è convergente. Un sottoinsieme Y di X si dice completo se è tale rispetto alla metrica indotta in esso da quella di X . \square

ESEMPIO 1.4.21. (Completezza di \mathbb{R}^n) È noto dai corsi di analisi matematica che ogni successione di Cauchy di \mathbb{R}^n è convergente. \mathbb{R}^n (in particolare la retta euclidea) è dunque un esempio di spazio metrico completo. \square

PROPOSIZIONE 1.4.22. (Sottospazi completi e insiemi chiusi) Sia X uno spazio metrico completo. Un sottospazio Y di X è completo se, e solo se, Y è un chiuso di X .

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che Y sia completo, sia $y \in \overline{Y}$ e, per ogni intero positivo n , scegliamo un punto $x_n \in Y \cap B_{\frac{1}{n}}(y)$. La successione $\{x_n\}$ converge evidentemente a y , quindi è di Cauchy e, per la completezza di Y , abbiamo $y \in Y$. Allora risulta $Y = \overline{Y}$ e Y è chiuso.

Viceversa, assumiamo che Y sia chiuso e consideriamo una successione di Cauchy $\{x_n\}$ di suoi punti. Per la completezza di X , abbiamo che $\{x_n\}$ converge ad un punto $y \in X$; inoltre ogni intorno U di y contiene punti di $\{x_n\}$ e quindi di Y . Ne segue che y è aderente a Y e, essendo Y chiuso, risulta $y \in Y$. Abbiamo così che Y è completo. \square

OSSERVAZIONE 1.4.23. In uno spazio metrico la proprietà di una successione di essere di Cauchy e la completezza sono proprietà metriche (dimostrarlo per esercizio). \square

1.5 Funzioni continue e omeomorfismi

In questo paragrafo generalizziamo agli spazi topologici la nozione di *continuità*, già introdotta e discussa nel caso degli spazi metrici.

DEFINIZIONE 1.5.1. (Funzioni continue) Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in un punto $a \in X$ se, per ogni intorno V di $f(a)$ in Y , esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq V$. La funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in X se è continua in ogni punto di X . \square

Nel seguito per indicare una funzione f tra i sostegni di due spazi topologici (X, τ_X) e (Y, τ_Y) useremo anche la notazione $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$.

OSSERVAZIONE 1.5.2. È chiaro che, se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) sono spazi metrizzabili rispettivamente con le metriche d_X, d_Y , la definizione precedente si riduce a quella di funzione continua tra spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) (cfr. **Definizione 1.2.7**). In particolare risultano continue secondo quest'ultima definizione le funzioni continue tra gli spazi euclidei \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m studiate nei corsi di analisi matematica (cfr. **Definizione 1.2.1**). \square

ESEMPIO 1.5.3. Risultano continue:

- tutte le funzioni tra un qualunque spazio topologico e uno spazio banale;
- tutte le funzioni tra uno spazio discreto e un qualunque spazio topologico;
- l'**immersione** $i : a \in Y \rightarrow a \in X$ di un sottospazio Y di X in X ;
- l'**identità** $i : a \in X \rightarrow a \in X$ di (X, τ) in (X, σ) con σ meno fine di τ ;

PROPOSIZIONE 1.5.4. (Caratterizzazioni delle funzioni continue) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra i sostegni dei due spazi topologici (X, τ_X) e (Y, τ_Y) . Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) f è continua;
- (ii) la controimmagine $f^{-1}(A)$ di ogni aperto A di Y è un aperto di X ;
- (iii) la controimmagine $f^{-1}(C)$ di ogni chiuso C di Y è un chiuso di X ;
- (iv) le controimmagini degli aperti di una fissata base di Y sono aperti di X ;
- (v) per ogni punto $b = f(a) \in f(X)$, la controimmagine $f^{-1}(U')$ di ogni intorno U di $b \in Y$ di un sistema fondamentale di intorni di Y è un intorno di a in X .

DIMOSTRAZIONE. (i) \Leftrightarrow (ii): Se f è continua e A un aperto di Y , sia a un arbitrario punto di $f^{-1}(A)$. Poiché A è un intorno di $f(a)$, esiste un intorno U di a tale che $f(U) \subseteq A$. Ne segue che U è contenuto in $f^{-1}(A)$ e, così, $f^{-1}(A)$ è aperto. Ora, nell'ipotesi (ii), siano $a \in X$ e U un intorno di $f(a)$. Detto A un aperto di Y contenente $f(a)$ e contenuto in U , si ha che $f^{-1}(A)$ è un intorno (perché aperto) di a la cui immagine mediante f è contenuta in U . Ne segue che f è continua.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Se vale la (ii) e C è un chiuso di Y , allora $\mathcal{C}(C)$ è un aperto in Y e $f^{-1}(\mathcal{C}(C))$ un aperto in X . Da ciò segue che $f^{-1}(C) = \mathcal{C}(f^{-1}(\mathcal{C}(C)))$ è un chiuso di X . In modo analogo si vede che da (iii) segue (ii).

La dimostrazione delle altre equivalenze è lasciata al Lettore. \square

ESERCIZIO 1.5.5. Siano X, Y due insiemi non vuoti e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Provare che:

- se σ è una topologia su Y , la topologia $f^{-1}(\sigma) = \{f^{-1}(A) : A \in \sigma\}$ indotta su X da f (cfr. 1.3.12) è la più fine tra le topologie su X per cui f è continua;
- se τ è una topologia su X , la topologia $\tau_f = \{T \subseteq Y : f^{-1}(T) \in \tau\}$ indotta su Y da f (cfr. 1.3.13) è la più fine tra le topologie su Y per cui f è continua. \square

ESEMPIO 1.5.6. (La topologia di Zariski di \mathbb{R}^n è meno fine di quella naturale) Se $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ è un polinomio in n variabili a coefficienti reali, la *funzione polinomiale* associata

$$f : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$$

è continua rispetto alle topologie naturali di \mathbb{R}^n e \mathbb{R} . Ne segue che l'ipersuperficie algebrica di \mathbb{R}^n definita da

$$f^{-1}(0) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0\}$$

è un chiuso di \mathbb{R}^n con la topologia naturale (perché controimmagine di un chiuso mediante una funzione continua) e di conseguenza sono chiuse tutte le loro intersezioni, cioè gli insiemi algebrici (cfr. **Proposizione 1.4.2**). Ne segue che la topologia di Zariski di \mathbb{R}^n è meno fine della topologia naturale. \square

ESERCIZIO 1.5.7. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione iniettiva e continua tra gli spazi topologici X e Y . Provare che se Y è uno spazio T_j , $j = 0, 1, 2$, allora anche X è uno spazio T_j .

PROPOSIZIONE 1.5.8. (Funzioni continue e aderenza) Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra i sostegni dei due spazi topologici (X, τ_X) e (Y, τ_Y) è continua se, e solo se, per ogni sottoinsieme $T \subseteq X$, trasforma punti aderenti a T in punti aderenti a $f(T)$, cioè $f(\overline{T}) \subseteq \overline{f(T)}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo f continua e sia a un punto aderente a T . Allora, per ogni aperto A' di Y contenente $f(a)$, $A = f^{-1}(A')$ è un aperto di X contenente a e $A \cap T$ contiene almeno un punto b . Ne segue che $A' \cap f(T) \neq \emptyset$, essendo $f(b) \in A' \cap f(T)$, e quindi $f(a)$ è aderente a $f(T)$.

Viceversa, supponiamo $f(\overline{T}) \subseteq \overline{f(T)}$, per ogni sottoinsieme $T \subseteq X$. Detto C' un chiuso di Y , poniamo $C = f^{-1}(C')$ e osserviamo che da $f(C) \subseteq C'$ segue $\overline{f(C)} \subseteq C'$, perché C' è un chiuso. Allora, essendo $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)} \subseteq C'$, risulta $\overline{C} \subseteq f^{-1}(C') = C$, così C è chiuso e f è continua. \square

PROPOSIZIONE 1.5.9. (Funzioni continue e convergenza di successioni) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua tra gli spazi topologici X e Y . Se $\{x_n\}$ è una successione di punti di X convergente ad un punto ℓ , la successione $\{f(x_n)\}$ di punti di Y converge al punto $f(\ell)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia U' un intorno di $f(\ell)$ in Y e consideriamo l'intorno $U = f^{-1}(U')$ di ℓ in X . Allora, esiste un intero positivo m tale che, per ogni $n > m$, $x_n \in U$ e quindi $f(x_n) \in U'$. Ne segue che $\{f(x_n)\}$ converge ad $f(\ell)$. \square

PROPOSIZIONE 1.5.10. (Composizione di funzioni continue) Siano $X, Y, e T$ spazi topologici e $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ funzioni continue. Allora, la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ è continua. \square

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto A di $T, g^{-1}(A)$ è un aperto di Y perché g è continua e, quindi, essendo continua anche $f, f^{-1}(g^{-1}(A))$ è un aperto di X . D'altra parte, risulta $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ e da ciò segue che $g \circ f$ è continua. \square

DEFINIZIONE 1.5.11. (Omeomorfismi) Siano X e Y spazi topologici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **omeomorfismo** se valgono le seguenti proprietà:

- f è biunivoca;
- le funzioni $f : X \rightarrow Y$ e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sono continue. \square

ESEMPIO 1.5.12. (Le isometrie sono omeomorfismi) Sia $f : X \rightarrow Y$ un'isometria tra gli spazi metrici X e Y . Allora f deve essere biunivoca. Inoltre, in forza dell'**Esempio 1.3.24** e della **Proposizione 1.5.4-(iv)** le funzioni f e f^{-1} risultano continue. Ne segue che ogni isometria è anche un omeomorfismo. \square

ESERCIZIO 1.5.13. Siano $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo tra gli spazi topologici X, Y e a un punto di X . Provare che la restrizione di f a $X \setminus \{a\}$ è un omeomorfismo tra $X \setminus \{a\}$ e $Y \setminus \{f(a)\}$. \square

Siano X, Y e T spazi topologici e $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ omeomorfismi. È facile verificare che:

- (H1) la funzione identità di X è un omeomorfismo di X sé;
- (H2) la funzione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ dell'omeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo di Y in X ;
- (H3) la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ dei due omeomorfismi f e g è un omeomorfismo di X in Z .

Le tre precedenti proprietà assicurano che la relazione

$$"X \simeq Y \text{ se esiste un omeomorfismo di } X \text{ su } Y"$$

è una relazione d'equivalenza nella classe di tutti gli spazi topologici. Due spazi topologici di una stessa classe di omeomorfismo si dicono **omeomorfi**. L'insieme degli omeomorfismi di uno spazio topologico X in se stesso, rispetto all'operazione di composizione di funzioni, risulta un gruppo che si chiama **gruppo degli omeomorfismi** di X e si denota con $H(X)$.

ESERCIZIO 1.5.14. Provare che sono invarianti per omeomorfismi le seguenti nozioni: *base, intorno, sistema fondamentale di intorni, chiusura, interno, punto di aderenza, punto isolato, punto di accumulazione, proprietà \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 , separabilità, proprietà T_0, T_1, T_2 .* \square

Le **proprietà topologiche** di uno spazio topologico (X, τ) sono le proprietà di X invarianti per omeomorfismi, ovvero invarianti rispetto al gruppo $H(X)$. Si ha, dunque, che ogni proprietà topologica di X è tale in un qualsiasi spazio omeomorfo a X . Quanto detto ci permette di identificare due spazi topologici che siano omeomorfi; in altre parole, lo studio degli spazi topologici si fa a meno di omeomorfismi.

1.5.1 Proprietà topologiche di uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico. Le proprietà della topologia τ_d associata a d si dicono **proprietà topologiche di X** . Poiché un'isometria tra due spazi metrici è anche un omeomorfismo, come osservato nell'**Esempio 1.5.12**, si ha che ogni proprietà invariante per omeomorfismi è invariante anche per isometrie. Di contro, vedremo che esistono proprietà invarianti per isometrie ma non per omeomorfismi. In altre parole: *le proprietà topologiche sono anche metriche, ma non è vero il contrario.*

Due spazi metrici si dicono **topologicamente equivalenti** se sono omeomorfi rispetto alle loro topologie associate; in questo caso le rispettive metriche si dicono **equivalenti**. Quanto prima osservato assicura che spazi metrici isometrici sono topologicamente equivalenti ma, in generale, non è vero il viceversa. Può, infatti, accadere che metriche diverse su uno stesso insieme diano luogo ad una stessa topologia. Una condizione necessaria e sufficiente affinché due metriche sullo stesso insieme siano equivalenti è espressa dalla seguente proposizione, la cui semplice dimostrazione è lasciata al Lettore.

PROPOSIZIONE 1.5.15. *Due metriche d e d' su un insieme X individuano la stessa topologia, cioè $\tau_d = \tau_{d'}$, se e solo se:*

- *l'insieme degli intorni sferici aperti nella metrica d è una base della topologia $\tau_{d'}$;*
- *l'insieme degli intorni sferici aperti nella metrica d' è una base della topologia τ_d .*

ESEMPIO 1.5.16. Sia (X, d) uno spazio metrico non limitato. Abbiamo osservato che le metriche d' e d''' su X degli **Esempi 1.2.30** sono limitate e, quindi, (X, d) e $(X, d'), (X, d''')$ non sono isometrici. È facile, però, rendersi conto che d e d', d'''

sono equivalenti. Abbiamo così che *la proprietà di uno spazio metrico di essere limitato è metrica ma non topologica.* \square

1.5.2 Complementi ed esempi

Un sottoinsieme J di \mathbb{R} prende il nome di **intervallo** se, per ogni due suoi punti a, b con $a < b$, l'intervallo chiuso $[a, b]$ è contenuto in J . È un esercizio provare la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.5.17. *Gli intervalli di \mathbb{R} sono tutti e soli gli insiemi dei seguenti tipi:*

$$\emptyset, \mathbb{R}, [a, b], [a, b), (a, b], (a, b), [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, a], (-\infty, a),$$

$$a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

ESERCIZIO 1.5.18. Provare che gli estremi di un intervallo limitato J di \mathbb{R} sono punti di accumulazione di J . \square

ESEMPIO 1.5.19. (Omeomorfismi tra intervalli limitati di \mathbb{R}) Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} . La funzione lineare $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definita da

$$f(x) = (b - a)x + a \tag{1.25}$$

è invertibile e la sua inversa f^{-1} è definita da

$$f^{-1}(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $[0, 1]$ e $[a, b]$. Da notare che, essendo $f(0) = a$ e $f(1) = b$, le restrizioni di f a $[0, 1)$, $(0, 1]$ e $(0, 1)$ sono omeomorfismi tra tali intervalli e $[a, b)$, $(a, b]$ e (a, b) , rispettivamente. Anche la funzione $g : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definita da

$$g(x) = (a - b)x + b \tag{1.26}$$

è un omeomorfismo tra $[0, 1]$ e $[a, b]$ e risulta $g(0) = b$ e $g(1) = a$. Ne segue che le restrizioni di g a $[0, 1)$ e $(0, 1]$ sono omeomorfismi tra tali intervalli e $(a, b]$ e $[a, b)$, rispettivamente. \square

OSSERVAZIONE 1.5.20. Gli omeomorfismi (1.25) e (1.26) sono gli unici omeomorfismi lineari tra $[0, 1]$ e $[a, b]$.

ESEMPIO 1.5.21. (Omeomorfismi tra intervalli non limitati di \mathbb{R}) Si consideri l'intervallo $[a, +\infty)$ di \mathbb{R} . La funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow [a, +\infty)$ definita da

$$f(x) = x + a$$

è invertibile e la sua inversa f^{-1} è definita da

$$f^{-1}(x) = x - a.$$

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $[0, +\infty)$ e $[a, +\infty)$. Da notare che, essendo $f(0) = a$, la restrizione di f a $(0, +\infty)$ è un isomorfismo tra tale intervallo e $(a, +\infty)$. Anche la funzione $g : (-\infty, 0] \rightarrow [a, +\infty)$ definita da

$$g(x) = a - x$$

è un omeomorfismo tra $(-\infty, 0]$ e $[a, +\infty)$ e risulta $g(0) = a$. Ne segue che la restrizione di g a $(-\infty, 0)$ è un isomorfismo tra tale intervallo e $(a, +\infty)$. \square

ESEMPIO 1.5.22. (Omeomorfismi tra intervalli limitati e non limitati di \mathbb{R}) La funzione

$$f : x \in (-1, 1) \rightarrow \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \in \mathbb{R}$$

è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arctan(x) \in (-1, 1).$$

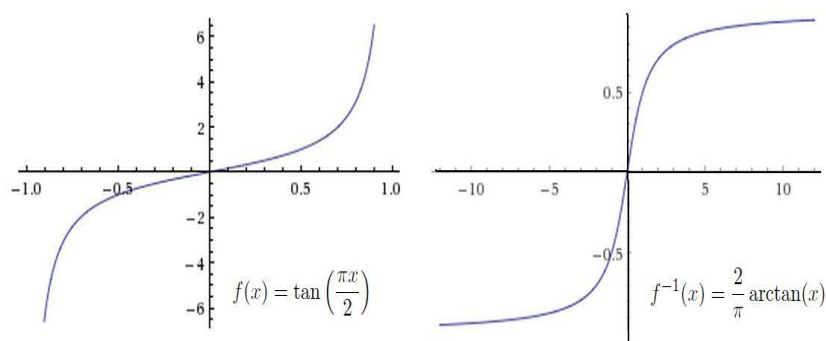


Figura 1.5: Esempio 1.5.22

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $(-1, 1)$ e \mathbb{R} . La restrizione di f a $[0, 1)$ è un omeomorfismo tra $[0, 1)$ e $[0, +\infty)$. La restrizione di f a $(0, 1)$ è un omeomorfismo tra $(0, 1)$ e $(0, +\infty)$. \square

OSSERVAZIONE 1.5.23. (La completezza di uno spazio metrico non è una proprietà topologica) In forza dell'esempio precedente, un intervallo limitato (a, b) è omeomorfo a \mathbb{R} . D'altra parte, come spazi metrici, (a, b) non è completo mentre \mathbb{R} lo è. Questo prova che la completezza di uno spazio metrico, che è una proprietà metrica, non è una proprietà topologica. \square

ESEMPIO 1.5.24. (Omeomorfismi tra intervalli non limitati di \mathbb{R} e \mathbb{R}) Le funzioni biunivoche $\exp : x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x \in (0, +\infty)$ e $\log : x \in (0, +\infty) \rightarrow \log x \in \mathbb{R}$ sono l'una l'inversa dell'altra e continue e, quindi, $(0, +\infty)$ e \mathbb{R} sono omeomorfismi. \square

PROPOSIZIONE 1.5.25. In \mathbb{R} , con la topologia naturale, si ha che:

- intervalli dello stesso tipo sono omeomorfi;
- intervalli del tipo $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ sono tra loro omeomorfi;
- intervalli del tipo (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ sono tra loro omeomorfi e omeomorfi a \mathbb{R} .

DIMOSTRAZIONE. È una semplice conseguenza dei quattro esempi precedenti. \square

ESEMPIO 1.5.26. (Omeomorfismi tra circonferenze e poligoni regolari) Nel piano euclideo \mathbb{R}^2 siano X e Y rispettivamente i punti di una circonferenza e di un poligono regolare con lo stesso centro C .

