

Pietro Baldi

Analisi matematica I

Programma svolto nell'anno accademico 2015-2016, dal 22 settembre al 17 dicembre 2015
Lezioni 1-37

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica, cognomi Me-Z.

Il libro di testo adottato durante il corso è *Analisi Matematica Uno*, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori Editore, e l'eserciziario allegato, *Esercizi di Matematica*, Volume I, Tomi 1,2,3,4. Un altro testo consultato è *Analisi Uno*, G. De Marco, Zanichelli.

Gli esercizi assegnati per casa, gli esercizi svolti a lezione e gli esercizi delle dispense (file pdf sul sito docenti) sono parte integrante e fondamentale del corso di Analisi matematica I.

Lezione 1 (martedì 22/9/2015, ore 10:30-12:30)

Introduzione: panoramica sui contenuti del corso e informazioni varie.

Lezione 2 (mercoledì 23/9/2015, ore 15:30-17:30)

- I numeri reali. Assiomi relativi alle operazioni, relativi all'ordinamento e assioma di completezza.
- Conseguenze degli assiomi: regole di calcolo. Dimostrazione.

Lezione 3 (giovedì 24/9/2015, ore 8:30-10:30)

- Altre regole di calcolo, con prodotti, inversi, opposti, segni, disuguaglianze, quadrati. Dimostrazione.
- Intervalli in \mathbb{R} : definizione.
- Il modulo di un numero reale: definizione, interpretazione di $|x|$ come distanza tra i punti x e 0 sulla retta dei numeri reali. Proprietà del modulo.
- Proposizione: $|x| < R \iff -R < x < R$. Dimostrazione.
- La disuguaglianza triangolare. Dimostrazione. La disuguaglianza per la differenza dei moduli. Dimostrazione.
- Massimo e minimo di un insieme (non vuoto) di numeri reali: definizione.

Lezione 4 (martedì 29/9/2015, ore 10:30-12:30)

- Unicità del massimo e del minimo di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Maggiorante, minorante di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$: definizione.
- Insiemi limitati, limitati superiormente, limitati inferiormente: definizione.
- Proposizione: $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se esiste $M > 0$ tale che $A \subseteq [-M, M]$, cioè $|a| \leq M$ per ogni $a \in A$. Dimostrazione.
- Teorema di esistenza del sup e dell'inf. Definizione dell'estremo superiore $\sup(A)$ e dell'estremo inferiore $\inf(A)$ di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrazione del teorema.
- Caratterizzazione del sup e dell'inf. Dimostrazione.
- Proposizione: se un insieme A ha minimo, allora $\min(A) = \inf(A)$; simile per il massimo. Dimostrazione.
- Calcolo di inf, sup, minimo, massimo di insiemi $A \subseteq \mathbb{R}$.
- Disuguaglianza: $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.

Lezione 5 (mercoledì 30/9/2015, ore 15:30-17:30)

- Equazioni di primo grado con uno o più moduli.
- Insiemi numerici: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} .
- Proprietà di Archimede: siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nb > a$. Dimostrazione. Corollario: \mathbb{N} è illimitato superiormente. Dimostrazione.
- Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} : per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q \in (a, b)$. Dimostrazione.
- Proprietà degli interi: 1) se $A \subseteq \mathbb{Z}$ è limitato inferiormente, allora A ha minimo; 2) se $A \subseteq \mathbb{Z}$ è limitato superiormente, allora A ha massimo; 3) se $A \subseteq \mathbb{N}$, allora A ha minimo. (Senza dimostrazione).
- Prodotti e somme di numeri pari/dispari. Dimostrazione.
- Proposizione: non esiste alcun numero razionale $c \in \mathbb{Q}$ tale che $c^2 = 2$. Dimostrazione.
- Proposizione: \mathbb{Q} non è completo. Dimostrazione.
- Disequazioni di primo grado con uno o più moduli.

Lezione 6 (giovedì 1/10/2015, ore 08:30-10:30)

Potenze, radici, logaritmi.

