

Diagonalizzazione di matrici

Maria Rosaria Celentani

Siano K un campo e $M_{n,n}(K)$ l'insieme delle matrici $n \times n$ a coefficienti in K . Siano $A, B \in M_{n,n}(K)$: diremo che A e B sono **coniugate** o **simili**, se esiste una matrice $C \in M_{n,n}(K)$ invertibile, tale che $A = C^{-1}BC$. Ad esempio consideriamo le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

tali matrici sono coniugate in quanto considerata matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la sua inversa $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ha:

$$A = C^{-1}BC$$

Ovviamente matrici simili sono equivalenti ma non tutte le matrici equivalenti sono simili. Una matrice $D = (a_{ij})$ si dice **diagonale** se $a_{ij} = 0$ ogni volta che $i \neq j$: dunque in una matrice diagonale gli unici elementi non nulli sono (eventualmente) quelli della diagonale. Ad esempio sono diagonali le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

non è diagonale in quanto l'elemento di posto $(1, 2)$ è diverso da 0 ($a_{12} = 1$)

Diremo che la matrice A è **diagonalizzabile** se e solo se è simile ad una matrice diagonale. Ad esempio la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ non è diagonale, ma è diagonalizzabile. Infatti se $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, allora $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$ e

$$B^* = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Pertanto B^* è una matrice diagonale, simile alla matrice B .

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matrice diagonale: per come è definito il prodotto tra matrici, si ha

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & 0 \\ 0 & a_{ii}^k & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn}^k \end{pmatrix}, \text{ per ogni numero intero } k \geq 0. \text{ In tal caso il}$$

calcolo delle potenze di A risulta semplificato. Se poi A è una matrice non diagonale ma diagonalizzabile, da $A = P^{-1}BP$ (con B matrice diagonale) segue $A^k = P^{-1}B^kP$, per ogni numero intero $k \geq 0$. Si capisce pertanto l'utilità di essere in grado di "riconoscere" le matrici diagonalizzabili e di individuare la matrice P che permette la diagonalizzazione. Scopo di questo paragrafo sarà pertanto determinare un criterio di diagonalizzazione per matrici $n \times n$.

Iniziamo col dare qualche altra definizione. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matrice $n \times n$ e $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ un vettore di K^n . Abbiamo definito il prodotto

$$A \cdot \mathbf{v} = (a_{11} \cdot v_1 + \dots a_{1n} \cdot v_n, \dots, a_{n1} \cdot v_1 + \dots a_{nn} \cdot v_n) = \mathbf{w}$$

diremo che il vettore $\mathbf{v}$ è un **autovettore** per la matrice A se risulta

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \text{ con } \lambda \in K \\ (\lambda \text{ viene detto } \mathbf{autovalore} \text{ per } A)$$

Attenzione: non tutte le matrici ammettono autovettori (e, di conseguenza, autovalori). Inoltre una stessa matrice può avere autovalori distinti. Consideriamo ad esempio la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 = 8 \\ 2 \cdot 4 + (-6) \cdot 1 = 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque, in base alle definizioni date, si ha che il vettore $\mathbf{v} = (4, 1)$ risulta essere un autovettore per la matrice B con autovalore 2. D'altronde si ha anche:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

e dunque anche il vettore $\mathbf{w} = (-12, -3)$ è un autovettore per la matrice A con autovalore 2. Se moltiplico la matrice B per il vettore $\mathbf{u} = (1, 2)$ ottengo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -5 \\ 2 \cdot 1 + (-6) \cdot 2 = -10 \end{pmatrix} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque anche -5 risulta essere un autovalore per B . Infine

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 = -1 \\ 2 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 = -4 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{R}$$

pertanto il vettore $\mathbf{z} = (1, 1)$ non è un autovettore per B . Abbiamo dunque trovato autovettori ed autovalori distinti per la matrice A ed abbiamo potuto osservare che non tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ sono autovettori per tale matrice. (In particolare gli autovalori trovati risultano essere gli elementi della diagonale della matrice diagonale B^* simile a B ! Come vedremo nel seguito questo non è un caso). Rimane il problema di determinare autovalori ed autovettori di una matrice A : c'è un modo per sapere se la matrice A è o meno diagonalizzabile e, nel caso in cui lo sia, determinare la matrice P che permette di diagonalizzare A ?