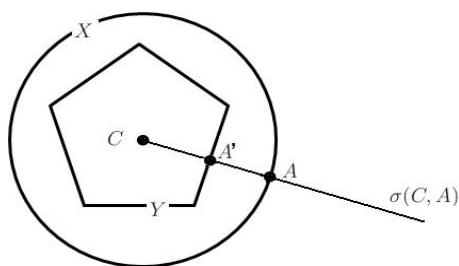


Figura 1.6: Esempio 1.5.26

Per ogni punto A diverso da C , denotiamo con $\sigma(C, A)$ la semiretta di origine C passante per A . La funzione

$$f : A \in X \rightarrow A' = Y \cap \sigma(C, A) \in Y$$

è invertibile e la sua inversa è definita da

$$f^{-1} : A \in Y \rightarrow X \cap \sigma(C, A) \in X.$$

Le funzioni f e f^{-1} trasformano tra loro le basi di X e Y costituite dalle intersezioni dei cerchi aperti di \mathbb{R}^2 con X e Y stessi e, di conseguenza, sono continue. Così f è un omeomorfismo tra X e Y . Allo stesso modo si vede che sono tra loro omeomorfi due poligoni regolari e due circonferenze. \square

ESEMPIO 1.5.27. (Omeomorfismi tra superfici sferiche e poliedri convessi) Generalizzando l'Esempio 1.5.26, si prova che nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 le superfici sferiche e i poliedri convessi appartengono ad una stessa classe di omeomorfismo. Analogamente, si può provare che due superfici sferiche di \mathbb{R}^n sono tra loro omeomorfe. \square

ESEMPIO 1.5.28. (Proiezione stereografica) Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 siano S e Y rispettivamente i punti di una superficie sferica di centro un punto C e di un piano tangente a X in un punto T .

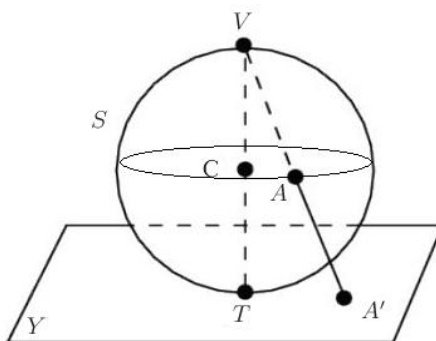


Figura 1.7: Esempio 1.5.28

Siano \mathcal{B}_X la base di X e \mathcal{B}_Y la base di Y ottenute intersecando gli intorni sferici aperti di \mathbb{R}^3 rispettivamente con X e Y . Detto V il punto di S diametralmente opposto a T , poniamo $X = S \setminus \{V\}$ e, per ogni punto $A \in X$, denotiamo con A' il punto di intersezione della retta passante per V e A con il piano Y . La funzione biunivoca

$$f : A \in X \rightarrow A' \in Y \quad (1.27)$$

prende il nome di **proiezione stereografica della sfera**. La proiezione stereografica f e la sua inversa f^{-1} trasformano rispettivamente un elemento di \mathcal{B}_X in un aperto di Y e un elemento di \mathcal{B}_Y in un aperto di X e, di conseguenza, sono continue. Così f è un omeomorfismo tra X e Y . Resta dunque provato che una superficie sferica meno un punto in \mathbb{R}^3 e il piano euclideo \mathbb{R}^2 sono omeomorfi. Se consideriamo la restrizione di f a $S \setminus \{V, T\} = X \setminus \{T\}$ otteniamo un omeomorfismo tra $X \setminus \{T\}$ e $Y \setminus \{T\}$. Abbiamo, così, che una superficie sferica di \mathbb{R}^3 meno due punti è omeomorfa al piano euclideo \mathbb{R}^2 meno un punto. Questi esempi sono

una riprova del fatto che la limitatezza di un sottospazio di \mathbb{R}^n è una proprietà metrica ma non topologica. Per ogni $n > 0$, la proiezione stereografica si può definire, come nel caso $n = 3$, per una superficie sferica di \mathbb{R}^n e, in questo modo, si ottiene un omeomorfismo tra la superficie sferica di \mathbb{R}^n meno un punto (risp. meno due punti) e lo spazio euclideo \mathbb{R}^{n-1} (risp. meno un punto). In particolare si ha che una circonferenza meno un punto è omeomorfa alla retta reale. \square

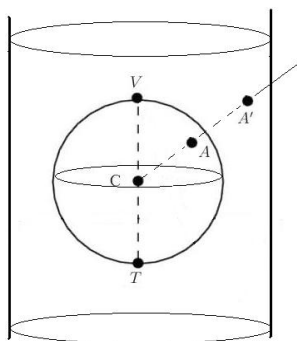


Figura 1.8: Esempio 1.5.29

ESEMPIO 1.5.29. (Omeomorfismi tra superfici sferiche meno due punti e cilindri)
Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 siano X e Y rispettivamente i punti di una superficie sferica S , di centro un punto C , meno due punti V, T e di un cilindro circolare retto (non limitato) Y disposti come in **Figura 1.8**. Siano \mathcal{B}_X la base di X e \mathcal{B}_Y la base di Y ottenute intersecando gli intorni sferici aperti di \mathbb{R}^3 rispettivamente con X e Y . Per ogni punto $A \in X$, denotiamo con A' il punto di intersezione della semiretta di origine C passante per A col cilindro Y . La funzione biunivoca

$$f : A \in X \rightarrow A' \in Y$$

e la sua inversa f^{-1} trasformano rispettivamente un elemento di \mathcal{B}_X in un aperto di Y e un elemento di \mathcal{B}_Y in un aperto di X e, di conseguenza, sono continue.

Così f è un omeomorfismo tra X e Y . Resta dunque provato che una superficie sferica meno due punti in \mathbb{R}^3 e un cilindro circolare sono omeomorfi. \square

ESEMPIO 1.5.30. (Omeomorfismi tra \mathbb{R}^2 meno un punto e \mathbb{R}^2 meno un cerchio chiuso)
Siano X e Y rispettivamente i punti del piano euclideo \mathbb{R}^2 meno un punto $O = (0, 0)$ e quelli di \mathbb{R}^2 meno il cerchio chiuso di centro O e raggio 1. Identifichiamo ogni punto A di \mathbb{R}^2 col segmento orientato $\mathbf{a} = (O, A)$ e consideriamo la funzione biunivoca

$$f : \mathbf{a} \in X \rightarrow \mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \in Y.$$

La funzione f e la sua inversa f^{-1} sono continue, così f è un omeomorfismo tra X e Y . Resta dunque provato che il piano euclideo meno un punto (**piano bucato**) e quello meno un cerchio chiuso sono omeomorfi. Allo stesso modo si vede che, per $n > 2$, \mathbb{R}^n meno un punto e \mathbb{R}^n meno un intorno sferico chiuso sono omeomorfi. \square

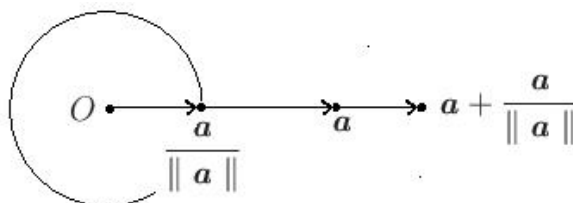


Figura 1.9: Esempio 1.5.30

DEFINIZIONE 1.5.31. (Funzioni aperte e funzioni chiuse) Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici si dice **aperta** se trasforma aperti di X in aperti di Y e si dice **chiusa** se trasforma chiusi di X in chiusi di Y .

Osserviamo esplicitamente che le nozioni di funzione continua, funzione aperta e funzione chiusa sono indipendenti l'una dall'altra.

ESERCIZIO 1.5.32. (Omeomorfismi) Provare che un omeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è una funzione aperta e chiusa. Provare inoltre che :

- $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo $\Leftrightarrow f$ è biunivoca, continua e aperta;
- $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo $\Leftrightarrow f$ è biunivoca, continua e chiusa. \square

ESEMPIO 1.5.33. (Funzioni continue non aperte) La funzione continua $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$, \mathbb{R} con la topologia naturale, non è aperta. Infatti, per esempio, $f(-1, 1) = [0, 1)$, che non è un aperto. \square

ESEMPIO 1.5.34. (Funzioni chiuse, non aperte e non continue) La funzione $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$, \mathbb{R} con la topologia delle semirette sinistre aperte, è chiusa, non aperta e non continua. Infatti, per esempio, $f(-\infty, 1) = [0, +\infty)$, $f^{-1}(-\infty, 1) = [0, 1)$, quindi f non è aperta e non è continua. Risulta, però, $f[a, +\infty) = [0, +\infty)$, se $a \leq 0$, e $f[a, +\infty) = [a^2, +\infty)$, se $a > 0$; cioè f è chiusa. \square

ESEMPIO 1.5.35. Ogni funzione tra uno spazio topologico X e uno spazio Y con la topologia discreta è aperta e chiusa. In questo modo si ottengono esempi di funzioni non continue, aperte e chiuse considerando funzioni non continue di X in Y . Analogamente le funzioni continue di X in Y danno esempi di funzioni continue, aperte e chiuse. Si osservi che queste ultime funzioni, se non sono biunivoche, non possono essere omeomorfismi. \square

ESEMPIO 1.5.36. (Funzioni aperte, chiuse e non continue) Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2 . Allora la funzione identità $a \in (X, \tau_1) \rightarrow a \in (X, \tau_2)$ è aperta e chiusa ma non continua. \square

1.6 Spazi connessi

Sottospazi di \mathbb{R}^3 come le sfere o i poliedri, parlando in modo informale, possono considerarsi figure “*indivisibili*”, costituite cioè da “*un solo pezzo*”. Tale proprietà, per esempio, non può essere attribuita alla figura formata da due facce opposte di un cubo, come si evince dalla Figura 1.10.

La proprietà in questione è intuitivamente una proprietà topologica e può essere formalmente descritta dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.6.1. Uno spazio topologico (X, τ) si dice **connesso** se non è unione di due suoi aperti non vuoti e disgiunti. In tal caso si dice anche che τ è una **topologia connessa**. Uno spazio non connesso si dice **sconnesso**. Un sottoinsieme Y di X si dice **connesso** o **sconnesso** se è tale come sottospazio di X . \square

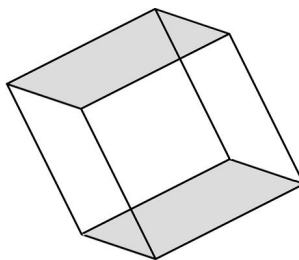


Figura 1.10: Facce opposte di un cubo

Tornando all’osservazione iniziale, è chiaro che, secondo la precedente definizione, la figura costituita da due facce opposte di un cubo in \mathbb{R}^3 è uno spazio sconnesso. Vedremo più avanti che le sfere e i poliedri, come avevamo euristicamente intuito, sono spazi connessi.

ESEMPIO 1.6.2. Le topologie per le quali due arbitrari aperti non vuoti sono ad intersezione non vuota sono connesse. Tali topologie, e i relativi spazi, si dicono **irriducibili**. Tra queste ritroviamo, per esempio, la topologia del tiro a bersaglio, la topologia di \mathbb{R} delle semirette sinistre aperte, la topologia di Zariski di \mathbb{F}^n con \mathbb{F} campo infinito e la topologia cofinita su un insieme infinito. \square

ESERCIZIO 1.6.3. Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2 . Provare che:

- τ_2 connessa $\Rightarrow \tau_1$ connessa,
- τ_1 sconnessa $\Rightarrow \tau_2$ sconnessa. □

PROPOSIZIONE 1.6.4. *Per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti proprietà:*

- X è connesso;
- X non è unione di due chiusi non vuoti e disgiunti;
- X non contiene alcun sottoinsieme proprio e non vuoto che sia aperto e chiuso.

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza di due aperti non vuoti e disgiunti A, A' di X tali che $A \cup A' = X$ equivale all'esistenza di due chiusi non vuoti e disgiunti: $C = \mathcal{C}(A) = A', C' = \mathcal{C}(A') = A$ tali che $C \cup C' = X$. In queste ipotesi, dunque, A e A' sono entrambi insiemi aperti e chiusi. □

ESERCIZIO 1.6.5. Sia Y un sottospazio di uno spazio topologico X . Provare che un sottoinsieme T di Y è connesso in Y se, e solo se, è connesso in X . □

ESERCIZIO 1.6.6. Sia X uno spazio topologico discreto. Provare che X è connesso se, e solo se, contiene un solo punto. □

ESERCIZIO 1.6.7. Provare che lo spazio somma (cfr. **Esempio 1.3.11**) di due spazi topologici è sconnesso. □

PROPOSIZIONE 1.6.8. *Se ogni due punti distinti di uno spazio topologico X appartengono ad un sottospazio connesso di X , allora X è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che X sia sconnesso, esistano cioè due aperti non vuoti e disgiunti A, A' tali che $A \cup A' = X$. Se a, a' sono punti rispettivamente di A e A' , detotiamo con T un sottospazio connesso di X contenente a e a' . Allora risulta

$$(A \cap T) \cap (A' \cap T) = \emptyset, \quad (A \cap T) \cup (A' \cap T) = T,$$

con $A \cap T, A' \cap T \neq \emptyset$. Ne segue che T è sconnesso, un assurdo. □

PROPOSIZIONE 1.6.9. *Siano X uno spazio topologico e Y_1, Y_2 due suoi sottospazi connessi ad intersezione non vuota. Allora $Y_1 \cup Y_2$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Se, per assurdo, $Y = Y_1 \cup Y_2$ fosse sconnesso, esisterebbe un suo sottoinsieme non vuoto T chiuso e aperto. Tale sottoinsieme avrebbe intersezione non vuota con almeno uno tra Y_1 e Y_2 , per esempio con Y_1 . Allora $Y_1 \cap T$ sarebbe un sottospazio non vuoto di Y_1 chiuso e aperto e ciò è assurdo, essendo Y_1 connesso per ipotesi. □

COROLLARIO 1.6.10. *Siano X uno spazio topologico e $\{Y_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottospazi connessi di X ad intersezione non vuota. Allora*

$$Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$$

è un sottospazio connesso.

DIMOSTRAZIONE. Siano c un punto in $\bigcap_{j \in J} Y_j$ e a, b punti di Y tali che $a \in Y_s, b \in Y_t, s, t \in J$. Allora $Y_s \cup Y_t$, essendo Y_s, Y_t ad intersezione non vuota, è un connesso per a, b contenuto in Y e ciò prova che Y è connesso di X . \square

ESERCIZIO 1.6.11. Siano X uno spazio topologico, $\{Y_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottospazi connessi di X ed esista $k \in J$ tale che $Y_k \cap Y_j$ è connesso per ogni $j \in J$. Allora,

$$Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$$

è un sottospazio connesso di X . \square

PROPOSIZIONE 1.6.12. (La chiusura di un connesso è connessa) *Siano X uno spazio topologico e Y un suo sottospazio connesso. Allora la chiusura di Y è connessa.*

DIMOSTRAZIONE. Se, per assurdo, \bar{Y} fosse sconnesso, esisterebbero due aperti A_1, A_2 di X tali che

$$(A_1 \cap \bar{Y}) \cup (A_2 \cap \bar{Y}) = \bar{Y}, \quad (A_1 \cap \bar{Y}) \cap (A_2 \cap \bar{Y}) = \emptyset,$$

con $A_1 \cap \bar{Y}, A_2 \cap \bar{Y}$ non vuoti e avremmo

$$(A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y) = Y, \quad (A_1 \cap Y) \cap (A_2 \cap Y) = \emptyset.$$

Ora, un punto $y_1 \in A_1 \cap \bar{Y}$ è di aderenza per Y , quindi Y contiene un punto $a_1 \in A_1$, essendo A_1 un aperto per y_1 , e risulta $A_1 \cap Y \neq \emptyset$. In modo analogo si vede che $A_2 \cap Y \neq \emptyset$. Le ultime due osservazioni provano che Y è sconnesso, il che è contro le ipotesi. \square

PROPOSIZIONE 1.6.13. *Siano X uno spazio topologico e Y un suo sottospazio connesso. Allora ogni sottospazio T di X tale che $Y \subseteq T \subseteq \bar{Y}$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. La chiusura di Y nel sottospazio T è uguale a T e l'asserto segue dalla proposizione precedente. \square

PROPOSIZIONE 1.6.14. (La connessione si conserva per continuità) *Siano $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua e X uno spazio connesso. Allora $f(X)$ è un sottospazio connesso di Y ; in particolare, se f è suriettiva, Y è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo $f(X)$ sconnesso e sia $T \subseteq f(X)$ un sottospazio di $f(X)$ aperto e chiuso, con $\emptyset \neq T \neq f(X)$. Allora X risulta sconnesso, contenendo $f^{-1}(T)$ che è non vuoto, diverso da X , aperto e chiuso. Ciò è contro le ipotesi e l'asserto è provato. \square

Osserviamo esplicitamente che, in forza della proposizione precedente, abbiamo che **la connessione è invariante per omeomorfismi** e vale il seguente corollario.

COROLLARIO 1.6.15. *Una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ trasforma sottospazi connessi di X in sottospazi connessi di Y .* \square

1.6.1 Connessione in \mathbb{R} e \mathbb{R}^n e connessione per poligonalità

Nel presente paragrafo supporremo \mathbb{R} e \mathbb{R}^n dotati della topologia naturale.

PROPOSIZIONE 1.6.16. *Ogni intervallo chiuso $[a, b]$ di \mathbb{R} è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, supponiamo $[a, b]$ unione di due suoi chiusi C_1, C_2 non vuoti e disgiunti e supponiamo $b \in C_2$. Notiamo esplicitamente che nelle nostre ipotesi C_1, C_2 sono chiusi anche in \mathbb{R} . Allora b è un maggiorante di C_1 e l'estremo superiore c di C_1 , essendo di aderenza per C_1 , appartiene a C_1 ed è diverso da b . Ne segue che $(c, b] \subseteq C_2$, quindi c , risultando aderente a C_2 , appartiene a C_2 ; un assurdo, essendo C_1, C_2 insiemi disgiunti. \square

PROPOSIZIONE 1.6.17. (Connessi di \mathbb{R}) *I sottospazi connessi di \mathbb{R} , con la topologia naturale, sono tutti e soli gli intervalli.*

DIMOSTRAZIONE. Un intervallo di \mathbb{R} è connesso in forza delle **Proposizioni 1.6.8 e 1.6.16**. Ora, consideriamo un sottospazio connesso di \mathbb{R} e, per assurdo, supponiamo che non sia un intervallo. Allora esistono due punti $a, b \in Y$ e un punto $z \notin Y$ tali che $a < z < b$. Ne segue che

$$Y = (Y \cap (-\infty, z)) \cup (Y \cap (z, +\infty)),$$

un assurdo perché Y è connesso. \square

ESERCIZIO 1.6.18. Siano J un intervallo di \mathbb{R} e c un punto di J diverso da eventuali estremi di J . Provare che $J \setminus \{c\}$ è un sottospazio sconnesso di \mathbb{R} . \square

PROPOSIZIONE 1.6.19. *Gli intervalli $[0, 1]$, $[0, 1)$ e $(0, 1)$ di \mathbb{R} sono a due a due non omeomorfi. Ne segue che ogni intervallo di \mathbb{R} (e quindi ogni sottospazio connesso di \mathbb{R}) è omeomorfo ad uno degli intervalli $[0, 1]$, $[0, 1)$ o $(0, 1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se esistesse un omeomorfismo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$, la restrizione di f all'intervallo $(0, 1) = [0, 1] \setminus \{0, 1\}$ sarebbe un omeomorfismo tra $(0, 1)$ e $f(0, 1) = [0, 1] \setminus \{f(0), f(1)\}$ e ciò è assurdo perché $(0, 1)$ è connesso mentre $f(0, 1)$ non lo è. In modo analogo si prova che $[0, 1]$ e $[0, 1)$ non sono omeomorfi a $(0, 1)$. La seconda parte dell'asserto segue dalle **Proposizioni 1.5.25 e 1.6.17**. \square

Ricordiamo che, se \mathbf{a}, \mathbf{b} sono due elementi di \mathbb{R}^n , la retta ℓ per \mathbf{a} e \mathbf{b} ha equazione parametrica

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{b} - \mathbf{a})t + \mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

e quando t varia in $[0, 1]$ il punto corrispondente $\mathbf{x}(t)$ descrive il segmento di estremi \mathbf{a}, \mathbf{b} . Poiché la funzione

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{x}(t) \in \ell$$

è un omeomorfismo tra \mathbb{R} (con la topologia naturale) e ℓ (con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^n), la **Proposizione 1.6.17** può riformularsi nel seguente modo (cfr. **Proposizione 1.5.17**).