- Potenze con esponente intero positivo: a^n , definita per base $a \in \mathbb{R}$ ed esponente $n \in \mathbb{N}$. Regole delle potenze. Segno delle potenze pari/dispari.
- Potenze ad esponente zero: definiamo $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Potenze con esponente intero negativo: a^m , definita per base $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ed esponente $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq -1$.
- Definizione di radice quadrata: dato un numero reale $a \geq 0$, la sua radice quadrata è quel numero reale $b \geq 0$ tale che $b^2 = a$.
- Relazione tra radice, quadrato e modulo: $\sqrt{a^2} = |a|$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Potenza $a^{1/n}$, definita per base $a \geq 0$ ed esponente $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, cioè definizione di radice n -esima: dato un numero reale $a \geq 0$, la sua radice n -esima è quel numero reale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$. (Osservazione: se n è dispari, la radice n -esima $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ si può definire anche per $a < 0$).
- Potenze ad esponente razionale a^p , definite per base $a > 0$ ed esponente $p = m/n \in \mathbb{Q}$.
- Potenze ad esponente reale a^p , definite per $a, p \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
- Regole delle potenze di base positiva ed esponente reale: $a^p a^q = a^{p+q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$, $a^p b^p = (ab)^p$.
- Disuguaglianze per le potenze: (1) $a^p > 0$ per ogni $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$; (2) Confronto tra a^p e b^p (basi diverse $0 < a < b$ e stesso esponente $p \in \mathbb{R}$); (3) Confronto tra a^p e a^q (stessa base $a > 0$ ed esponenti diversi $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$). Esempi.
- Potenze con base e , notazione $\exp(p) := e^p$.
- Logaritmo di base $a > 0$, $a \neq 1$, logaritmo naturale: definizione, proprietà.

Lezione 7 (martedì 6/10/2015, ore 10:30-12:30)

- Il principio di induzione. Dimostrazione.
- Disuguaglianza di Bernoulli: $(1 + a)^n \geq 1 + na$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a \geq -1$. Dimostrazione.
- Il simbolo \sum di sommatoria e \prod di produttoria. Proprietà: $c \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n ca_k$ (proprietà distributiva della somma) e $(\prod_{k=1}^n a_k)^p = \prod_{k=1}^n a_k^p$ (regole delle potenze).
- Definizione: il fattoriale $n!$, il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$.
- Formula per le potenze del binomio: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Senza dimostrazione.
- Formula $\sum_{k=0}^n p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$. Dimostrazione.

[Mercoledì 7/10/2015 lezioni sospese per attività sismica in zona flegrea]

Lezione 8 (giovedì 8/10/2015, ore 8:30-10:30)

- Polinomi di secondo grado: radici, fattorizzazione, segno. Equazioni e disequazioni di secondo grado.
- Equazioni e disequazioni con radici quadrate e moduli.

Trigonometria.

- Misura degli angoli in radianti.
- Definizione geometrica di seno e coseno.
- Identità fondamentale $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ (teorema di Pitagora).
- Disuguaglianze immediate: $|\cos(\alpha)| \leq 1$, $|\sin(\alpha)| \leq 1$ (i cateti sono più corti dell'ipotenusa).
- Uguaglianze (che si ricavano in modo elementare dalle similitudini dei triangoli): (1) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$; (2) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$; (3) $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$; (4) $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$; (5) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$; (6) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$; (7) $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$; (8) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$; (9) $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
- Valori di seno e coseno di angoli notevoli: $0, \pi, 2\pi, \pi/2, 3\pi/2, \pi/4, \pi/3, \pi/6$.

Lezione 9 (martedì 13/10/2015, ore 10:30-12:30)

- Formula della differenza di potenze $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$. Dimostrazione.
- Formule di trigonometria: addizione, duplicazione, bisezione, prostaferesi, Werner.
- Definizione di tangente di un angolo. Interpretazione geometrica della tangente (usando la similitudine dei triangoli).
- Definizione delle funzioni trigonometriche inverse: arcsin, arccos, arctan.
- Disuguaglianza trigonometrica: (1) $|\sin(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; (2) $|\sin(x)| < |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Dimostrazione.
- Disuguaglianza trigonometrica: per ogni $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x \neq 0$, si ha $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$. Dimostrazione.
- Disuguaglianze trigonometriche: (1) $|\sin(\alpha) - \sin(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; (2) $|\cos(\alpha) - \cos(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Definizione di insieme prodotto $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.
- Piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, corrispondenza tra punti del piano e coppie (a, b) di numeri reali. Ascissa, ordinata.
- Definizione di funzione $f : A \rightarrow B$ di dominio A e codominio B .
- Definizione di grafico di funzione: $G_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subseteq A \times B$.