Siano A una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo K e $\lambda \in K$. Poniamo $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in K^n : A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}$, vale a dire l'insieme dei vettori di K^n che risultano essere autovettori per la matrice A con autovalore λ . Tale insieme V_λ risulta essere un sottospazio (eventualmente quello nullo) di K^n . Infatti:

1. $V_\lambda \neq \emptyset$: $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}$ e dunque $\mathbf{0} \in V_\lambda$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_\lambda$ si ha $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ e $A \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$; allora $A \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = A \cdot \mathbf{v} - A \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} - \lambda \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ e dunque $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in V_\lambda$;
3. se $\mathbf{w} \in V_\lambda$ ed $\alpha \in V_\lambda$, da $A \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$ segue $A \cdot (\alpha \mathbf{w}) = \alpha(A \cdot \mathbf{w}) = \alpha(\lambda \mathbf{w}) = \lambda(\alpha \mathbf{w})$ e dunque $\alpha \mathbf{w} \in V_\lambda$

pertanto V_λ è un sottospazio vettoriale di K^n : tale sottospazio è detto **autosottospazio relativo all'autovalore λ** . Inoltre se λ e μ sono autovalori distinti per la matrice A , si ha $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$. Infatti se $\mathbf{v} \in V_\lambda \cap V_\mu$, si ha:

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} = \mu \mathbf{v}, \text{ per cui } \lambda \mathbf{v} - \mu \mathbf{v} = (\lambda - \mu) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

e, per le proprietà degli spazi vettoriali, dall'essere $(\lambda - \mu) \neq 0$, segue $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, per cui $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$. Allora se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sono autovalori distinti della matrice A , si ha che $L(V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_s}) = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$.

E' evidente che il primo passo da compiere consiste nel determinare gli (eventuali) autovalori della matrice A . Se λ è un autovalore per la matrice A con autovettore $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ si ha

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{v}$$

dunque da $(A - \lambda \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (per ogni vettore $\mathbf{v}$) segue che la matrice $A - \lambda \mathbf{I}_n$ deve avere determinante uguale a 0. Si chiama polinomio **caratteristico della matrice A** il polinomio $p_A(\lambda) = |A - \lambda \mathbf{I}_n|$: **tutte e sole le sue (eventuali) radici risultano essere gli autovalori della matrice A**.

Esempio 1. Cerchiamo ad esempio gli eventuali autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di tale matrice risulta essere:

$$p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) + 3] + 2[(-1)(1-\lambda)] = -\lambda^2(\lambda - 1)$$

Pertanto due autovalori distinti risultano $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Consideriamo la

$$\text{matrice } B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} :$$

$$p_B(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -6-\lambda \end{pmatrix} \right| = (3-\lambda)(-6-\lambda) + 8 = -18 + 3\lambda + \lambda^2 + 8 = \lambda^2 + 3\lambda - 10$$

le cui radici sono $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = 2$ (e già avevamo notato che gli autovalori di tale matrice risultano essere proprio -5 e 2). Consideriamo ora la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} : p_C(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -7 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(-\lambda) + 14 = \lambda^2 - \lambda + 14$$

tale polinomio è privo di radici e dunque non la matrice C non ammette autovalori.

Consideriamo infine la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$: $p_D(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$. Pertanto gli autovalori della matrice D sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.

Rimane il problema di determinare gli autospazi relativi ad un autovalore. Sia dunque λ_0 un autovalore per matrice A . Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ_0 se e solo se:

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda_0 \cdot \mathbf{v} \text{ e dunque } A \cdot \mathbf{v} - \lambda_0 \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Allora $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ risulta essere un autovettore relativo all'autovalore λ_0 se e solo se le sue componenti risultano essere soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice associata è $\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}_n$.

Esempio 2. Determiniamo gli autospazi relativi agli autovettori delle matrici prima considerate.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ammette due autovalori: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Iniziamo col determinare V_0 , l'autospazio relativo all'autovalore 0. Il sistema omogeneo la cui matrice risulta essere $A - 0\mathbf{I}_3 = A$ è:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da $V_0 = \{(-2t, -3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Determiniamo ora V_1 . La matrice da considerare in tal caso è $A - (-1)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, matrice associata al sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da $V_1 = \{(t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. Da quanto già osservato segue che il sottospazio generato da V_0 e V_1 è somma diretta: $V = V_0 \oplus V_1$, $\dim V = 2$ (e dunque V è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^3$).

Ripetiamo lo stesso procedimento per individuare gli autospazi della matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ prima considerata. Gli autovalori di tale matrice risultano essere

$\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = 2$. Gli autospazi saranno dunque V_{-5} , insieme delle soluzioni di $\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ e dunque $V_{-5} = \{(t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$, mentre V_2 è l'insieme delle soluzioni di $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$ e dunque $V_2 = \{(4t, t) : t \in \mathbb{R}\}$. In questo caso si ha $V_{-5} \oplus V_2 = \mathbb{R}^2$.