PROPOSIZIONE 1.6.20. (Connessi di una retta euclidea) *I sottospazi connessi di una retta di \mathbb{R}^n , con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^n , sono la retta stessa, le semirette (aperte e chiuse) e i segmenti (aperti, chiusi, semiaperti).*

ESEMPIO 1.6.21. (Insiemi convessi) Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^n si dice **convesso** se il segmento di estremi due suoi punti distinti qualsiasi è contenuto in C . Dalle **Proposizioni 1.6.8, 1.6.20** segue che *i sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n sono connessi*. In particolare *risultano connessi, perché convessi, i seguenti sottoinsiemi: \mathbb{R}^n e i suoi sottospazi affini, i semispazi (aperti e chiusi), le sfere (aperte e chiuse), i poliedri regolari (aperti e chiusi) di \mathbb{R}^3* . Si osservi che nel caso $n = 1$ i sottoinsiemi convessi sono tutti e soli gli intervalli. \square

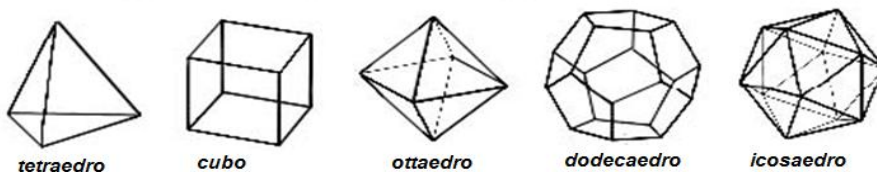


Figura 1.11: I cinque poliedri regolari

ESEMPIO 1.6.22. (Le superfici sferiche sono connesse) La circonferenza S^1 di centro l'origine e raggio 1 in \mathbb{R}^2 è immagine della funzione continua

$$t \in [0, 2\pi] \rightarrow (\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora, in forza delle **Proposizioni 1.6.14 e 1.6.16**, S^1 , e quindi tutte le circonferenze di \mathbb{R}^2 , sono connesse. Ora, se tagliamo una superficie sferica S^{n-1} di \mathbb{R}^n , $n > 2$, con un iperpiano otteniamo una superficie sferica di \mathbb{R}^{n-1} . Usando questa osservazione e la **Proposizione 1.6.8** è facile provare per induzione su n che S^n è connessa. Si può provare che S^n , $n > 1$, è connessa anche osservando che S^n è la chiusura di $S^n \setminus \{A\}$, con A punto di S^n . Infatti, $S^n \setminus \{A\}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n (cfr. **Esempio 1.5.28**), che è connesso, e la chiusura di un insieme connesso è connesso (cfr. **Proposizione 1.6.12**). \square

ESERCIZIO 1.6.23. Provare che, nel piano euclideo, un segmento chiuso e una circonferenza non sono omeomorfi. \square

ESERCIZIO 1.6.24. Sia X l'unione di due circonferenze del piano euclideo aventi in comune esattamente un punto. Provare che X non è omeomorfo ad una circonferenza. \square

ESEMPIO 1.6.25. (Poligonalità in \mathbb{R}^n) Si chiama **poligonale** in \mathbb{R}^n l'unione di una successione finita di segmenti s_1, s_2, \dots, s_m con la proprietà che il secondo estremo di s_j è uguale al primo estremo di s_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, m-1$. In forza delle **Proposizioni 1.6.8, 1.6.20**, le poligonali risultano insiemi connessi. \square

DEFINIZIONE 1.6.26. (Connessione per poligonali) Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n si dice **connesso per poligonali** se due suoi arbitrari punti distinti sono estremi di una poligonale contenuta nell'insieme. \square

Risultano, per esempio, connessi per poligonali gli insiemi convessi ed i poliedri. Non sono connessi per poligonali, pur essendo connessi, le superfici sferiche. La **Proposizione 1.6.8** e il fatto che le poligonali sono insiemi connessi assicurano che *ogni insieme connesso per poligonali è connesso*. Esistono, però, insiemi connessi che non sono connessi per poligonali. Le due nozioni, quella di connessione e quella di connessione per poligonali, coincidono nel caso degli aperti di \mathbb{R}^n , come prova il prossimo risultato.

PROPOSIZIONE 1.6.27. *Un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , con la topologia naturale, è connesso per poligonali se, e solo se, è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. La prima implicazione è conseguenza dell'osservazione precedente. Ora, per assurdo, sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n e supponiamo che contenga due punti x, y che non sono estremi di una poligonale contenuta in A . Consideriamo l'insieme A_1 dei punti di A congiungibili ad x mediante una poligonale contenuta in A e l'insieme $A_2 = A \setminus A_1$. Proviamo che A_1 , che è non vuoto perché contiene x , è aperto. Infatti, un arbitrario punto $a \in A_1$ è centro di un intorno sferico U contenuto in A , essendo A aperto, e, per ogni punto $b \in U$,

il segmento di vertici a, b è contenuto in U . Ne segue che b è congiungibile a x mediante una poligonale e , di conseguenza, U è contenuto in A_1 e A_1 è aperto. Allo stesso modo si vede che A_2 , che è non vuoto perché contiene y , è aperto. Allora A è unione dei due aperti non vuoti e disgiunti A_1 e A_2 e ciò è assurdo. Ne segue che A è connesso per poligonali. \square

1.6.2 Componenti connesse

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Se, per ogni due punti $a, b \in X$, si pone

$$a \stackrel{c}{\sim} b \Leftrightarrow a, b \text{ appartengono ad uno stesso sottospazio connesso di } X \quad (1.28)$$

si ottiene, come subito si prova, una relazione di equivalenza su X . Ogni classe d'equivalenza rispetto a questa relazione si chiama **componente connessa** di X . La componente connessa di X contenente un fissato punto $a \in X$ si chiama **componente connessa di** a e si denota con $k(a)$.

PROPOSIZIONE 1.6.28. *Per uno spazio topologico X , valgono le seguenti proprietà:*

- X possiede un'unica componente connessa se, e solo se, è connesso.
- Ogni componente connessa di X è un connesso;
- un connesso Y contenente un punto $a \in X$ è contenuto nella componente connessa di a ;
- la componente connessa di un punto $a \in X$ è uguale all'unione di tutti i sottospazi connessi di X contenenti a ;
- ogni componente connessa di X è un chiuso.

DIMOSTRAZIONE. È lasciata per esercizio al Lettore. \square

ESEMPIO 1.6.29. ($GL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{R})$) Il gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$, cioè il gruppo delle matrici quadrate invertibili a coefficienti reali, è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n,n}$ con la topologia naturale. La funzione

$$f : A \in GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \det A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è continua e suriettiva, da cui segue che $GL(n, \mathbb{R})$ non è connesso. È facile rendersi conto che $GL(n, \mathbb{R})$ possiede esattamente due componenti connesse: una $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ è l'insieme delle matrici a determinante positivo, l'altra $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ quella delle matrici a determinante negativo. Il gruppo lineare speciale $SL(n, \mathbb{R})$, cioè il gruppo delle matrici in $GL(n, \mathbb{R})$ a determinante uguale a 1, è contenuto nella componente connessa $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ di $GL(n, \mathbb{R})$ ed è connesso. \square

ESERCIZIO 1.6.30. Calcolare le componenti connesse dei seguenti spazi:

- \mathbb{R} meno un numero finito k di suoi punti;
- \mathbb{R}^2 meno un numero finito k di suoi punti;
- \mathbb{R}^2 meno i punti di una iperbole;
- \mathbb{R}^2 meno i punti di una ellisse;
- \mathbb{R}^2 meno i punti di una parabola;
- \mathbb{R}^n meno i punti di un iperpiano;
- \mathbb{R}^n meno i punti di un sottospazio affine di dimensione k , $0 < k < n - 1$. \square

ESERCIZIO 1.6.31. Provare che le componenti connesse di \mathbb{Z} , considerato come sottospazio di \mathbb{R} , sono i singleton dei suoi punti. \square

1.7 Spazi compatti

Molte proprietà topologiche dei sottospazi chiusi e limitati di \mathbb{R}^n , con la topologia naturale, dipendono dalla cosiddetta proprietà di *compattezza*. Tale proprietà, che definisce un'ampia e importante classe di spazi, sarà introdotta e discussa in questo paragrafo.

DEFINIZIONE 1.7.1. (Spazi compatti) Uno spazio topologico (X, τ) si dice **compatto** se ogni suo ricoprimento di aperti contiene un sottoricoprimento finito. In altre parole, per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ di aperti di X tale che

$$X = \bigcup_{j \in J} A_j$$

esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$X = \bigcup_{i \in F} A_i.$$

In tal caso si dice anche che τ è una **topologia compatta**. Un sottoinsieme Y di X si dice **compatto** se è compatto come sottospazio di X , cioè se per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ di aperti di X tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$$

esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i.$$

\square

ESERCIZIO 1.7.2. Provare che la topologia discreta su un insieme X è compatta se, e solo se, X è finito. Provare, inoltre, che la topologia cofinita su X è compatta. \square

ESEMPIO 1.7.3. I sottoinsiemi finiti di un qualunque spazio topologico sono compatti; in particolare sono compatti i punti. \square

ESERCIZIO 1.7.4. Sia $\{x_n\}$ una successione convergente in uno spazio topologico X avente limite ℓ e sia $T = \{x \in X : x = x_k, \text{ per qualche intero } k\} \cup \{\ell\}$. Provare che T è un sottospazio compatto di X . \square

ESEMPIO 1.7.5. (\mathbb{R}^n non è compatto) L'unione di un numero finito di interni sferici, con centro un fissato punto $a \in \mathbb{R}^n$, coincide con l'intorno sferico di raggio massimo. Ne segue che il ricoprimento di aperti di \mathbb{R}^n formato da tutti gli interni sferici di centro a non contiene un sottoricoprimento finito e, quindi, \mathbb{R}^n non è compatto. Allo stesso modo si prova che uno spazio metrico non limitato non è compatto. \square

ESEMPIO 1.7.6. (I sottospazi non limitati di uno spazio metrico non sono compatti) L'esempio precedente si generalizza nel seguente modo. Un sottospazio di uno spazio metrico X è limitato se è limitata la metrica in essa indotta da X o, equivalentemente, se è contenuto in un intorno sferico chiuso di X . Allora, se Y è un sottospazio non limitato di X , il ricoprimento di Y formato da tutti gli interni sferici di centro un fissato punto $a \in X$ non contiene un sottoricoprimento finito di Y e, quindi, Y non è compatto. In particolare **sono non compatti i sottospazi non limitati di \mathbb{R}^n** . \square

ESERCIZIO 1.7.7. Provare che lo spazio somma (cfr. **Esempio 1.3.11**) di due spazi topologici compatti è compatto. \square

ESERCIZIO 1.7.8. Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2 . Provare che:

- τ_2 compatta $\Rightarrow \tau_1$ compatta,
- τ_1 non compatta $\Rightarrow \tau_2$ non compatta. \square

DEFINIZIONE 1.7.9. Si dice che una famiglia di chiusi di uno spazio topologico ha la **proprietà dell'intersezione finita** se ogni sua sottofamiglia finita è ad intersezione non vuota. \square

PROPOSIZIONE 1.7.10. (Una caratterizzazione dei compatti) Uno spazio topologico X è compatto se, e solo se, ogni sua famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita è ad intersezione non vuota.

DIMOSTRAZIONE. Se X è compatto e $\mathfrak{F} = \{C_i\}_{i \in I}$ una sua famiglia di chiusi tale che $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, risulta

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}(C_i) = \mathcal{C}\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) = \mathcal{C}(\emptyset) = X$$

e, per la compattezza di X , esiste un sottoinsieme finito F di I tale che

$$X = \bigcup_{f \in F} \mathcal{C}(C_f) = \mathcal{C}\left(\bigcap_{f \in F} C_f\right).$$

Allora $\bigcap_{f \in F} C_f = \emptyset$ e, quindi, \mathfrak{F} non ha la proprietà dell'intersezione finita. Se ogni famiglia di chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita è ad intersezione non vuota e se $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di aperti di X , risulta

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}(A_i) = \emptyset$$

e, quindi, la famiglia di chiusi $\{\mathcal{C}(A_i)\}_{i \in I}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Allora esiste un sottoinsieme finito F di I tale che

$$\bigcap_{f \in F} \mathcal{C}(A_f) = \mathcal{C}\left(\bigcup_{f \in F} A_f\right) = \emptyset$$

e risulta $X = \bigcup_{f \in F} A_f$. Così X è compatto e l'asserto è provato. \square

PROPOSIZIONE 1.7.11. (I chiusi di un compatto sono compatti) Ogni sottoinsieme chiuso Y di uno spazio compatto X è compatto.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di aperti di X tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j,$$

X risulta unione dell'aperto $X \setminus Y$ e della famiglia $\{A_j\}_{j \in J}$:

$$X = (X \setminus Y) \cup \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right).$$

Allora, essendo X compatto, esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$X = (X \setminus Y) \cup \left(\bigcup_{j \in F} A_j\right),$$

cioè

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in F} A_j$$

e Y è compatto. □

OSSERVAZIONE 1.7.12. In generale, i sottospazi compatti di uno spazio topologico non sono necessariamente chiusi. Per esempio, i punti di \mathbb{R} , con la topologia delle semirette sinistre aperte, sono compatti ma non sono chiusi. Questa proprietà, invece, è vera nel caso degli spazi T_2 , come fra poco mostreremo. □

LEMMA 1.7.13. *Sia X uno spazio T_2 e Y un suo sottospazio compatto. Allora, per ogni punto $x \in X \setminus Y$, esistono un aperto U_x contenente Y e un aperto V_x contenente x ad intersezione vuota.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $y \in Y$, esistono un intorno aperto A_y di y e un intorno aperto V_x^y di x ad intersezione vuota, essendo X uno spazio T_2 . Allora è

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} A_y$$

e, per la compattezza di Y , esiste un insieme finito $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ di punti di Y tali che

$$Y \subseteq A_{y_1} \cup A_{y_2} \cup \dots \cup A_{y_n} = U_x.$$

Ora, considerato l'aperto

$$V_x = V_x^{y_1} \cap V_x^{y_2} \cap \dots \cap V_x^{y_n} \ni x,$$

risulta $U_x \cap V_x = \emptyset$. Infatti, se esistesse un punto $z \in U_x \cap V_x$, avremmo $z \in V_x^{y_j} \cap A_{y_j}$, per qualche intero j ; un assurdo. □

PROPOSIZIONE 1.7.14. (I compatti di uno spazio T_2 sono chiusi) *Sia X uno spazio T_2 . Allora ogni sottospazio compatto Y di X è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. In forza del lemma precedente, ogni punto di $X \setminus Y$ possiede un intorno disgiunto da Y , cioè $X \setminus Y$ è aperto. Ne segue che Y è chiuso. □

OSSERVAZIONE 1.7.15. (Assioma di separazione T_3) In forza della **Proposizione 1.7.11** e del **Lemma 1.7.13**, in uno spazio X compatto e T_2 vale la proprietà:

- per ogni chiuso C e per ogni $x \in X \setminus C$ esistono un aperto U_x contenente C e un aperto V_x contenente x ad intersezione vuota.

Gli spazi topologici T_1 che verificano la precedente proprietà si dicono **spazi T_3** , o **regolari**. Quanto appena osservato assicura che **uno spazio compatto e T_2 è anche T_3** . □

La proprietà di separazione per le coppie punto-compatto che vale negli spazi T_2 (cfr. **Lemma 1.7.13**) si può estendere alle coppie di sottospazi compatti, come proveremo nella proposizione che segue.

PROPOSIZIONE 1.7.16. *Sia X uno spazio T_2 e Y_1, Y_2 due suoi sottospazi compatti e disgiunti. Allora esistono un aperto V contenente Y_1 e un aperto U contenente Y_2 ad intersezione vuota.*

DIMOSTRAZIONE. In forza del **Lemma 1.7.13**, per ogni punto $x \in Y_1$, esistono un aperto U_x contenente Y_2 e un aperto V_x contenente x ad intersezione vuota. Allora è

$$Y_1 \subseteq \bigcup_{x \in Y_1} V_x$$

e, per la compattezza di Y_1 , esiste un insieme finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di punti di Y_1 tali che

$$Y_1 \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n} = V.$$

Ora, considerato l'aperto

$$U = U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_n} \supseteq Y_2,$$

risulta $U \cap V = \emptyset$. Infatti, se esistesse un punto $z \in U \cap V$, avremmo $z \in V_{x_j} \cap U_{x_j}$, per qualche intero j ; un assurdo. \square

OSSERVAZIONE 1.7.17. (Assioma di separazione T_4) In forza delle **Proposizioni 1.7.11 e 1.7.16**, in uno spazio X compatto e T_2 vale la proprietà:

- per ogni coppia di chiusi disgiunti C_1, C_2 esistono un aperto V contenente C_1 e un aperto U contenente C_2 ad intersezione vuota.