Lezione 10 (mercoledì 14/10/2015, ore 15:30-17:30)

- Proposizione: sia $G_f \subset \mathbb{R}^2$ il grafico di una funzione. Allora ogni retta verticale interseca G_f in al più un punto.
- Grafico della funzione polinomiale di primo grado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$: le rette. Significato geometrico dei coefficienti m, q .
- Definizione di funzione crescente, decrescente, strettamente crescente, strettamente decrescente, monotona, strettamente monotona.
- Definizione di funzione costante.
- Grafico della funzione polinomiale di secondo grado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$: le parabole con l'asse verticale. Significato geometrico del coefficiente c e del segno del coefficiente a .
- Grafico della funzione potenza $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, con esponente $n \in \mathbb{N}$.
- Simmetrie: definizione di funzione pari ($f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in A$) e di funzione dispari ($f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in A$). Significato geometrico: il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.
- Grafico della funzione potenza $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^m$, con esponente $m \in \mathbb{Z}$ (base: $x \neq 0$).
- Grafico della funzione potenza $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, con esponente reale $p \in \mathbb{R}$ (base: $x > 0$). Distinzione qualitativa dei grafici: $p > 1$, $p = 1$, $p \in (0, 1)$, $p = 0$, $p < 0$.
- Grafico della funzione esponenziale di base $a > 0$: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Distinzione qualitativa dei grafici: $a \in (0, 1)$, $a = 1$, $a > 1$. Caso notevole $f(x) = e^x = \exp(x)$, esponenziale di base e .
- Grafico della funzione logaritmo di base $a > 0$, $a \neq 1$: $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a(x)$. Distinzione qualitativa dei grafici: $a \in (0, 1)$, $a > 1$. Caso notevole: logaritmo naturale (base e).
- Grafico delle funzioni trigonometriche: la funzione seno $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, la funzione coseno $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, la funzione tangente $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione arcotangente $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$, la funzione arcseno $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, la funzione arccoseno $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

- Definizione di funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo T .
- La funzione segno $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ se $x > 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ se $x < 0$. Il suo grafico G_f .
- La funzione parte intera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Il suo grafico G_f .
- La funzione parte frazionaria: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$. Il suo grafico G_f . È una funzione periodica.
- Le funzioni seno iperbolico $\sinh(x)$ e coseno iperbolico $\cosh(x)$. Proprietà: \cosh è pari; \sinh è dispari; $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Definizione di funzione $f : A \rightarrow B$ iniettiva sul dominio A .
- Definizione di funzione $f : A \rightarrow B$ suriettiva sul codominio B .

Lezione 11 (giovedì 15/10/2015, ore 8:30-10:30)

- Definizione di funzione $f : A \rightarrow B$ biiettiva o invertibile dal dominio A al codominio B . Definizione di funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$. Uguaglianze della funzione inversa: (1) $f(f^{-1}(b)) = b$ per ogni $b \in B$; (2) $f^{-1}(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$.
- Osservazione: (1) $f : A \rightarrow B$ è iniettiva sul dominio A se e solo se ogni retta orizzontale interseca il suo grafico G_f in al più un punto. (2) $f : A \rightarrow B$ è suriettiva sul codominio B se e solo se ogni retta orizzontale di equazione $y = b$, con $b \in B$, interseca il grafico G_f in almeno un punto. (3) $f : A \rightarrow B$ è biiettiva se e solo se ogni retta orizzontale $y = b$, con $b \in B$, interseca il grafico G_f in esattamente un punto.
- Definizione di anti-immagine $f^{-1}(E)$ di un insieme $E \subseteq B$ tramite la funzione f .
- Osservazioni sul grafico della funzione inversa (il grafico di f^{-1} e quello di f sono “la stessa figura”).

Numeri complessi.