Rimangono da determinare gli autospazi relativi agli autovalori della matrice D . Se nella matrice $D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$ sostituiamo $\lambda = 2$ otteniamo la matrice $D - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ il cui sistema omogeneo associato è $\{x_3 = 0\}$ pertanto $V_2 = \{(t, s, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$. Per determinare poi V_3 sostituiamo $\lambda = 2$ nella matrice $D - \lambda I_3$ ottenendo la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ associata al sistema omogeneo $\begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ il cui insieme delle soluzioni è dato da $V_3 = \{(0, s, -s) : s \in \mathbb{R}\}$ di dimensione 1. In questo caso si ha $V_3 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$.

Si definisce **molteplicità algebrica** dell'autovalore λ_i la molteplicità di λ_i come radice del polinomio caratteristico: $m_a(\lambda_i)$.

Si definisce **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ_i la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore λ_i : $m_g(\lambda_i) = \dim(V_{\lambda_i})$

Evidentemente si ha, per ogni λ_i , $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$. Pertanto se $m_a(\lambda_i) = 1$ si ha necessariamente $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$. Altrimenti può succedere che risulti $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$: è questa la situazione che abbiamo trovato

nell'**esempio 2** dove la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ammette due autovalori:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ poiché $p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^2(\lambda - 1)$; le

molteplicità algebriche sono date da $m_a(0) = 2$, $m_a(1) = 1$, mentre le molteplicità geometriche trovate sono $m_g(0) = \dim V_0 = 1$, $m_g(1) = \dim V_1 = 1$. Pertanto in questo caso si ha: $m_g(0) < m_a(0)$ e $m_g(1) = m_a(1)$. Sempre nell'**esempio 2** si è trovato che la matrice B è tale che $m_g(-5) = m_a(-5) = 1$, $m_g(2) = m_a(2) = 1$. Infine per la matrice D si ha $m_g(2) = m_a(2) = 2$ e $m_g(3) = m_a(3) = 1$.

Vale il seguente risultato (di cui si omette la dimostrazione):

Teorema: Siano A una matrice $n \times n$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ i suoi autovalori distinti. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) la matrice A è diagonalizzabile;

ii) Se indichiamo con V_{λ_i} l'autospazio relativo all'autovalore λ_i , si ha $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} = \mathbb{R}^n$;

iii) per ogni λ_i la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica ed inoltre la somma delle molteplicità geometriche è n :

$$m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \dots + m_g(\lambda_t) = n$$

Pertanto risultano diagonalizzabili le matrici B e D dell'esempio 2, mentre non lo è la matrice A .

Sia A una qualsiasi matrice $n \times n$ diagonalizzabile e dunque tale che $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} = \mathbb{R}^n$. Allora il sistema B che si ottiene considerando l'unione di basi di $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_t}$ è una base di $\mathbb{R}^n$. Pertanto se $B_1 = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{s_1}]$ è una base di V_{λ_1} , $B_2 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s_2}]$ è una base di $V_{\lambda_2}, \dots$, $B_t = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{s_t}]$ è una base di V_{λ_t} , allora $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_t$ è una base per $\mathbb{R}^n$: gli elementi di tale base sono tutti autovettori: una base i cui vettori siano tutti autovettori è detta **base spettrale**. Un esempio di base spettrale è dato, nel caso della matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ da $B = [(4, 1), (1, 2)]$. Nel caso della matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ si ha una base spettrale considerando $B = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, -1)]$.

La matrice P che permette di diagonalizzare la matrice A si ottiene considerando la matrice che ha come vettori colonna i vettori delle basi di $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_t}$. Ad esempio nel caso della matrice B otteniamo la matrice

$$P_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ la cui inversa è } P_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/7 & 4/7 \end{pmatrix}. \text{ Abbiamo già}$$

osservato che $P_B^{-1} B P_B = B^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Analogamente, nel caso della

$$\text{matrice } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ si trova:}$$

$$P_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P_D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ per cui si ha:}$$

$$P_D^{-1} D P_D = D^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Riassumendo: quando si vuole studiare il problema della diagonalizzazione di una matrice quadrata A $n \times n$ bisogna procedere nel seguente modo:

1. Scrivere il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ della matrice A e studiarne le radici: tali (eventuali) radici risulteranno essere gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ della matrice A .

2. Studiare la molteplicità algebrica $m_a(\lambda_i)$ di ogni radice λ_i : se la somma di tale molteplicità risulta minore di n la matrice non è diagonalizzabile. Se tale somma è n bisogna andare a determinare le molteplicità geometriche dei λ_i .

3. Determinare gli autospazi V_{λ_i} e la loro dimensione (così da avere la molteplicità geometrica $m_g(\lambda_i)$).

Per determinare gli autospazi V_{λ_i} bisogna determinare le soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice coincide con $A - \lambda_i I_n$