Gli spazi topologici T_1 che verificano la precedente proprietà si dicono **spazi T_4 , o normali**. È chiaro che ogni spazio T_4 è anche T_3 . Quanto prima osservato assicura che **uno spazio compatto e T_2 è anche T_4** . \square

PROPOSIZIONE 1.7.18. (Teorema di B.Bolzano e K.Weierstrass) *Ogni sottoinsieme infinito Y di uno spazio compatto X ha almeno un punto di accumulazione.*

DIMOSTRAZIONE. Si supponga, per assurdo, che Y sia privo di punti di accumulazione e, per ogni punto $x \in X$ si consideri un aperto A_x per x tale che $Y \cap A_x = \emptyset$ oppure $Y \cap A_x = \{x\}$. Allora, per la compattezza di X , esiste un numero finito di suoi punti x_1, x_2, \dots, x_n tali che

$$X = A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_n},$$

e quindi

$$Y = Y \cap X = Y \cap (A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_n}) = (Y \cap A_{x_1}) \cup (Y \cap A_{x_2}) \cup \dots \cup (Y \cap A_{x_n}).$$

Ora, poiché $Y \cap A_{x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, contiene al più un elemento, Y risulta finito; un assurdo. \square

PROPOSIZIONE 1.7.19. *Sia X uno spazio compatto verificante il primo assioma di numerabilità. Allora ogni successione di punti di X ammette una sottosuccessione convergente (gli spazi con questa proprietà si dicono **compatti per successioni**).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di X e sia T l'insieme dei suoi punti, cioè $T = \{x \in X : x = x_k, \text{ per qualche intero } k\}$. Possiamo supporre che T sia infinito perchè nel caso contrario $\{x_n\}$ è definitivamente costante e quindi ha una sottosuccessione convergente. Ora, in forza della proposizione precedente, T possiede almeno un punto di accumulazione a e possiamo considerare un sistema fondamentale numerabile di intorni $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ di tale punto. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, poiché $V_k = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ è un intorno di a , esiste un punto $x_{n_k} \in V_k$ e risulta

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots \supseteq V_k \supseteq \dots$$

Ne segue facilmente che la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ converge ad a . \square

PROPOSIZIONE 1.7.20. (La compattezza si conserva per continuità) *Siano $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua e X uno spazio compatto. Allora $f(X)$ è un sottospazio compatto di Y ; in particolare, se f è suriettiva, Y è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\{A'_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di aperti di $f(X)$, essendo f continua, la famiglia $\{A_i = f^{-1}(A'_i)\}_{i \in I}$ risulta un ricoprimento di aperti di X e da questo, per la compattezza di X , se ne può estrarre uno finito $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}\}$. Allora si ha subito che $\{A'_{i_1}, A'_{i_2}, \dots, A'_{i_n}\}$ è un ricoprimento di $f(X)$ e l'asserto è provato. \square

Osserviamo esplicitamente che, in forza della proposizione precedente, abbiamo che **la compattezza è invariante per omeomorfismi** e che **una funzione continua trasforma sottospazi compatti in sottospazi compatti**.

PROPOSIZIONE 1.7.21. *Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua di uno spazio compatto X in uno di Hausdorff Y . Allora f è chiusa. In particolare, se f è biunivoca, è un omeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Un chiuso C di X è compatto, per la compattezza di X . Allora $f(C)$ è un compatto di uno spazio T_2 e quindi è chiuso. \square

1.8 Prodotti

Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici, notazione che manterremo in tutto il paragrafo, e poniamo

$$\mathcal{B} = \tau_1 \times \tau_2 = \{A_1 \times A_2 \subseteq X_1 \times X_2 \text{ con } A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}.$$

La famiglia \mathcal{B} è un ricoprimento di $X_1 \times X_2$ e l'intersezione di due suoi elementi $A_1 \times A_2, A'_1 \times A'_2$ è ancora un elemento di \mathcal{B} , risultando

$$(A_1 \times A_2) \cap (A'_1 \times A'_2) = (A_1 \cap A'_1) \times (A_2 \cap A'_2).$$

Ne segue che \mathcal{B} verifica gli assiomi delle basi e, quindi (cfr. **Proposizione 1.3.27**), esiste un'unica topologia su $X_1 \times X_2$ che ammette \mathcal{B} come base.

DEFINIZIONE 1.8.1. (Spazio prodotto) L'unica topologia τ sul prodotto $X_1 \times X_2$ dei sostegni di due spazi topologici $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ che ammette $\mathcal{B} = \tau_1 \times \tau_2$ come base prende il nome di **topologia prodotto di τ_1 e τ_2** . Gli aperti della base \mathcal{B} si dicono **aperti elementari**. Lo spazio topologico $X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, \tau)$ prende il nome di **spazio prodotto di X_1 per X_2** . Le funzioni

$$p_{X_j} : (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2 \rightarrow a_j \in X_j, \quad j = 1, 2,$$

prendono il nome di **proiezioni di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2** , rispettivamente. \square

Nel seguito denoteremo semplicemente con p_j la proiezione canonica p_{X_j} , $j = 1, 2$.

PROPOSIZIONE 1.8.2. Siano \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 basi rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2 . Allora la famiglia

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

è una base per lo spazio prodotto $X_1 \times X_2$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli elementi di $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ sono aperti di $X_1 \times X_2$, basta provare che ogni aperto elementare di $X_1 \times X_2$ è unione di elementi di $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. Se, dunque, $A_1 \times A_2$ è un aperto elementare con

$$A_1 = \bigcup_{i \in I} B_i^1 \quad \text{e} \quad A_2 = \bigcup_{j \in J} B_j^2, \quad \text{con } B_i^1 \in \mathcal{B}_1, B_j^2 \in \mathcal{B}_2, (i, j) \in I \times J,$$

risulta

$$A_1 \times A_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_i^1 \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j^2 \right) = \bigcup_{(i, j) \in I \times J} (B_i^1 \times B_j^2)$$

e l'asserto è provato. \square

ESERCIZIO 1.8.3. Siano x_1 e x_2 punti rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2 . Siano $\mathcal{U}_1(x_1)$ e $\mathcal{U}_2(x_2)$ sistemi fondamentali d'intorni rispettivamente di x_1 in X_1 e x_2 in X_2 . Provare che la famiglia

$$\mathcal{U}(x_1, x_2) = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{U}_1(x_1), U_2 \in \mathcal{U}_2(x_2)\}$$

è un sistema fondamentale d'intorni di (x_1, x_2) nello spazio prodotto $X_1 \times X_2$. Provare anche che, se \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 sono sistemi fondamentali d'intorni rispettivamente di X_1 e X_2 , allora

$$\mathcal{U} = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2\}$$

è un sistema fondamentale di intorni del prodotto $X_1 \times X_2$. \square

OSSERVAZIONE 1.8.4. ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^2) Il prodotto cartesiano di due intervalli limitati di \mathbb{R} , con la topologia naturale, è un sottospazio di \mathbb{R}^2 , con la topologia naturale, che prende il nome di **rettangolo**. Nel caso gli intervalli in questione abbiano la stessa lunghezza si parla ovviamente di **quadrato**. Non è difficile provare che valgono le seguenti proprietà:

- un rettangolo prodotto di intervalli aperti (risp. chiusi) è un aperto (risp. chiuso) di \mathbb{R}^2 e, in questo caso, si parla di **rettangolo aperto** (risp. **chiuso**);
- i rettangoli aperti costituiscono una base di \mathbb{R}^2 ;
- i quadrati aperti costituiscono una base di \mathbb{R}^2 .

Ne segue che **Il prodotto** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **è omeomorfo a** \mathbb{R}^2 . \square

PROPOSIZIONE 1.8.5. *Le proiezioni*

$$p_j : (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2 \rightarrow a_j \in X_j ,$$

$j = 1, 2$, sono funzioni continue e aperte. Inoltre, la topologia prodotto è la topologia meno fine di $X_1 \times X_2$ per cui le proiezioni risultano continue.

DIMOSTRAZIONE. La proiezione p_1 trasforma un aperto $A_1 \times A_2$ della base \mathcal{B} nell'aperto A_1 di X_1 e la controimmagine in p_1 di un aperto A_1 di X_1 è l'aperto $A_1 \times X_2$ di $X_1 \times X_2$. Ne segue che p_1 è continua e aperta e in modo analogo si prova che ciò è vero anche per p_2 . Sia ora σ una topologia di $X_1 \times X_2$ rispetto alla quale le due proiezioni sono continue. Allora, per $i = 1, 2$, se A_i è un aperto di X_i , $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$ e $p_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2$ sono aperti di σ . Ne segue che $A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2)$ è un aperto di σ e da ciò segue subito che σ è più fine della topologia prodotto di $X_1 \times X_2$. \square

ESEMPIO 1.8.6. (Le proiezioni non sono chiuse) In $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (cfr. **Esempio 1.8.4**), con la topologia naturale, si consideri il sottoinsieme

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 = 0\} \text{ (iperbole equilatera) .}$$

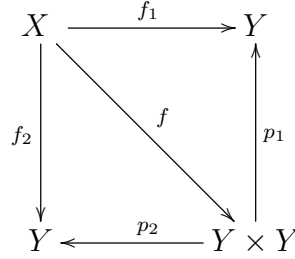


Figura 1.13: Corollario 1.8.8

PROPOSIZIONE 1.8.9. *Siano Y_1, Y_2 sottospazi rispettivamente degli spazi topologici X_1, X_2 . Allora la topologia indotta da $X_1 \times X_2$ su $Y_1 \times Y_2$ coincide con il prodotto delle topologie indotte su Y_1 e Y_2 rispettivamente da X_1 e X_2 .*

DIMOSTRAZIONE. Un aperto T di $Y_1 \times Y_2$ con la topologia indotta da $X_1 \times X_2$ è del tipo $(Y_1 \times Y_2) \cap A$, con A aperto nel prodotto $X_1 \times X_2$, per cui

$$A = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i^1 \times A_j^2),$$

con A_i^1 aperto di X_1 e A_j^2 aperto di X_2 , per ogni $i \in I, j \in J$. Allora risulta

$$\begin{aligned}
 T &= (Y_1 \times Y_2) \cap A = (Y_1 \times Y_2) \cap \left(\bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i^1 \times A_j^2) \right) \\
 &= \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (Y_1 \times Y_2) \cap (A_i^1 \times A_j^2) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (Y_1 \cap A_i^1) \times (Y_2 \cap A_j^2)
 \end{aligned}$$

da cui si ha che T è aperto nel prodotto delle topologie indotte su Y_1 e Y_2 rispettivamente da X_1 e X_2 . Le precedenti uguaglianze, lette a ritroso, provano la seconda parte dell'asserto. \square

ESERCIZIO 1.8.10. Siano a e b punti rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2 . Provare che le funzioni

$$(x_1, b) \in X_1 \times \{b\} \rightarrow x_1 \in X_1, \quad (a, x_2) \in \{a\} \times X_2 \rightarrow x_2 \in X_2,$$

restrizioni a $X_1 \times \{b\}$ e $\{a\} \times X_2$ delle proiezioni canoniche p_1, p_2 di $X_1 \times X_2$ rispettivamente su X_1 e X_2 , sono omeomorfismi. \square

PROPOSIZIONE 1.8.11. (Prodotti di connessi) *Il prodotto di due spazi topologici X_1, X_2 è connesso se, e solo se, X_1 e X_2 sono connessi.*

DIMOSTRAZIONE. Le proiezioni canoniche di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2 sono continue e suriettive e quindi, se $X_1 \times X_2$ è connesso, sono connessi anche X_1 e X_2 . Supponiamo ora che X_1 e X_2 siano connessi e consideriamo due punti $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ di $X_1 \times X_2$. In forza dell'**Esercizio 1.8.10**, i sottospazi $X_1 \times \{b_2\}, \{a_1\} \times X_2$ sono connessi e, in più, hanno in comune il punto (a_1, b_2) . Allora $(X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{a_1\} \times X_2)$ è un connesso contenente i punti $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ e da ciò segue che $X_1 \times X_2$ è connesso. \square

PROPOSIZIONE 1.8.12. (Prodotti di compatti) *Il prodotto di due spazi topologici X_1, X_2 è compatto se, e solo se, X_1 e X_2 sono compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Le proiezioni canoniche di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2 sono continue e suriettive e quindi, se $X_1 \times X_2$ è compatto, sono compatti anche X_1 e X_2 . Siano ora X_1, X_2 due spazi topologici compatti e $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento di aperti del loro prodotto $X_1 \times X_2$. Per ogni $j \in J$, l'aperto A_j di $X_1 \times X_2$ è del tipo

$$A_j = \bigcup_{t \in T_j} U_t \times V_t,$$

ove U_t, V_t sono aperti rispettivamente di X_1, X_2 e T_j è un insieme. Posto, inoltre,

$$T = \bigcup_{j \in J} T_j,$$

la famiglia

$$\mathcal{F} = \{U_t \times V_t\}_{t \in T}$$

è un ricoprimento di aperti di $X_1 \times X_2$. Per ogni $x \in X_1$, risulta

$$\{x\} \times X_2 \subseteq X_1 \times X_2 = \bigcup_{t \in T} U_t \times V_t$$

e, essendo $\{x\} \times X_2$ compatto, perché omeomorfo a X_2 , esiste un sottoinsieme finito $T(x)$ di T tale che

$$\{x\} \times X_2 \subseteq \bigcup_{t \in T(x)} U_t \times V_t,$$

con $x \in U_t$, per ogni $t \in T(x)$. Ora, per ogni $x \in X_1$, possiamo considerare l'aperto di X_1 , contenente x , definito da

$$U(x) = \bigcap_{t \in T(x)} U_t$$

e possiamo costruire un ricoprimento di aperti di X_1 ponendo

$$\mathcal{U} = \{U(x)\}_{x \in X_1}.$$

Dalla compattezza di X_1 , segue che esistono un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_m \in X_1$, tali che

$$X = U(x_1) \cup U(x_2) \cup \dots \cup U(x_m)$$

e la famiglia finita di aperti di $X_1 \times X_2$

$$\{U(x_1) \times V_t\}_{t \in T(x_1)} \cup \{U(x_2) \times V_t\}_{t \in T(x_2)} \cup \dots \cup \{U(x_m) \times V_t\}_{t \in T(x_m)}$$

è un ricoprimento finito di $X_1 \times X_2$.

A questo punto osserviamo che, per ogni $k = 1, 2, \dots, m$ e $t \in T(x_k)$, l'aperto $U(x_k) \times V_t$ è contenuto in qualche aperto della famiglia \mathcal{A} , diciamo $A_{i(k,t)}$; di conseguenza \mathcal{A} possiede il sottoricoprimento finito

$$\{A_{i(k,t)} : k = 1, 2, \dots, m; t \in T\}$$

e così $X_1 \times X_2$ è compatto. □

Vediamo ora come la nozione di prodotto di due spazi topologici si generalizza in modo naturale a quella di prodotto di un numero finito di spazi. Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$, $n > 2$, spazi topologici, notazione che manterremo in tutto il paragrafo, e poniamo

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \text{ con } A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2, \dots, A_n \in \tau_n\}.$$

La famiglia \mathcal{B} è un ricoprimento di $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$ e l'intersezione di due suoi elementi è ancora un elemento di \mathcal{B} . Ne segue che \mathcal{B} verifica gli assiomi delle basi e, quindi (cfr. **Proposizione 1.3.27**), esiste un'unica topologia su $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, che ammette \mathcal{B} come base. Tale topologia prende il nome di **topologia prodotto di** $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ e gli aperti della base \mathcal{B} si dicono **aperti elementari**. Le funzioni

$$p_{X_j} : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow a_j \in X_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

prendono il nome di **proiezioni** e, come nel caso $n = 2$, risultano continue e aperte. Inoltre **la topologia prodotto è la meno fine tra le topologie su** $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ **per cui risultano continue tutte le proiezioni** p_j .

OSSERVAZIONE 1.8.13. Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), (X_3, \tau_3)$ spazi topologici. È facile provare che le funzioni

$$((a_1, a_2), a_3) \in (X_1 \times X_2) \times X_3 \rightarrow (a_1, a_2, a_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3,$$

$$(a_1, (a_2, a_3)) \in X_1 \times (X_2 \times X_3) \rightarrow (a_1, a_2, a_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3,$$

sono omeomorfismi. Più in generale, se $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$ sono spazi topologici, le funzioni del tipo

$$\begin{aligned} ((a_1, \dots, a_t)(a_{t+1}, \dots, a_n)) &\in (X_1 \times \dots \times X_t) \times (X_{t+1} \times \dots \times X_n) \rightarrow \\ &\rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \end{aligned}$$

sono omeomorfismi □

OSSERVAZIONE 1.8.14. L'Osservazione 1.8.4 si generalizza nel modo seguente. Il prodotto cartesiano di n intervalli limitati di \mathbb{R} , con la topologia naturale, è un sottospazio di \mathbb{R}^n , con la topologia naturale, che prende il nome di n -**rettangolo**. Nel caso gli intervalli in questione abbiano la stessa lunghezza si parla di n -**cubo**. Non è difficile provare che valgono le seguenti proprietà:

- un n -rettangolo prodotto di intervalli aperti (risp. chiusi) è un aperto (risp. chiuso) di \mathbb{R}^n e, in questo caso, si parla di n -**rettangolo aperto** (risp. **chiuso**);
- gli n -rettangoli aperti costituiscono una base di \mathbb{R}^n ;
- gli n -cubi aperti costituiscono una base di \mathbb{R}^n .

Ne segue che **il prodotto** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ **di** \mathbb{R} **per se stesso** n **volte è omeomorfo** a \mathbb{R}^n e un prodotto $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n , per ogni h, k con $h + k = n$. □

Tutte le proprietà e le proposizioni provate nel presente paragrafo per il prodotto di due spazi si estendono al prodotto di un numero finito di spazi; in particolare:

- vale la proprietà di universalità del prodotto: siano T e X_j spazi topologici e siano $f_j : T \rightarrow X_j$ funzioni, $j = 1, 2, \dots, n$, allora la funzione

$$h : a \in T \rightarrow (f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a)) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

è continua se, e solo se, ogni f_j è continua;

- il prodotto di un qualsiasi numero finito di spazi è connesso se, e solo se, i singoli fattori sono connessi;
- il prodotto di un qualsiasi numero finito di spazi è compatto se, e solo se, i singoli fattori sono compatti.

ESERCIZIO 1.8.15. (Un quadrato e una calotta chiusi sono omeomorfi) Sia X il quadrato definito da $X = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x, y \leq 1\}$. Sia Y la semicalotta chiusa della superficie sferica $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ definita da $Y = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$. Si provi che la funzione

$$(z, y, 0) \in X \rightarrow (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in Y$$

è un omeomorfismo (si tenga presente il cfr. **Corollario 1.8.8**) □

1.8.1 Compattezza in \mathbb{R} e \mathbb{R}^n

Nel presente paragrafo supporremo \mathbb{R} e \mathbb{R}^n dotati della topologia naturale.