- Definizione: l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$, soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$.
- L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{z : z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Operazioni con i numeri complessi: somma, prodotto, opposto, inverso.
- Rappresentazione grafica: il piano complesso.
- Definizione di complesso coniugato: se $u = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, definiamo $\bar{u} = a - ib$. Proprietà del coniugio.
- Definizione di modulo di un numero complesso: se $u = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, definiamo $|u| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Teorema di Pitagora: $|u|$ è la distanza del punto u dall'origine. Proprietà del modulo.
- Rappresentazione grafica: dato $u \in \mathbb{C}$, disegnare \bar{u} e $-u$. Significato geometrico della disuguaglianza triangolare.
- Formula: $u\bar{u} = |u|^2$ per ogni $u \in \mathbb{C}$. Formula dell'inverso: $u^{-1} = \bar{u}/|u|^2$ per ogni $u \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$.
- Rappresentazione dei numeri complessi in coordinate polari: $a + ib = \rho \cos(\vartheta) + i\rho \sin(\vartheta) = \rho e^{i\vartheta}$.

Lezione 12 (martedì 20/10/2015, ore 10:30-12:30)

- L'esponenziale complesso: per $\vartheta \in \mathbb{R}$, si definisce $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$. Se $u = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, allora $e^u = e^{a+ib} = e^a \cos(b) + i e^a \sin(b)$.
- Proprietà dell'esponenziale complesso: $e^u e^v = e^{u+v}$ per ogni $u, v \in \mathbb{C}$.
- Formule dell'inverso e del coniugato in coordinate polari.
- Applicazione dell'esponenziale complesso per ricavare le formule della trigonometria. Formula generale $\cos(nx) + i \sin(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \sin^k(x)$.
- Calcolo delle radici complesse dei polinomi di secondo grado aventi $\Delta < 0$.
- Teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio di grado n a coefficienti complessi ha n radici complesse. (Senza dimostrazione).
- Equazioni con in numeri complessi usando le coordinate polari. Esempio svolto: $z^3 + 1 = 0$.

Le successioni.

- Successioni di numeri reali. Definizione di successione convergente ad un numero reale. Definizione di successione che tende a $+\infty$. Definizione di successione che tende a $-\infty$.

Lezione 13 (mercoledì 21/10/2015, ore 13:30-15:30)

- Definizione di successione costante. Definizione di successione definitivamente costante.
- Proposizione: se (a_n) è una successione definitivamente costante di valore c , allora a_n converge a c . Dimostrazione.
- Successioni che non hanno limite. Esempio principale: la successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite. Dimostrazione.
- Unicità del limite di una successione. Dimostrazione.
- Definizione di successione limitata.
- Esistono successioni limitate che non hanno limite (esempio: $a_n = (-1)^n$).
- Teorema: ogni successione convergente è limitata. Dimostrazione.
- Proposizione (“3 scritture equivalenti”): $a_n \rightarrow c$ se e solo se $(a_n - c) \rightarrow 0$ se e solo se $|a_n - c| \rightarrow 0$. Dimostrazione.
- Proposizione (“limite dominato”): se $|a_n - c| \leq b_n$ definitivamente, e $b_n \rightarrow 0$, allora $a_n \rightarrow c$. Dimostrazione.
- Il limite del modulo: se $a_n \rightarrow c$, allora $|a_n| \rightarrow |c|$. Dimostrazione.
- Il viceversa, in generale, è falso: $|a_n| \rightarrow |c|$ non implica che $a_n \rightarrow c$ (esempio: $(-1)^n$). Però se $c = 0$ vale anche il viceversa: se $|a_n| \rightarrow 0$, allora $a_n \rightarrow 0$.
- Proposizione: dato $C > 0$, si ha $a_n \rightarrow a$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a| < C\varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dimostrazione.
- Definizione di successione infinitesima.
- Proposizione: se a_n è infinitesima e b_n è limitata, allora la successione $(a_n b_n)$ è infinitesima. Dimostrazione.
- Teorema della permanenza del segno per le successioni: se $a_n \rightarrow a$ e $a > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente; simile per $a < 0$. Dimostrazione.