PROPOSIZIONE 1.8.16. (Teorema di E.Heine e E.Borel) *Ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ di \mathbb{R} , con la topologia naturale, è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ una famiglia di aperti di \mathbb{R} tale che

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j \quad (1.29)$$

e poniamo

$$X = \{x \in [a, b] : [a, x] \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t, T \text{ sottoinsieme finito di } J\}.$$

Osserviamo che X , contenendo il punto a , è non vuoto. Inoltre, l'estremo superiore y di X , essendo aderente a $X (\subseteq [a, b])$, è aderente anche ad $[a, b]$ e quindi appartiene ad $[a, b]$. Allora, in forza della (1.29), esistono un aperto $A_j \in \mathcal{A}$ contenente y e un $\epsilon > 0$ tale che $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subseteq A_j$. Così, essendo y aderente a X , esistono

- un punto $x \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \cap X$;
- un sottoinsieme finito $F \subseteq I$ tale che $[a, x] \subseteq \bigcup_{f \in F} A_f$

e risulta

$$[a, x] \cap (y - \epsilon, y + \epsilon) = [a, y + \epsilon) \subseteq \left(\bigcup_{f \in F} A_f \right) \cup A_j,$$

da cui

$$[a, b] \cap [a, y + \epsilon) \subseteq \left(\bigcup_{f \in F} A_f \right) \cup A_j$$

e

$$t \in [a, b] \cap [a, y + \epsilon) \Rightarrow t \in X; \quad (1.30)$$

in particolare $y \in X$. Ora, se supponiamo $y < b$, esiste un punto $z \in [a, b]$ con $y < z < y + \epsilon$ e quindi $z \in [a, b] \cap [a, y + \epsilon)$. Allora, in forza della (1.30), z appartiene a X e ciò è assurdo essendo $z > y$. In conclusione, risulta $y = b$ e l'asserto è provato. \square

PROPOSIZIONE 1.8.17. *In \mathbb{R}^n risultano compatti i seguenti sottospazi:*

- *gli n -rettangoli (in particolare gli n -cubi) chiusi;*
- *gli intorni sferici chiusi;*
- *le superfici sferiche chiuse.*

DIMOSTRAZIONE. In forza delle **Proposizioni 1.8.12, 1.8.16**, gli n -rettangoli chiusi sono compatti perché prodotti di intervalli compatti. Gli intorni sferici chiusi e le superfici sferiche sono chiusi contenuti in n -rettangoli chiusi (provarlo per esercizio), che sono spazi compatti, e quindi sono compatti in forza della **Proposizione 1.7.11**. \square

PROPOSIZIONE 1.8.18. (Teorema di E.Heine, S.Pincherle e E.Borel) *Un sottoinsieme Y di \mathbb{R}^n è compatto se, e solo se, è chiuso e limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Un sottospazio compatto Y di \mathbb{R}^n è anche chiuso, essendo \mathbb{R}^n uno spazio T_2 (cfr. **Proposizione 1.7.14**), ed è limitato in forza dell'**Esempio 1.7.6**. D'altra parte, un sottospazio Y chiuso e limitato di \mathbb{R}^n è contenuto in un intorno sferico chiuso S , che è compatto (cfr. **Esempio 1.8.17**). Allora Y , che è chiuso anche in S , è compatto perché sottospazio chiuso di uno spazio compatto (cfr. **Proposizione 1.7.11**). \square

ESEMPIO 1.8.19. ($GL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{R})$ non sono compatti) Il complementare del gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^{n,n}$ (con la topologia naturale) è un chiuso perché controimmagine dello zero nella funzione continua

$$\det : A \in \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \det A \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che $GL(n, \mathbb{R})$ è un aperto e, quindi, non è compatto in forza del precedente risultato. Tra l'altro, $GL(n, \mathbb{R})$ è anche non limitato (dimostrarlo per esercizio). Il gruppo $SL(n, \mathbb{R})$, invece, è un chiuso in quanto controimmagine di 1 nella funzione determinante. Anche questo gruppo non è compatto perché non limitato. \square

PROPOSIZIONE 1.8.20. (Una caratterizzazione dei compatti di \mathbb{R}^n) *Un sottoinsieme Y di \mathbb{R}^n è compatto se, e solo se, ogni suo sottoinsieme infinito possiede almeno un punto di accumulazione in Y .*

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che Y sia compatto, e quindi chiuso (cfr. **Proposizione 1.8.18**), un suo sottoinsieme infinito X ha almeno un punto di accumulazione z (cfr. **Proposizione 1.7.18**) e risulta $z \in \overline{X} \subseteq Y$.

Proviamo ora che, se ogni sottoinsieme infinito di Y ha almeno un punto di accumulazione in Y , allora Y è limitato e chiuso.

Supponiamo per assurdo Y non limitato e sia \mathbf{y} un punto di Y . Per ogni naturale positivo n , scegliamo un punto $\mathbf{x}_n \in Y$ con $\mathbf{x}_n \notin D_n(\mathbf{y}) = \overline{B}_n(\mathbf{y})$, cioè $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) > n$, in modo che sia

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_{n+1}) > d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n).$$

Allora $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ è un sottoinsieme infinito di Y senza punti di accumulazione in Y . Infatti, y e i punti x_n , per costruzione, non sono di accumulazione per X . Se, invece, z è un punto di $Y \setminus (X \cup \{y\})$ e $B_r(z)$ un suo intorno sferico aperto, sia m un intero tale che $m > d(y, z) + r$. Allora

$$t \in B_r(z) \Rightarrow d(t, y) \leq d(t, z) + d(z, y) < r + d(z, y) < m \Rightarrow B_r(z) \subseteq B_m(y),$$

quindi $B_r(z)$ contiene un numero finito di punti di X perché x_m, x_{m+1}, \dots non appartengono a $B_m(y)$; di conseguenza z non può essere di accumulazione per X in forza della **Proposizione 1.4.13**. Abbiamo così un assurdo e quindi Y è necessariamente limitato.

Ci resta da provare che Y è chiuso. A tale scopo, se z è un punto di accumulazione di Y , possiamo costruire una successione infinita $\{x_n\}$ di punti di Y tale che

$$d(x_n, z) < \frac{1}{n}, \quad d(x_{n+1}, z) < d(x_n, z).$$

Per costruzione, $\{x_n\}$ converge a z , che risulta pertanto punto di accumulazione per l'insieme infinito $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. D'altra parte, per ipotesi, X possiede un punto di accumulazione y in Y . Ora, supponendo per assurdo $z \neq y$, consideriamo un intorno U di z e uno V di y disgiunti e, poichè da un certo indice in poi tutti gli x_m appartengono a U , necessariamente V contiene un numero finito di punti di X . Ciò è assurdo in forza della **Proposizione 1.4.13** e quindi $y = z$. Ne segue che Y è chiuso. \square

1.9 Complementi

1.9.1 Compattificazione di Alexandrov

Per uno spazio topologico X non compatto è di notevole interesse trovare spazi compatti contenenti un sottospazio omeomorfo a X e, in qualche modo, minimali rispetto a questa proprietà. A tale scopo si dà la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.9.1. (Compattificazione) Siano X e K rispettivamente uno spazio topologico non compatto e uno compatto. Lo spazio K prende il nome di **compattificazione di X** se contiene un sottospazio omeomorfo a X e denso in K . \square

ESEMPIO 1.9.2. (Una compactificazione della superficie sferica bucata) Siano S^n una superficie sferica in \mathbb{R}^n e P un suo punto. Posto $X = S^n \setminus \{P\}$, si ha subito che S^n è una compactificazione di X . \square

Esistono diversi tipi di compattificazione di uno spazio non compatto. La più semplice si ottiene "aggiungendo" un unico punto allo spazio X di partenza e si chiama **compattificazione di Alexandrov** di X .

PROPOSIZIONE 1.9.3. (Compattificazione di Alexandrov) Sia (X, τ) uno spazio topologico non compatto e si ponga:

- $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, dove ∞ denota un elemento non appartenente a X (**punto all'infinito o improprio**);
- $\tau_\infty = \{A \cup \{\infty\}, \text{ con } X \setminus A \text{ sottospazio chiuso e compatto di } X\}$;
- $\hat{\tau} = \tau \cup \tau_\infty$.

Allora $\hat{\tau}$ è una topologia su \hat{X} e lo spazio $(\hat{X}, \hat{\tau})$ è una compattificazione di (X, τ) .

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a provare che $\hat{\tau}$ verifica gli assiomi degli aperti. Risulta $\emptyset, \hat{X} \in \hat{\tau}$ perché $\emptyset \in \tau \subset \hat{\tau}$ e $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ ($X \setminus X = \emptyset$, che è chiuso e compatto in X).

Se $\{T_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di elementi di $\hat{\tau}$ e A l'unione degli elementi di tale famiglia, possiamo scrivere

$$A = \bigcup_{i \in I} T_i = \left(\bigcup_{T_i \in \tau} T_i \right) \cup \left(\bigcup_{T_i \notin \tau} T_i \right) = T \cup T',$$

ove

$$T = \bigcup_{T_i \in \tau} T_i \in \tau \quad \text{e} \quad T' = \bigcup_{T_i \notin \tau} T_i$$

e, nell'ipotesi $T' \neq \emptyset$,

$$T' = \bigcup_{T_i \notin \tau} T_i = \bigcup_{T_i \notin \tau} (A_i \cup \{\infty\}) = \left(\bigcup_{T_i \notin \tau} A_i \right) \cup \{\infty\}$$

con $X \setminus A_i$ sottospazio chiuso e compatto di X . D'altra parte, abbiamo che

$$X \setminus \left(\bigcup_{T_i \notin \tau} A_i \right) = \bigcap_{T_i \notin \tau} (X \setminus A_i)$$

è chiuso in X , in quanto intersezione dei chiusi $X \setminus A_i$, ed è compatto, in quanto sottospazio chiuso dei compatti $X \setminus A_i$; cioè $T' \in \hat{\tau}$. In definitiva abbiamo provato che A è del tipo

$$A = T \cup (U \cup \{\infty\}) = (T \cup U) \cup \{\infty\},$$

con $X \setminus U$ sottospazio chiuso e compatto di X . Ora, risulta che

$$X \setminus (T \cup U) = (X \setminus T) \cap (X \setminus U)$$

è chiuso in X , in quanto intersezione dei chiusi $(X \setminus T)$, $(X \setminus U)$, ed è compatto, in quanto sottospazio chiuso del compatto $X \setminus U$; cioè $A \in \hat{\tau}$. Resta così provato che l'unione di una famiglia di elementi di $\hat{\tau}$ appartiene a $\hat{\tau}$.

Se T_1, T_2 sono elementi di τ è chiaro che $T_1 \cap T_2$ appartiene a τ . Se $T_1 = A_1 \cup \{\infty\}$, $T_2 = A_2 \cup \{\infty\}$ sono elementi di $\hat{\tau} \setminus \tau$, possiamo scrivere

$$T_1 \cap T_2 = (A_1 \cup \{\infty\}) \cap (A_2 \cup \{\infty\}) = (A_1 \cap A_2) \cup \{\infty\}$$

e $X \setminus (A_1 \cap A_2)$ è un sottospazio chiuso e compatto di X ; cioè $A_1 \cap A_2 \in \hat{\tau}$. In modo analogo si vede che $T_1 \cap T_2 \in \hat{\tau}$ se $T_1 \in \tau$ e $T_2 \in \hat{\tau}$. Abbiamo così che l'intersezione di due elementi di $\hat{\tau}$ appartiene a $\hat{\tau}$ e con ciò resta provato che $\hat{\tau}$ è una topologia su $\hat{\tau}$.

Osserviamo esplicitamente che l'immersione $x \in X \rightarrow x \in \hat{X}$ risulta continua e da ciò segue che ogni sottospazio compatto di X è tale anche in \hat{X} . Inoltre, X non è chiuso in \hat{X} perchè

$$\hat{X} \setminus X = \{\infty\} = \{\emptyset \cup \{\infty\}\}$$

e $X \setminus \emptyset = X$ non è compatto in X . Ne segue che X è denso in \hat{X} .

Possiamo ora provare che \hat{X} è compatto. A tale scopo consideriamo un ricoprimento $\mathcal{U} = \{T_i\}_{i \in I}$ di aperti di \hat{X} e sia $T_j = A \cup \{\infty\}$ un elemento di \mathcal{U} contenente ∞ . Poiché $X \setminus A$ è un sottospazio compatto di \hat{X} , esiste un suo ricoprimento finito $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ e $\{A_j\} \cup \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ è un ricoprimento finito di \hat{X} . \square

ESEMPIO 1.9.4. (Compattificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n) Nello spazio euclideo \mathbb{R}^{n+1} consideriamo una sfera S^n e un suo punto P . Non è difficile rendersi conto che la compactificazione di Alexandrov di $S^n \setminus \{P\}$ è omeomorfa a S^n . Allora, tenendo presente che $S^n \setminus \{P\}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n (per esempio mediante la proiezione stereografica descritta nell'Esempio 1.9.4), si ha che **la compactificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n è omeomorfa a S^n** . \square

1.9.2 Prodotti di famiglie di spazi

Ricordiamo che, se $\{X_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di insiemi, si definisce prodotto della famiglia, e si denota con $\prod_{j \in J} X_j$, l'insieme delle funzioni

$$f : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} X_j, \text{ con } f(j) \in X_j, \text{ per ogni } j \in J.$$

Se, per ogni $j \in J$, risulta $f(j) = a_j$, la funzione f si denota con $\{a_j\}_{j \in J}$ o più semplicemente con $\{a_j\}$. Per ogni $i \in J$, la funzione

$$p_i : \{a_j\} \in \prod_{j \in J} X_j \rightarrow a_i \in X_i$$

si chiama *i -ma proiezione*. Osserviamo che, se tutti gli X_j sono uguali ad un fissato insieme T , allora il prodotto $\prod_{j \in J} X_j$ coincide con l'insieme T^J di tutte le funzioni di J in T .

Se $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ è una famiglia di spazi topologici, non è difficile provare che la famiglia di sottoinsiemi di $\prod_{j \in J} X_j$ definita da

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{f \in F} p_f^{-1}(A_f) \right\}, \quad (1.31)$$

al variare di A_f in τ_f e di F tra i sottoinsiemi finiti di J , verifica gli assiomi delle basi. Si ha infatti che \mathcal{B} è un ricoprimento di $\prod_{j \in J} X_j$ e l'intersezione di due elementi di \mathcal{B} è ancora un elemento di \mathcal{B} . Ha quindi senso la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.9.5. (Prodotto di una famiglia di spazi) Sia $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ una famiglia di spazi topologici e \mathcal{B} la famiglia di sottoinsiemi di $\prod_{j \in J} X_j$ definita dalla (1.31). L'unica topologia τ su $\prod_{j \in J} X_j$ per cui \mathcal{B} è una base prende il nome di **prodotto delle topologie** τ_j e lo spazio topologico $(\prod_{j \in J} X_j, \tau)$ si dice **prodotto degli spazi** (X_j, τ_j) . \square

Come nel caso di un prodotto finito, **la topologia prodotto τ è la meno fine tra le topologie su $\prod_{j \in J} X_j$ per cui risultano continue tutte le proiezioni p_j .**

Le proprietà e le proposizioni provate nei precedenti paragrafi per il prodotto di due spazi topologici si estendono al prodotto di una famiglia di spazi; in particolare:

- vale la proprietà di universalità del prodotto: siano T uno spazio topologico, $\{X_j\}_{j \in J}$ una famiglia di spazi topologici e siano $f_j : T \rightarrow X_j$ funzioni, $j \in J$, allora la funzione

$$h : a \in T \rightarrow \{a_j\}_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$$

è continua se, e solo se, ogni f_j è continua;

- il prodotto di una famiglia di spazi è connesso se, e solo se, i singoli fattori sono connessi;
- **(Teorema di A.N.Tychonoff)** il prodotto di una famiglia di spazi è compatto se, e solo se, i singoli fattori sono compatti.

ESEMPI 1.9.6. Gli esempi che seguono sono casi particolarmente interessanti di topologie su $\prod_{j \in J} X_j = T^J$, nell'ipotesi che tutti gli X_j siano uguali ad un fissato spazio topologico T .

- Quando $J = \mathbb{N}^+$ si ottiene una topologia sull'insieme delle successioni degli elementi di T .
- Per $J = \mathbb{N}$ e $T = [0, 1]$, lo spazio che si ottiene si chiama **cubo di Hilbert**.
- Per J uguale ad un intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} e $T = \mathbb{R}$ si ottiene una topologia sull'insieme delle funzioni di $[a, b]$ in \mathbb{R} che si chiama **topologia della convergenza puntuale**. \square

1.10 Quozienti

Ricordiamo che, se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione tra due insiemi X e Y , la relazione \sim_f definita da

$$a, b \in X, \quad a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \quad (1.32)$$

è di equivalenza su X e si dice **associata ad f** . La classe di equivalenza di un elemento $a \in X$ rispetto a \sim_f sarà denotata con $[a]_f$, o semplicemente con $[a]$ se non vi è luogo ad equivoci. Denoteremo, inoltre, con π_f la **proiezione canonica** di X su X/\sim_f , cioè la funzione suriettiva definita da $\pi_f(a) = [a]_f$, per ogni $a \in X$. È ben noto che la funzione

$$\varphi_f : [a]_f \in X/\sim_f \rightarrow f(a) \in f(X)$$

è biunivoca ed è l'unica che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & f(X) \\ \pi_f \downarrow & & \swarrow \varphi_f \\ X/\sim_X & & \end{array} \quad (1.33)$$

cioè $f(a) = \varphi_f(\pi_f(a))$, per ogni $a \in X$. Inoltre, se \sim è una relazione di equivalenza su X , $[a]$ la classe d'equivalenza dell'elemento $a \in X$ e \sim_π la relazione d'equivalenza associata alla proiezione canonica

$$\pi : a \in X \rightarrow [a] \in X/\sim, \quad (1.34)$$

le due relazioni \sim e \sim_π coincidono. Nel seguito, se T è un sottoinsieme di X , l'immagine $\pi(T)$ di T in π si dirà **proiezione di T** .

I richiami precedenti mostrano che **assegnare una funzione suriettiva f tra due insiemi X e Y equivale ad assegnare su X la relazione d'equivalenza \sim_f (1.32).** In questa situazione, Y si può identificare col quoziente di X rispetto a \sim_f e f con la proiezione canonica di X su questo quoziente. Questa osservazione giustifica la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.10.1. (Topologia quoziente) Siano (X, τ) uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \rightarrow Y$ una funzione suriettiva. La famiglia

$$\tau_f = \{T \subseteq Y \text{ tale che } f^{-1}(T) \in \tau\}$$

è una topologia su Y (cfr. **Esempio 1.3.13**), che prende il nome di **topologia quoziente** di X rispetto a f . Lo spazio topologico (Y, τ_f) si chiama **spazio quoziente** e si denota anche con X/f . Se \sim è una relazione d'equivalenza sui punti di X , la topologia quoziente τ_π di X rispetto alla proiezione canonica $\pi : X \rightarrow X/\sim$ prende il nome di **topologia quoziente** di X rispetto a alla relazione \sim e lo spazio topologico $(X/\sim, \tau_\pi)$ si chiama **spazio quoziente**. \square

Osserviamo esplicitamente che, se \sim è una relazione d'equivalenza sui punti dello spazio topologico X e $\pi : X \rightarrow X/\sim$ la proiezione canonica, **un sottoinsieme A dello spazio X/\sim è aperto nella topologia quoziente se, e solo se, $\pi^{-1}(A)$ è un aperto di X .**

OSSERVAZIONE 1.10.2. Siano X uno spazio topologico T_1 , x un suo punto non aperto e \sim la relazione d'equivalenza su X che identifica i punti di $X \setminus \{x\}$. Lo spazio quoziente X/\sim contiene esattamente due punti ed è dotato della topologia con tre aperti, che non è T_1 . Questo esempio mostra che in generale gli assiomi di separazione non si conservano nel passaggio al quoziente. \square

PROPOSIZIONE 1.10.3. Siano (X, τ) uno spazio topologico, $f : X \rightarrow Y$ una funzione suriettiva di X su un insieme Y , τ_f la topologia quoziente di X rispetto a f e τ_{π_f} la topologia quoziente di X rispetto alla relazione \sim_f . Allora, con riferimento al seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau_f) \\ \pi_f \downarrow & \nearrow \varphi_f & \\ (X/\sim_f, \tau_{\pi_f}) & & \end{array} \quad (1.35)$$

si ha che f e π_f sono continue e φ_f è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni f e π_f sono continue per definizione: le controimmagini in f degli aperti di Y e quelle in π_f degli aperti di X/\sim_f sono aperti in X . La funzione φ_f è biunivoca perchè f è suriettiva. Ora, se A è un aperto di Y , $f^{-1}(A)$ è un aperto di X e, essendo

$$f^{-1}(A) = (\varphi_f \circ \pi_f)^{-1}(A) = (\pi_f^{-1} \circ \varphi_f^{-1})(A) = \pi_f^{-1}(\varphi_f^{-1}(A))$$

abbiamo che $\varphi_f^{-1}(A)$ è un aperto di X/\sim_f e φ_f è continua. Infine, se T è un aperto di X/\sim_f , $\pi_f^{-1}(T)$ è un aperto in X e, essendo

$$f^{-1}(\varphi_f(T)) = (\pi_f^{-1} \circ \varphi_f^{-1})(\varphi_f(T)) = \pi_f^{-1}(T),$$

abbiamo che $\varphi_f(T)$ è un aperto di Y e φ_f è aperta. Resta così provato che φ_f è un omeomorfismo. \square

PROPOSIZIONE 1.10.4. *Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione suriettiva. Allora f è continua tra gli spazi topologici (X, τ) e (Y, σ) se, e solo se, la topologia σ di Y è meno fine della topologia quoziente τ_f . Ne segue che τ_f è la più fine tra le topologie su Y che rende f continua rispetto a (X, τ) .* \square

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ continua. Allora la controimmagine $f^{-1}(A)$ di un aperto A di (Y, σ) è un aperto di (X, τ) e, quindi, A è un aperto nella topologia quoziente, cioè $\sigma \leq \tau_f$. Viceversa, se $\sigma \leq \tau_f$, un aperto A in σ è anche un aperto in τ_f e, quindi, $f^{-1}(A)$ è un aperto in τ . Ne segue che f è continua rispetto a σ e l'asserto è provato. \square

ESEMPIO 1.10.5. (Le proiezioni non sono in generale né aperte né chiuse) In \mathbb{R} con la topologia naturale consideriamo la relazione d'equivalenza \sim che identifica i punti dell'intervallo $[0, 1)$, cioè

$$a, b \in X, \quad a \sim b \Leftrightarrow a = b \quad \text{o} \quad a, b \in [0, 1).$$

È chiaro che il sostegno dello spazio quoziente X/\sim può identificarsi con l'insieme $(-\infty, 0) \cup \{y\} \cup [1, +\infty)$, ove y rappresenta la classe d'equivalenza $[0, 1)$ e ogni punto di $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ coincide con la propria classe d'equivalenza. Ora, se π è la proiezione canonica di \mathbb{R} su \mathbb{R}/\sim , la controimmagine $\pi^{-1}(y) = [0, 1)$ non è né aperta né chiusa in \mathbb{R} e, quindi, y non è né aperto né chiuso in \mathbb{R}/\sim . D'altra parte, $(0, 1)$ e $[0, \frac{1}{2}]$ sono rispettivamente un aperto e un chiuso di X e risulta $\pi((0, 1)) = \pi[0, \frac{1}{2}] = y$. Così π non è né aperta né chiusa. \square

Ricordiamo che, data una funzione suriettiva $f : X \rightarrow Y$ fra due insiemi X e Y ,

- un sottoinsieme S di X si dice **saturo**, rispetto a f , se risulta $S = f^{-1}f(S)$, cioè se risulta unione di classi d'equivalenza rispetto alla relazione \sim_f ;

- se $T \subseteq X$, il sottoinsieme saturo $f^{-1}f(T) (\supseteq T)$ si dice **saturazione di T** (rispetto a f).

Analogamente, se \sim è una relazione d'equivalenza su X , un sottoinsieme S di X si dice saturo, rispetto a \sim , se è unione di classi di equivalenza, cioè se è saturo rispetto alla proiezione canonica π di X su X/\sim .

DEFINIZIONE 1.10.6. (Identificazioni) Una funzione continua e suriettiva tra due spazi topologici $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ prende il nome di **identificazione** se σ coincide con la topologia quoziente τ_f di X rispetto a f . \square

PROPOSIZIONE 1.10.7. (Identificazioni e aperti saturi) Sia $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ un'identificazione e denotiamo con \mathcal{A}_f l'insieme degli aperti saturi di X . Allora, per ogni aperto saturo A di X , l'immagine $f(A)$ è un aperto di Y e la funzione

$$F : A \in \mathcal{A}_f \rightarrow f(A) \in \sigma$$

è biunivoca. In altre parole, gli aperti di Y sono tutti e soli le immagini in f degli aperti saturi di X . Equivalentemente, se \sim è una relazione di equivalenza sui punti di (X, τ) , gli aperti dello spazio quoziente X/\sim sono tutte e sole le proiezioni degli aperti saturi di X .

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto saturo di X , risulta $A = f^{-1}(f(A))$ e dalla definizione di topologia quoziente segue che $f(A)$ è un aperto di Y . La funzione F è suriettiva perchè, per ogni aperto T di Y , risulta $f^{-1}(T) = f^{-1}(f(f^{-1}(T)))$, cioè $f^{-1}(T)$ è un aperto saturo di X tale che $F(f^{-1}(T)) = f(f^{-1}(T)) = T$. La funzione F è anche iniettiva perchè, se A, B sono aperti saturi di X tali che $F(A) = F(B)$, risulta $A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(F(A)) = f^{-1}(F(B)) = f^{-1}(f(B)) = B$. \square

OSSERVAZIONE 1.10.8. Se X è uno spazio topologico e X/\sim un suo quoziente, possono esistere aperti non saturi di X la cui immagine è un aperto di X/\sim , come mostra l'esempio che segue. In $X = [-1, 1]$ con la topologia naturale consideriamo la relazione d'equivalenza \sim che identifica i punti dell'intervallo $(-1, 1)$ simmetrici rispetto a 0, cioè

$$a, b \in X, \quad a \sim b \Leftrightarrow a = b \quad \text{o} \quad a = -b, \quad \text{se} \quad -1 < a, b < 1.$$

È chiaro che il sostegno dello spazio quoziente X/\sim può identificarsi con l'insieme $\{-1\} \cup [0, 1]$, ove ogni punto $a \in (0, 1)$ rappresenta la classe d'equivalenza $\{-a, a\}$ e $-1, 0, 1$ sono le classi d'equivalenza rispettivamente di $-1, 0, 1$. Ora, l'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$ è un aperto non saturo di X e risulta $\pi((\frac{1}{2}, 1)) = (\frac{1}{2}, 1)$. D'altra parte, $\pi^{-1}(\pi((\frac{1}{2}, 1))) = (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ è un aperto di X e, quindi, $\pi((\frac{1}{2}, 1))$ è un aperto di X/\sim . \square

ESERCIZIO 1.10.9. (Identificazioni e chiusi saturi) Sia $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ un'identificazione e denotiamo con $\mathcal{C}(Y)$ e \mathcal{C}_f rispettivamente l'insieme dei chiusi di Y e quello dei chiusi saturi di X . Provare che, per ogni chiuso saturo C di X , l'immagine $f(C)$ è un chiuso di Y e la funzione

$$F : C \in \mathcal{C}_f \rightarrow f(C) \in \mathcal{C}(Y)$$

è biunivoca. In altre parole, i chiusi Y sono tutte e sole le immagini in f dei chiusi saturi di X . Equivalentemente, se \sim è una relazione di equivalenza sui punti di (X, τ) , i chiusi dello spazio quoziente X/\sim sono tutte e sole le proiezioni dei chiusi saturi di X . \square

ESERCIZIO 1.10.10. (Identificazioni e omeomorfismi) Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione tra due spazi topologici. Provare che f è un omeomorfismo se, e solo se, f è un'identificazione biunivoca e aperta (chiusa). \square

ESEMPIO 1.10.11. (Contrazione a un punto di un sottospazio) Siano X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio e \sim_Y la relazione d'equivalenza definita da

$$a, b \in X, a \sim_Y b \Leftrightarrow a = b \text{ o } a, b \in Y. \quad (1.36)$$

Lo spazio quoziente X/\sim_Y , che si denota con X/Y , prende il nome di **contrazione ad un punto del sottospazio** Y e il sostegno di tale spazio può identificarsi con l'unione di $X \setminus Y$ e di un punto y (corrispondente alla classe d'equivalenza Y). Se $\pi : X \rightarrow X/Y$ è la proiezione canonica di X sul quoziente, risulta $\pi(a) = a$, se $a \notin Y$, e $\pi(a) = y$, se $a \in Y$, per ogni $a \in X$. Ne segue che gli aperti (i chiusi) saturi di X sono tutti e soli quelli che risultano ad intersezione vuota con Y e quelli che contengono Y . Allora gli aperti (i chiusi) di $X/Y = X \cup \{y\}$ sono gli aperti (i chiusi) di X ad intersezione vuota con Y e gli insiemi del tipo $(A \setminus Y) \cup \{y\}$, con A aperto (chiuso) di X contenente Y . Da quanto appena osservato segue che, se Y è aperto (chiuso) in X , il punto $y \in X/Y$ è un aperto (chiuso) nella topologia quoziente. Per esempio, nel quoziente $\mathbb{R}/(0, 1)$ il punto corrispondente alla proiezione di $(0, 1)$ è aperto e nel quoziente $\mathbb{R}/[0, 1]$ il punto corrispondente alla proiezione di $[0, 1]$ è chiuso. \square

ESERCIZIO 1.10.12. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua e suriettiva fra gli spazi topologici X, Y . Provare che:

- se l'immagine $f(A)$ di ogni aperto saturo A di X è un aperto di Y allora f è un'identificazione;
- se f è aperta (o chiusa) è un'identificazione. \square

PROPOSIZIONE 1.10.13. (Universalità del quoziente) Siano X, Y, T spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ un'identificazione e $g : Y \rightarrow T$ una funzione. Allora $g \circ f$ è continua se, e solo se, g è continua.

DIMOSTRAZIONE. La composizione di due funzioni continue è continua e così, se g è continua, $g \circ f$ è continua. Ora, se assumiamo $g \circ f$ continua, anche g è continua perchè, per ogni aperto A di T ,

$$(g \circ f)^{-1}(A) = (f^{-1} \circ g^{-1})(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

è un aperto di X e, quindi, $g^{-1}(A)$ è un aperto di Y . □

PROPOSIZIONE 1.10.14. (Omeomorfismi di quozienti) Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo e \sim_X, \sim_Y relazioni d'equivalenza rispettivamente su X e Y . Allora, se vale la proprietà

$$a, b \in X, a \sim_X b \Leftrightarrow f(a) \sim_Y f(b)$$

la funzione

$$F : [a] \in X / \sim_X \rightarrow [f(a)] \in Y / \sim_Y$$

è un omeomorfismo. □

DIMOSTRAZIONE. Siano π_X e π_Y le proiezioni canoniche di X e Y rispettivamente su X / \sim_X e Y / \sim_Y . La funzione $\pi_Y \circ f$ è continua perchè composizione di due funzioni continue. Allora, per il teorema di universalità del quoziente, risultando $F \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$, la F è **continua**. Se $a, b \in X$, risulta

$$F([a]) = F([b]) \Leftrightarrow [f(a)] = [f(b)] \Leftrightarrow f(a) \sim_Y f(b) \Leftrightarrow a \sim_X b \Leftrightarrow [a] = [b],$$

cioè F è **iniettiva**. Se $[y] \in Y$, esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$ e $F([x]) = [f(x)] = [y]$, cioè F è **suriettiva**. La funzione $\pi_X \circ f^{-1}$ è continua perchè composizione di due funzioni continue. Allora, per il teorema di universalità del quoziente, risultando $F^{-1} \circ \pi_Y = \pi_X \circ f^{-1}$, l'**inversa** F^{-1} di F è **continua**. In conclusione, F è un omeomorfismo. □

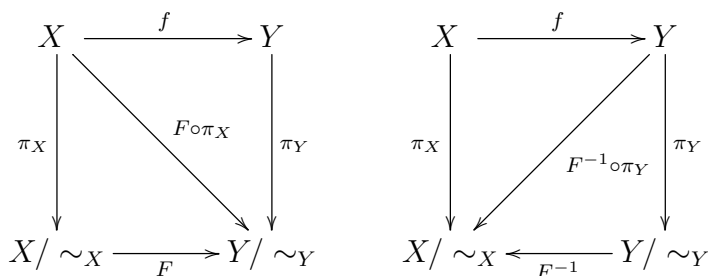


Figura 1.14: Proposizione 1.10.14

Ricordando che la connessione e la compattezza si conservano per continuità e che la proiezione canonica di uno spazio topologico su un suo quoziente è continua, si ha subito la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.10.15. *Un quoziente di uno spazio connesso è connesso. Un quoziente di uno spazio compatto è compatto.*

Ricordiamo che assegnati due insiemi X e Y , una relazione d'equivalenza \sim su X e una funzione $f : X \rightarrow Y$, si dice che f **passa al quoziente**, o che è **compatibile con** \sim , se è verificata la proprietà

$$a, b \in X, \quad a \sim b \quad \Rightarrow \quad f(a) = f(b) \quad (1.37)$$

e, in questo caso, risulta ben definita la funzione (**associata a** f)

$$F : [a] \in X / \sim \quad \longrightarrow \quad f(a) \in Y$$

cioè $f = F \circ \pi$, ove π è la proiezione canonica di X sul quoziente X / \sim .

PROPOSIZIONE 1.10.16. *Siano X, Y spazi topologici, \sim una relazione d'equivalenza su X e $f : X \rightarrow Y$ una funzione compatibile con \sim . Allora f è continua se, e solo se, è continua la funzione $F : [a] \in X / \sim \rightarrow f(a) \in Y$ associata a f .*

DIMOSTRAZIONE. È un immediato corollario della proprietà di universalità del quoziente. \square

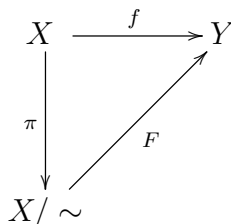


Figura 1.15: Proposizione 1.10.16

ESEMPIO 1.10.17. $((S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\})$ è omeomorfo a D^2) Siano $X = S^1 \times I$, $A = S^1 \times \{1\}$ e consideriamo la contrazione ad un punto di A (cfr. **Esempio 1.36**) con la relativa relazione d'equivalenza \sim_A su X (cfr. **Esempio 1.36**). La funzione suriettiva e continua (cfr. **Corollario 1.8.8**) $f : X \rightarrow D^2$ definita da

$$f(x, y, t) = ((1-t)x, (1-t)y), \quad (x, y) \in S^1, \quad t \in I$$

è compatibile con la relazione d'equivalenza su \sim_A perchè iniettiva su $X \setminus A$ e $f(A) = (0, 0)$. Pertanto resta ben definita la funzione continua (cfr. **Proposizione 1.10.16**)

$$F : [(x, y, t)] \in X / Y \rightarrow f(x, y, t) \in D^2,$$

che, essendo f suriettiva, risulta biunivoca. Allora, dalla compattezza di X segue che f è un omeomorfismo (cfr. **Proposizione 1.7.21**). \square

1.10.1 Esempi

Ricordiamo che, posto

$I = [0, 1]$ = intervallo unitario chiuso di \mathbb{R} ,

\mathbb{R}^n = spazio euclideo n -dimensionale,

$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\}$ = superficie sferica unitaria di dimensione $n - 1$,

$D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq 1\}$ = sfera unitaria chiusa di dimensione n ,

$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\}$ = sfera unitaria aperta di dimensione n ,

con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , a seconda del caso, risulta:

$$\overline{B^n} = D^n, \quad \overset{\circ}{D}^n = B^n, \quad \partial B^n = \partial D^n = S^{n-1}.$$

ESEMPIO 1.10.18. ($I/\{0, 1\}$ è omeomorfo a S^1) Posto $X = I = [0, 1]$ con la topologia naturale, $Y = \partial I = \{0, 1\}$, consideriamo la contrazione ad un punto di Y con la relativa relazione d'equivalenza \sim_Y su X (cfr. **Esempio 1.36**) e la funzione continua (cfr. **Corollario 1.8.8**)

$$f : t \in [0, 1] \rightarrow (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1.$$

Osserviamo che, risultando $f(0) = f(1)$, è ben definita la funzione

$$F : [a] \in X/Y \rightarrow f(a) \in S^1,$$

per la quale risulta $f = F \circ \pi$, ove π è la proiezione canonica di X su X/Y .

La funzione F è biunivoca, perché f è suriettiva, ed è continua per la proprietà di universalità del quoziente. Ora, X/Y è compatto, perché immagine continua mediante π dello spazio compatto X , e S^1 è T_2 ; quindi F è un omeomorfismo (cfr. **Proposizione 1.7.21**) tra X/Y e S^1 .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \pi \downarrow & \nearrow F & \\ X/Y & & \end{array}$$

Notiamo che allo stesso risultato si può arrivare anche provando che f è un'identificazione e usando la **Proposizione 1.10.3**. A tale scopo, essendo f continua e suriettiva, basta far vedere che gli aperti di S^1 , cioè le unioni di archi aperti di S^1 , sono tutti e soli le immagini in f degli aperti saturi di $[0, 1]$. Gli aperti saturi di

$[0, 1]$ sono:

- (a) le unioni di intervalli aperti contenuti in $(0, 1)$,
 (b) le unioni di intervalli aperti contenuti in $(0, 1)$ unite ad un insieme del tipo $[0, t] \cup (1 - t, 1]$, $t > 0$, contenuto in $[0, 1]$
 e le immagini in f di questi insiemi sono tutti e soli gli archi aperti di S^1 . Si ha così che f è un'identificazione.

È da osservare che la restrizione di f a $(0, 1]$, pur essendo biunivoca, non è un omeomorfismo perchè, per esempio, $(\frac{1}{2}, 1]$ è aperto in X ma $f((\frac{1}{2}, 1])$ non è aperto in S^1 . \square

ESEMPIO 1.10.19. (D^n/S^{n-1} è omeomorfo a S^n) Generalizzando il risultato dell'Esempio 1.10.18, si ha che in D^n la contrazione ad un punto della sua frontiera $\partial D^n = S^{n-1}$ è omeomorfa a S^n . Infatti, la funzione

$$f : \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in D^n \rightarrow f(\mathbf{t}) \in S^{n-1}$$

definita da

$$f(\mathbf{t}) = \left(2t_1 \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, 2t_2 \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, \dots, 2t_n \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, 2 \sum_{j=1}^n t_j^2 - 1 \right)$$

assume lo stesso valore sui punti di S^{n-1} e si può provare che è un'identificazione. In particolare, se in un cerchio chiuso del piano si contrae ad un punto la circonferenza che lo delimita, si ottiene uno spazio omeomorfo alla superficie sferica S^2 in \mathbb{R}^3 (per una dimostrazione si veda [8], pag. 76). \square

ESEMPIO 1.10.20. (Il cilindro) In \mathbb{R}^2 il quadrato $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ può identificarsi con il prodotto $I \times I$. Definiamo *cilindro (topologico)* un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al cilindro circolare retto di \mathbb{R}^3

$$\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq t \leq 1\} = S^1 \times I.$$

È possibile provare che la funzione

$$f : (x, y) \in I \times I \rightarrow (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, y) \in S^1 \times I$$

è un'identificazione (cfr. [8], pag. 78) e, di conseguenza, il quoziente $(I \times I)/f$ è omeomorfo al cilindro $S^1 \times I$.

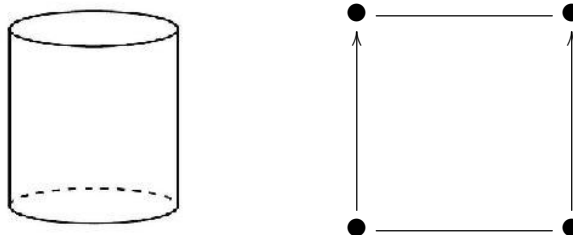


Figura 1.16: Il cilindro

Da notare che nella relazione d'equivalenza \sim_f sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0, y)$ viene identificato col punto $(1, y)$, per ogni $y \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso. \square

ESEMPIO 1.10.21. (Il nastro di Möbius) Si chiama *nastro di Möbius* un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al sottospazio \mathcal{M} di \mathbb{R}^3 i cui punti

$$P(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

con $0 \leq s, t \leq 1$, sono definiti da

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \cos 2\pi s + (t - \frac{1}{2}) \sin \pi s \cos 2\pi s, \\ y(s, t) &= \sin 2\pi s + (t - \frac{1}{2}) \sin \pi s \sin 2\pi s, \\ z(s, t) &= (t - \frac{1}{2}) \cos \pi s. \end{aligned}$$

È da osservare che \mathcal{M} risulta una superficie algebrica del terzo ordine con equazione

$$y - x^2y - y^3 + 2xz + 2x^2z + 2y^2z - yz^2 = 0.$$

Analogamente a quanto osservato nell'**Esercizio 1.10.20** è possibile provare che la funzione

$$f : (s, t) \in I \times I \rightarrow P(s, t) \in \mathcal{M}$$

è un'identificazione e, di conseguenza, il quoziente $(I \times I)/f$ è omeomorfo ad un nastro di Möbius.

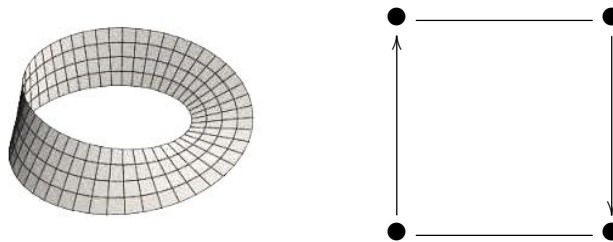


Figura 1.17: Il nastro di Möbius

Da notare che nella relazione d'equivalenza \sim_f sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0, t)$ viene identificato col punto $(1, 1 - t)$, per ogni $t \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso. È possibile provare che il nastro di Möbius non si può immergere in \mathbb{R}^2 senza autointersezioni. \square

ESEMPIO 1.10.22. (Il toro) Si chiama *toro* un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al sottospazio \mathbf{T} di \mathbb{R}^3 i cui punti

$$P(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

con $0 \leq s, t \leq 1$, sono definiti dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned}x(s, t) &= (2 + \cos 2\pi s) \cos 2\pi t, \\y(s, t) &= (2 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi t, \\z(s, t) &= \sin 2\pi s.\end{aligned}$$

È da osservare che \mathbf{T} ha equazione cartesiana

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Inoltre, ricordando che $S^1 = \{(\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi \leq 1\}$, si ha che la funzione

$$((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)) \in S^1 \times S^1 \rightarrow P(s, t) \in \mathbf{T}$$

è un omeomorfismo tra il prodotto $S^1 \times S^1$ di due circonferenze e il toro \mathbf{T} .

Analogamente a quanto osservato nell'Esercizio 1.10.20 è possibile provare che la funzione

$$f : (s, t) \in I \times I \rightarrow P(s, t) \in \mathbf{T}$$

è un'identificazione e, di conseguenza, il quoziente $(I \times I)/f$ è omeomorfo ad un nastro di Möbius. Da notare che nella relazione d'equivalenza \sim_f sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0, t)$ viene identificato col punto $(1, t)$, il punto $(s, 0)$ col punto $(s, 1)$, per ogni $s, t \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso.

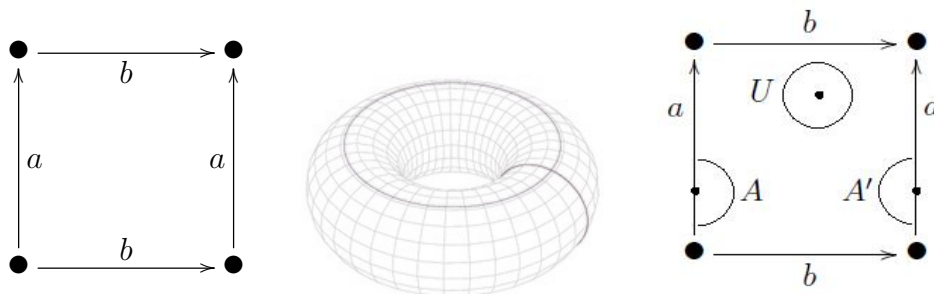


Figura 1.18: Il toro

Notiamo che se $\mathbf{a} = \pi(\mathbf{a})$ è il punto del toro proiezione di un punto \mathbf{a} interno a $I \times I$ e $U = B_\epsilon(\mathbf{a})$ un intorno circolare aperto di \mathbf{a} contenuto nell'interno di $I \times I$, allora U è un aperto saturo, così $\pi(U) = U$ è un aperto del toro contenente \mathbf{a} . Se, invece, $\mathbf{x} = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\} = \pi(\mathbf{a}) = \pi(\mathbf{a}')$ è il punto del toro proiezione dei punti \mathbf{a}, \mathbf{a}' sulla frontiera di $I \times I$, esiste un $\epsilon > 0$ tale che $A = B_\epsilon(\mathbf{a}) \cap (I \times I)$ e $A' = B_\epsilon(\mathbf{a}') \cap (I \times I)$ siano due semicerchi aperti contenuti in $I \times I$ e $V = A \cup A'$ è un aperto saturo di $I \times I$. Allora la proiezione $\pi(V)$ è un aperto del toro contenente \mathbf{x} ed è facile rendersi conto che è omeomorfo ad un intorno circolare aperto di \mathbb{R}^2 (cfr. Figura 1.18). In ogni caso, quindi, un punto del toro appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2 . \square

ESEMPIO 1.10.23. (La bottiglia di Klein) Sul quadrato $I \times I$ si consideri la relazione d'equivalenza \sim che sulla frontiera di $I \times I$ identifica il punto $(0, y)$ col punto $(1, y)$, il punto $(x, 0)$ col punto $(1 - x, 1)$, per ogni $x, y \in I$, e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a $I \times I$. Lo spazio quoziente $(I \times I)/\sim$ prende il nome di *bottiglia di Klein*. Con ragionamento analogo a quello fatto per il toro si vede che *un punto qualsiasi della bottiglia di Klein appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2* . È possibile provare che la bottiglia di Klein non si può immergere in \mathbb{R}^3 senza autointersezioni: nella **Figura 1.19** è mostrata una sua rappresentazione in \mathbb{R}^3 . \square

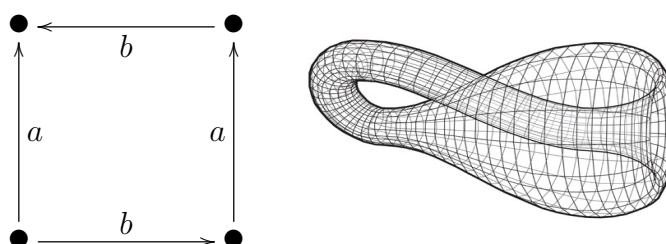


Figura 1.19: La bottiglia di Klein

ESEMPIO 1.10.24. (Il piano proiettivo (reale)) Sulla superficie sferica S^2 si consideri la relazione d'equivalenza \sim che identifica le coppie di punti diametralmente opposti, cioè: $x \sim y$ se, e solo se, $y = -x$. Lo spazio quoziente $\mathbb{RP}^2 = S^2/\sim$ prende il nome di **piano proiettivo** (reale). Con ragionamento analogo a quello fatto per il toro si vede che *un punto qualsiasi del piano proiettivo appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2* . Sulla semicalotta chiusa di S^2

$$X = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$$

si consideri la relazione d'equivalenza \sim_X (indotta su X dalla relazione \sim su S^2) che sulla sua frontiera

$$S^1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

identifica il punto $(x, y, 0)$ col punto $(-x, -y, 0)$ e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a X . Per costruzione, **lo spazio quoziente X/\sim_X è omeomorfo a $\mathbb{RP}^2 = S^2/\sim$** . Osserviamo che la funzione $(x, y, z) \in X \rightarrow (x, y, 0) \in D^2$ è, come subito si verifica, un omeomorfismo che lascia unito ciascun punto di S^1 . Ne segue che, se si quozienta D^2 rispetto alla relazione d'equivalenza \sim che identifica il punto $(x, y, 0)$ col punto $(-x, -y, 0)$ e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a D^2 , si ottiene uno spazio omeomorfo a X/\sim_X . Si ha così che

$$\mathbb{RP}^2 = S^2/\sim \simeq X/\sim_X \simeq D^2/\sim.$$

D'altra parte sappiamo anche che X è omeomorfo al quadrato $I \times I$ (cfr. **Esercizio 1.8.15**) e quindi X/\sim_X è omeomorfo al quoziente di $I \times I$ rispetto alla relazione d'equivalenza \sim che sulla frontiera di $I \times I$ identifica il punto $(0, y)$ col punto $(1, 1 - y)$, il punto $(x, 0)$ col punto $(1 - x, 1)$, per ogni $x, y \in I$, e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a $I \times I$. Abbiamo così che **lo spazio quoziente $I \times I/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}P^2$** .

Un altro modo per definire il piano proiettivo è il seguente. In $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si consideri la relazione d'equivalenza \sim che identifica le coppie di vettori proporzionali (appartenenti cioè ad uno stesso sottospazio vettoriale di dimensione uno) e si costruisca lo spazio quoziente $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$. È chiaro che gli elementi di $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$ sono i sottospazi vettoriali di dimensione uno privati del vettore nullo e che questi possono identificarsi con le rette di \mathbb{R}^3 per l'origine. Ora se, per ogni retta ℓ contenente l'origine, denotiamo con $\{\mathbf{x}_\ell, -\mathbf{x}_\ell\}$ l'insieme dei due punti che la retta ℓ ha in comune con la sfera S^2 , la funzione

$$\ell \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim \rightarrow \{\mathbf{x}_\ell, -\mathbf{x}_\ell\} \in \mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$$

risulta un omeomorfismo tra lo spazio quoziente $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\sim$ e il piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$.

Con riferimento all'ultimo modello di $\mathbb{R}P^2$, se V_1, V_2 sono sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3 rispettivamente di dimensione 1, 2, le immagini di $V_1 \setminus \{0\}$ e $V_2 \setminus \{0\}$ mediante la proiezione canonica $p : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^2$ prendono rispettivamente il nome di **punto** e **retta**. Osserviamo esplicitamente che un punto è esattamente un elemento di $\mathbb{R}P^2$. I punti e le rette di $\mathbb{R}P^2$ verificano le seguenti proprietà:

- due punti distinti di $\mathbb{R}P^2$ appartengono ad un'unica retta;
- due rette distinte di $\mathbb{R}P^2$ hanno esattamente un punto in comune.

È possibile provare che il piano proiettivo non si può immergere in \mathbb{R}^3 senza autointersezioni: nella **Figura 1.20** è mostrata una sua rappresentazione in \mathbb{R}^3 . \square

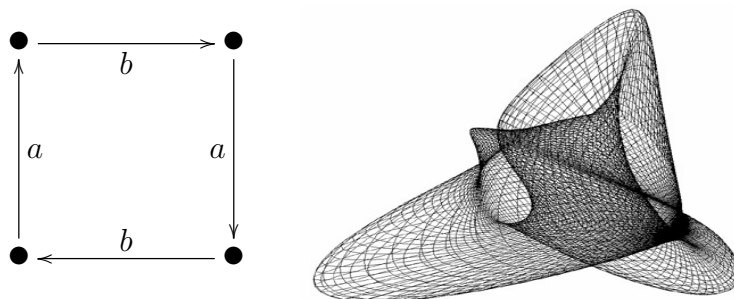


Figura 1.20: Il piano proiettivo reale

ESEMPIO 1.10.25. (Gli spazi proiettivi (reali)) Sulla superficie sferica S^n si consideri la relazione d'equivalenza \sim che identifica le coppie di punti diametralmente

opposti. Lo spazio quoziente $\mathbb{RP}^n = S^n / \sim$ prende il nome di **spazio proiettivo** (reale) di dimensione n . È chiaro che nel caso $n = 2$ si ottiene esattamente il piano proiettivo definito nell'esempio precedente. Nel caso $n = 1$ lo spazio \mathbb{RP}^1 si chiama **retta proiettiva** (reale).

Anche per gli spazi proiettivi possiamo mostrare un secondo modello. In $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ si consideri la relazione d'equivalenza \sim che identifica le coppie di vettori proporzionali (appartenenti cioè ad uno stesso sottospazio vettoriale di dimensione uno) e si costruisca lo spazio quoziente $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. È chiaro che gli elementi di $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ sono i sottospazi vettoriali di dimensione uno privati del vettore nullo e che questi possono identificarsi con le rette di \mathbb{R}^{n+1} per l'origine. Ora se, per ogni retta ℓ contenente l'origine, denotiamo con $\{\mathbf{x}_\ell, -\mathbf{x}_\ell\}$ l'insieme dei due punti che la retta ℓ ha in comune con la sfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, la funzione

$$\ell \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \rightarrow \{\mathbf{x}_\ell, -\mathbf{x}_\ell\} \in \mathbb{PR}^n = S^n / \sim$$

risulta un omeomorfismo tra lo spazio quoziente $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ e lo spazio proiettivo \mathbb{RP}^n .

Con riferimento all'ultimo modello di \mathbb{PR}^n , se V_{m+1} è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} di dimensione $m + 1$, l'immagine S_m di $V_{m+1} \setminus \{0\}$ mediante la proiezione canonica $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ prende il nome di **sottospazio proiettivo di dimensione m** . I sottospazi proiettivi di dimensioni $0, 1, 2, n - 1$ si chiamano rispettivamente **punti, rette, piani, iperpiani**. Riportiamo di seguito alcune proprietà di \mathbb{PR}^n :

- due punti distinti di \mathbb{RP}^n appartengono ad un'unica retta;
- un sottospazio proiettivo di dimensione $m < n$ e un punto di \mathbb{RP}^n che non si appartengono sono contenuti in un unico sottospazio proiettivo di dimensione $m + 1$;
- un iperpiano e un sottospazio proiettivo m -dimensionale che non si appartengono di \mathbb{RP}^n s'intersecano in un sottospazio proiettivo di dimensione $m - 2$;
- ogni sottospazio proiettivo di dimensione m di \mathbb{RP}^n è omeomorfo allo spazio proiettivo \mathbb{RP}^m . □

ESERCIZIO 1.10.26. (\mathbb{RP}^1 e S^1 sono omeomorfi) Provare che la retta proiettiva reale e una circonferenza sono spazi omeomorfi. □

1.11 Superfici topologiche

La *superficie sferica* S^2 , con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^2 , non è omeomorfa a \mathbb{R}^2 : S^2 è uno spazio compatto a differenza di \mathbb{R}^2 . Nonostante ciò S^2

si può ricoprire con aperti ciascuno dei quali è omeomorfo a \mathbb{R}^2 : basta prendere, per esempio, i complementari di due suoi punti distinti. La stessa proprietà è verificata anche dal *toro*, dalla *bottiglia di Klein* e dal *piano proiettivo reale*, come già osservato negli **Esempi 1.10.22, 1.10.23, 1.10.24**. In modo del tutto informale possiamo dire che se ci limitiamo ad osservare questi spazi nelle vicinanze di un punto li percepiamo “*piatti*” e “*somiglianti*” al piano euclideo, mentre, visti nella loro globalità, possono avere le forme le più svariate. Gli spazi topologici, che come gli esempi precedenti hanno la proprietà di essere “*localmente*” omeomorfi a \mathbb{R}^2 , prendono il nome di *superfici topologiche*.

DEFINIZIONE 1.11.1. Uno spazio topologico Σ si dice **superficie topologica** se è connesso, di Hausdorff, a base numerabile e tale che, per ogni punto $a \in \Sigma$, esiste un intorno aperto di a omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2 (e quindi a \mathbb{R}^2). \square

ESERCIZIO 1.11.2. Provare che ogni punto di una superficie topologica appartiene ad un intorno chiuso omeomorfo a D^2 (cerchio chiuso di \mathbb{R}^2). \square

ESEMPI 1.11.3. \mathbb{R}^2 e tutti i suoi *sottospazi aperti e connessi* sono chiaramente esempi di superfici topologiche. I sottospazi non aperti di \mathbb{R}^2 non sono superfici topologiche. Altri esempi di superfici topologiche sono: la *superficie sferica* S^2 , il *toro*, la *bottiglia di Klein*, il *piano proiettivo reale* (cfr. **Esempi 1.10.22, 1.10.23, 1.10.24**), le *superfici algebriche di* \mathbb{R}^3 . \square

ESEMPIO 1.11.4. (Quozienti di poligoni etichettati) In \mathbb{R}^2 consideriamo un poligono regolare P_{2n} con $2n$ lati ($n > 1$) e, fissato un verso di percorrenza ω^+ della frontiera ∂P_{2n} , ordiniamo linearmente l'insieme dei suoi lati $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2n}$ in modo coerente col verso di percorrenza ω^+ . Osserviamo esplicitamente che P_{2n} è un sottospazio connesso e compatto di \mathbb{R}^2 . Un lato di P_{2n} su cui si sia fissato un orientamento si chiama *lato orientato*. Una funzione che ad ogni lato di P_{2n} associa uno dei suoi due orientamenti si chiama *orientazione dei lati di* P_{2n} e la coppia formata da P_{2n} e una sua orientazione dei lati si dice **poligono a lati orientati**.

Consideriamo ora le parole su n lettere a_1, a_2, \dots, a_n ad esponenti ± 1 del tipo

$$a_{j_1}^{\pm 1} a_{j_2}^{\pm 1} \dots a_{j_{2n}}^{\pm 1}, \quad (1.38)$$

dove ogni lettera a_j compare esattamente due volte. Ogni parola di questo tipo si chiama **etichettatura** di P_{2n} e determina l'orientazione dei lati di P_{2n} che assegna a ciascun lato ℓ_j l'orientamento concorde o discorde con ω^+ a seconda che l'esponente di a_j sia $+1$ o -1 . La coppia formata da P_{2n} e una sua etichettatura si dice **poligono etichettato**.

A questo punto, fissata un'etichettatura di P_{2n} , ad ogni lato ℓ è associata la stessa lettera di un solo altro lato ℓ' ed esiste un unico omeomorfismo lineare $\varphi_{\ell, \ell'}$ tra questi due lati che rispetta le orientazioni ad essi associate dall'etichettatura (cfr.

Osservazione 1.5.20). Possiamo allora considerare in P_{2n} la relazione d'equivalenza \sim che su ∂P_{2n} identifica le coppie di punti corrispondenti in un omeomorfismo del tipo $\varphi_{\ell, \ell'}$ e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a P_{2n} . Lo spazio quoziente P_{2n}/\sim di P_{2n} rispetto alla relazione d'equivalenza determinata da un'etichettatura di P_{2n} è connesso e compatto, perchè tale è P_{2n} . Esso, inoltre, è una *superficie topologica*, come subito si prova con considerazioni analoghe a quelle fatte per il toro nella parte finale dell'**Esempio 1.10.22**. A volte, con abuso di notazione, la superficie quoziente associata ad un poligono etichettato si denota con la stessa parola che indica l'etichettatura del poligono. Così, per esempio, la parola *abab* indica il piano proiettivo (cfr. **Figura 1.20**). \square

OSSERVAZIONE 1.11.5. Fissato un verso di percorrenza ω^+ della frontiera ∂P_{2n} di un poligono regolare P_{2n} a lati orientati, un'etichettatura corrispondente allo spazio quoziente, ottenuto da P_{2n} identificando a coppie i suoi lati, si ottiene nel seguente modo:

1. si sceglie arbitrariamente un vertice e si assegna una stessa lettera ai lati che devono identificarsi;
 2. partendo dal vertice scelto e seguendo il verso di percorrenza ω^+ , si etichettano i lati, nell'ordine in cui si incontrano,
 - con la lettera assegnata se l'orientazione indicata su di essi è concorde con ω^+ ,
 - con la lettera assegnata ad esponente -1 se l'orientazione indicata su di essi è non concorde con ω^+ .
- \square

ESEMPIO 1.11.6. (Quozienti di quadrati etichettati) Con riferimento a due lettere a, b e al verso di percorrenza orario dei lati di un quadrato, le etichettature

$$aba^{-1}b^{-1}, ab^{-1}a^{-1}b^{-1}, abab$$

determinano rispettivamente il *toro*, la *bottiglia di Klein* e il *piano proiettivo reale*. Da notare che *etichettature distinte di un medesimo poligono possono dar luogo ad una stessa superficie*; per esempio, *abab* e $a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}$ sono etichettature diverse del quadrato che danno luogo al piano proiettivo. \square

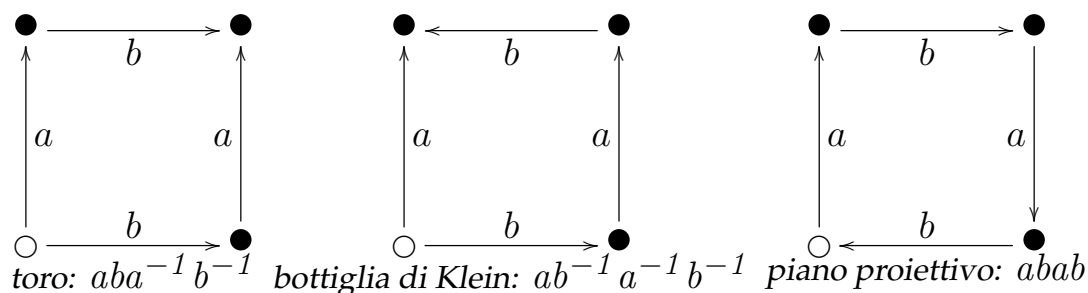


Figura 1.21: Quozienti di quadrati etichettati

Nel seguito, col termine “*superficie*” intenderemo sempre “*superficie topologica*”.

Per i quozienti dei poligoni etichettati vale il seguente fondamentale risultato (per una dimostrazione si veda per esempio [5]).

PROPOSIZIONE 1.11.7. (I quozienti dei poligoni etichettati esauriscono le superfici compatte) Ogni superficie compatta è omeomorfa al quoziente di un opportuno poligono etichettato. \square

1.11.1 Classificazione delle superfici compatte

Iniziamo il paragrafo introducendo una costruzione che, a partire da due superfici compatte, permette di ottenerne una terza mediante operazioni dette di “*taglia*” e “*incolla*”. In modo non formale l’operazione può descriversi nel seguente modo: si “*taglia*” da ciascuna delle due superfici assegnate un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto B^2 di \mathbb{R}^2 e si “*incollano*” gli spazi così ottenuti lungo le frontiere dei due aperti eliminati.

DEFINIZIONE 1.11.8. (Somma connessa) Siano Σ_1, Σ_2 due superfici compatte, U_1, U_2 due aperti omeomorfi a B^2 rispettivamente di Σ_1 e Σ_2 e

$$h : \partial U_1 \rightarrow \partial U_2$$

un omeomorfismo tra le frontiere di U_1 e U_2 , che risultano omeomorfe alla circonferenza S^1 (cfr. **Esercizio 1.11.2**). Consideriamo lo spazio somma (cfr. **Esempio 1.3.11**)

$$X = (\Sigma_1 \setminus U_1) \sqcup (\Sigma_2 \setminus U_2)$$

e la relazione d’equivalenza \sim su X che identifica le coppie di punti in $\partial U_1 \cup \partial U_2$ che si corrispondono in h e lascia equivalente solo a se stesso ogni altro punto. Lo spazio quoziente X / \sim , come subito si prova, risulta una superficie compatta che si dice **somma connessa** di Σ_1 e Σ_2 e si denota con $\Sigma_1 \# \Sigma_2$. \square

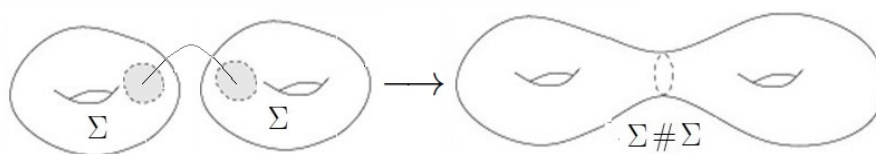
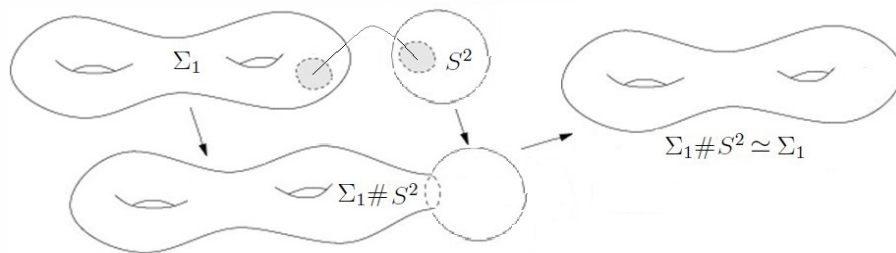


Figura 1.22: Somma connessa di due tori

Se $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sono superfici, è possibile provare che:

- la somma connessa $\Sigma_1 \# \Sigma_2$, a meno di omeomorfismi, non dipende dagli aperti U_1, U_2 scelti rispettivamente in Σ_1 e Σ_2 ;
- la somma connessa di Σ_1 e di una superficie sferica S^2 è omeomorfa a Σ_1 ;

Figura 1.23: $\Sigma_1 \# S^2 \simeq \Sigma_1$

- $\Sigma_1 \# \Sigma_2 \simeq \Sigma_2 \# \Sigma_1$;
- $(\Sigma_1 \# \Sigma_2) \# \Sigma_3 \simeq \Sigma_1 \# (\Sigma_2 \# \Sigma_3)$.

Dall'ultima relazione segue, per induzione, che è ben definita **la somma connessa**

$$\Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \cdots \# \Sigma_k$$

di $k (> 2)$ superfici $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$.

Di solito la superficie sferica S^2 si denota con \mathbf{T}_0 , il toro con \mathbf{T}_1 e la somma connessa di g tori con \mathbf{T}_g , per ogni intero $g > 1$. La superficie \mathbf{T}_g prende il nome di g -**toro** e una superficie compatta omeomorfa a \mathbf{T}_g si dice di **genere g** . In modo non formale, possiamo ritenere che il genere conti il numero di "buchi" di un g -toro. La superficie sferica S^2 e il toro sono, dunque, superfici di genere 0 e 1, rispettivamente. Si denota inoltre con \mathbf{U}_1 il piano proiettivo (reale) e con \mathbf{U}_m la somma connessa di m piani proiettivi, per ogni intero $m > 1$. La superficie \mathbf{U}_m prende il nome di m -**piano proiettivo**.

ESEMPIO 1.11.9. La somma connessa di due tori T_2 è omeomorfa al quoziente dell'ottagono etichettato $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ (cfr. prima riga della **Figura 1.24**). La somma connessa di due piani proiettivi U_2 è omeomorfa al quoziente del quadrato etichettato $aabb$ (cfr. seconda riga della **Figura 1.24**). \square

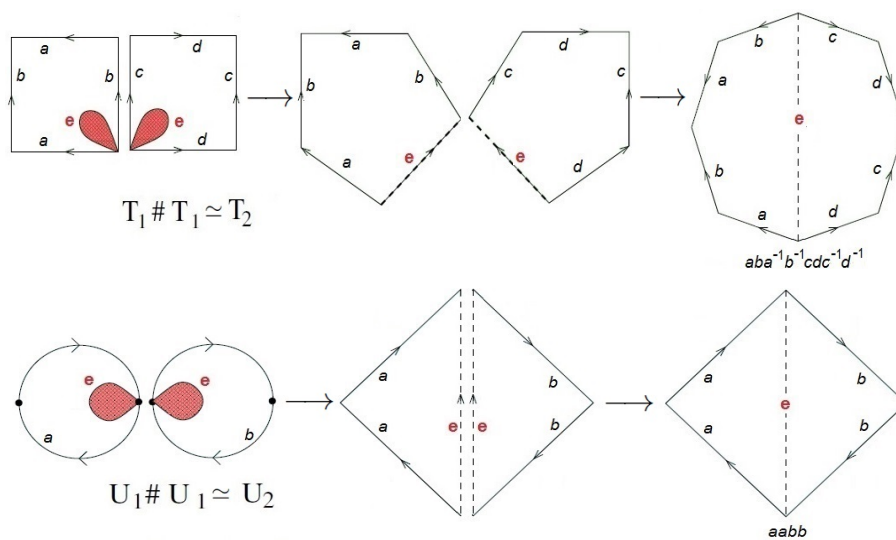


Figura 1.24: $T_2 \simeq aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ e $U_2 \simeq aabb$

ESEMPIO 1.11.10. La somma connessa U_2 di due piani proiettivi è omeomorfa alla bottiglia di Klein (cfr. **Figura 1.25**). □

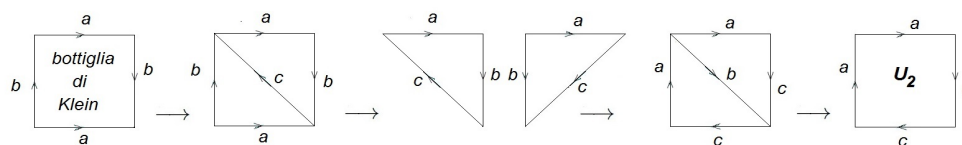


Figura 1.25: (bottiglia di Klein) $\# U_2$

ESEMPIO 1.11.11. ($T_1 \# U_1 \simeq U_3$) Premesso che

- la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa al quoziente dell'esagono etichettato $ccbab^{-1}a^{-1}$ (cfr. prima riga della **Figura 1.26**)
- la somma connessa della bottiglia di Klein e di un piano proiettivo è omeomorfa al quoziente dell'esagono etichettato $ccb^{-1}ab^{-1}a^{-1}$ (cfr. seconda riga della **Figura 1.26**),

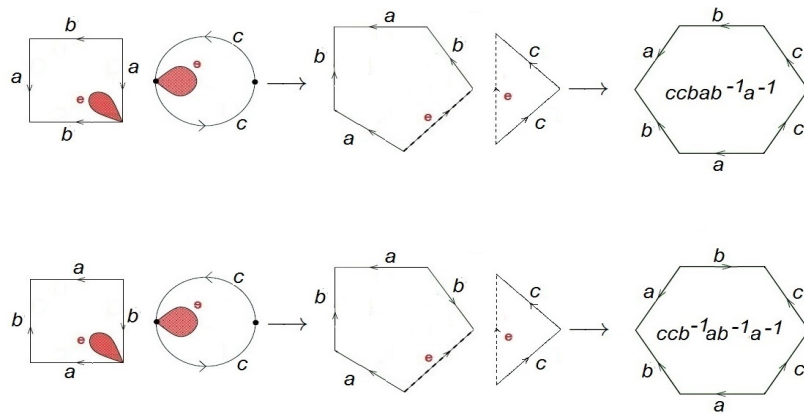


Figura 1.26: $T_1 \# U_1$ e (bottiglia di Klein) $\# U_1$

si ha che **la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi**: $T_1 \# U_1 \simeq U_3$. Per provare questa proprietà, tenendo conto dell'esempio precedente, basta far vedere che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo e la somma connessa della bottiglia di Klein e di un piano proiettivo sono entrambe omeomorfe al quoziente dell'esagono etichettato $cacbab^{-1}$ (cfr. Figura 1.27). \square

L'esempio precedente si generalizza nel seguente modo.

PROPOSIZIONE 1.11.12. ($T_g \# U_h \simeq U_{2g+h}$) La somma connessa di un g -toro e di un h -piano proiettivo è omeomorfa ad un $(2g + h)$ -piano proiettivo.

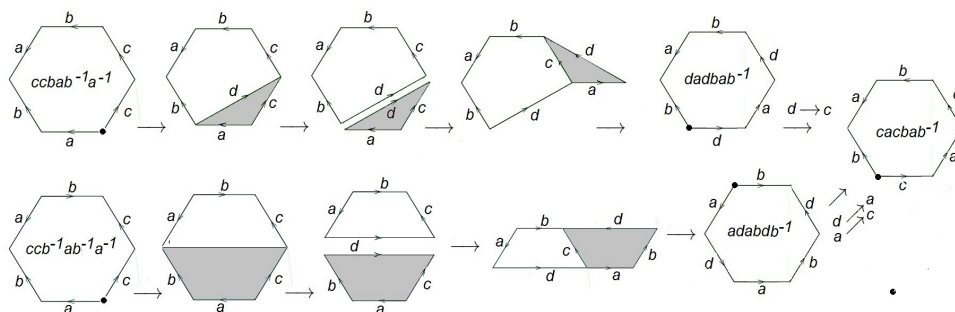
DIMOSTRAZIONE. Proviamo l'asserto per induzione su g . In forza dell'esempio precedente, l'asserto è vero per $g = 1$:

$$T_1 \# U_h \simeq (T_1 \# U_1) \# U_{h-1} \simeq U_3 \# U_{h-1} \simeq U_{h+2}.$$

Ora, se assumiamo l'asserto vero per $g' < g$, abbiamo:

$$T_g \# U_h \simeq T_{g-1} \# (T_1 \# U_1) \# U_{h-1} \simeq T_{g-1} \# U_3 \# U_{h-1} \simeq T_{g-1} \# U_{h+2} \simeq U_{2g+h},$$

come volevamo dimostrare. \square

Figura 1.27: $T_1 \# U_1 \simeq U_3$

Concludiamo questo paragrafo con l'enunciato di un teorema di classificazione delle superfici compatte (per una dimostrazione si veda per esempio [5]).

PROPOSIZIONE 1.11.13. (Classificazione delle superfici compatte) *Sia Σ una superficie compatta, allora:*

- se Σ non contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius (superficie orientabile), è omeomorfa ad una sfera o ad un g -toro, $g > 0$;
- se Σ contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius (superficie non orientabile), è omeomorfa ad un piano proiettivo (reale) o ad un g -piano proiettivo, $g > 1$.

Inoltre, per $g \neq g'$, un g -toro non è omeomorfo a un g' -toro e un g -piano proiettivo non è omeomorfo ad un g' -piano proiettivo. \square

Elenco delle figure

1.1	Proposizione 1.2.13	9
1.2	Proposizione 1.2.14	10
1.3	Proprietà di Hausdorff	10
1.4	Proposizione 1.3.57	28
1.5	Esempio 1.5.22	40
1.6	Esempio 1.5.26	41
1.7	Esempio 1.5.28	42
1.8	Esempio 1.5.29	43
1.9	Esempio 1.5.30	44
1.10	Facce opposte di un cubo	45
1.11	I cinque poliedri regolari	49
1.12	Proposizione 1.8.7	60
1.13	Corollario 1.8.8	61
1.14	Proposizione 1.10.14	76
1.15	Proposizione 1.10.16	77
1.16	Il cilindro	79
1.17	Il nastro di Möbius	80
1.18	Il toro	81
1.19	La bottiglia di Klein	82
1.20	Il piano proiettivo reale	83
1.21	Quozienti di quadrati etichettati	86
1.22	Somma connessa di due tori	87

1.23	$\Sigma_1 \# S^2 \simeq \Sigma_1$	88
1.24	$T_2 \simeq aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ e $U_2 \simeq aabb$	89
1.25	(bottiglia di Klein) $\#U_2$	89
1.26	$T_1 \# U_1$ e (bottiglia di Klein) $\#U_1$	90
1.27	$T_1 \# U_1 \simeq U_3$	91

Bibliografia

- [1] Allen Hatcher, *ALGEBRAIC TOPOLOGY*, Cambridge University Press, 2002 (<http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/AT.pdf>).
- [2] Seymour Lipschutz, *TOPOLOGIA*, McGraw-Hill, 1994
- [3] Luciano Lomonaco, *ELEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA*, Unitor, 1991.
- [4] Bruno Martelli, *CORSO DI TOPOLOGIA 2006*, Appunti delle lezioni per il corso di "Topologia e analisi complessa", Università di Pisa (<http://www.dm.unipi.it/~martelli/didattica/matematica/2006/topologia.pdf>).
- [5] Gianluca Occhetta, *NOTE DI TOPOLOGIA GENERALE E PRIMI ELEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA*, Dipartimento di Matematica, Università di Trento (<http://www.science.unitn.it/~occhetta/studenti/disp4fc.pdf>).
- [6] Domenico Olanda, *NOTE DI GEOMETRIA*, EDISU Univerità di Napoli "Federico II", 2008.
- [7] Assunta Russo, *LEZIONI DI TOPOLOGIA*, Aracne, 2002.
- [8] Edoardo Sernesi, *GEOMETRIA 2*, Bollati Boringhieri, 1994.
- [9] Edoardo Sernesi, *CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE TOPOLOGICHE*, Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre (<http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE30809/superfici.pdf>).