Lezione 14 (giovedì 22/10/2015, ore 8:30-10:30)

- Corollario 1 (del teorema della permanenza del segno per successioni): se $a_n \geq 0$ definitivamente e $a_n \rightarrow a$, allora $a \geq 0$; simile per $a_n \leq 0$. Dimostrazione.
- Osservazione: le disuguaglianze larghe, passando al limite, si conservano; le disuguaglianze strette, passando al limite, diventano larghe; esempio: $a_n = 1/n > 0$ per ogni n , ma $\lim a_n = 0$.
- Operazioni con i limiti finiti: somma $a_n + b_n$, prodotto $a_n b_n$, opposto $-a_n$, inverso $1/a_n$ di successioni convergenti. (Dimostrazione assegnata per esercizio).
- Corollario 2 (del teorema della permanenza del segno per successioni): (1) se $a_n \leq b_n$ definitivamente, e $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, allora $a \leq b$; (2) se $a_n \leq b$ definitivamente, e $a_n \rightarrow a$, allora $a \leq b$; simile per $a_n \geq b$. Dimostrazione.
- Teorema dei carabinieri (per le successioni). Dimostrazione.
- Operazioni con i limiti infiniti: somma, prodotto, opposto, inverso.
- Tecniche di calcolo dei limiti. Metodo generale: “mettere in evidenza la parte principale”.
- Limiti notevoli di trigonometria: (1) se $a_n \rightarrow c$, con $c \in \mathbb{R}$, allora $\sin(a_n) \rightarrow \sin(c)$, $\cos(a_n) \rightarrow \cos(c)$. (2) Se $a_n \rightarrow 0$ e $a_n \neq 0$, allora $\sin(a_n)/a_n \rightarrow 1$ e $[1 - \cos(a_n)]/a_n^2 \rightarrow 1/2$. Dimostrazione.
- Teorema di confronto (per successioni): (1) se $a_n \leq b_n$ definitivamente, e $a_n \rightarrow +\infty$, allora anche $b_n \rightarrow +\infty$; (2) se $a_n \leq b_n$ definitivamente, e $b_n \rightarrow -\infty$, allora anche $a_n \rightarrow -\infty$. Dimostrazione.
- Limite della successione $\exp(a_n)$ nei casi $a_n \rightarrow -\infty$, $a_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$, $a_n \rightarrow +\infty$; limite della successione $\log(a_n)$ nei casi $a_n \rightarrow 0$, $a_n \rightarrow c > 0$, $a_n \rightarrow +\infty$. Senza dimostrazione.

Lezione 15 (martedì 27/10/2015, ore 10:30-12:30)

- Limite notevole per l'esponenziale: se $a_n \rightarrow 0$, con $a_n \neq 0$, allora $\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \rightarrow 1$. (Senza dimostrazione).
- Limite notevole per il logaritmo: se $a_n \rightarrow 0$, $a_n > 0$, allora $\frac{\log(1+a_n)}{a_n} \rightarrow 1$. (Senza dimostrazione).
- Limiti di esponenziali con base $a > 0$, $a \neq 1$. (Senza dimostrazione).

- Limiti di potenze del tipo $a_n^{b_n}$ in cui sia la base a_n che l'esponente b_n dipendono da n : (1) se $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora $a_n^{b_n} \rightarrow a^b$; (2) se $a_n \rightarrow a$, $a > 1$, e $b_n \rightarrow +\infty$, allora $a_n^{b_n} \rightarrow +\infty$; (3) se $a_n \rightarrow a$, $a > 1$, e $b_n \rightarrow -\infty$, allora $a_n^{b_n} \rightarrow 0$; (4) se $a_n \rightarrow a$, $a \in (0, 1)$, e $b_n \rightarrow +\infty$, allora $a_n^{b_n} \rightarrow 0$; (5) se $a_n \rightarrow a$, $a \in (0, 1)$, e $b_n \rightarrow -\infty$, allora $a_n^{b_n} \rightarrow +\infty$. (Se invece $a_n \rightarrow 1$ e $b_n \rightarrow \pm\infty$, allora si ha una forma indeterminata del tipo "1 $^\infty$ "; se $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow 0$, allora si ha una forma indeterminata del tipo " ∞^0 "). (Senza dimostrazione).
- Limite notevole: confronto tra logaritmo, esponenziale e potenze polinomiali. Se $p > 0$, $x_n \rightarrow +\infty$, allora $\frac{\log(x_n)}{x_n^p} \rightarrow 0$, $\frac{\exp(x_n)}{x_n^p} \rightarrow +\infty$ (i logaritmi tendono a $+\infty$ più lentamente di qualunque potenza; gli esponenziali tendono a $+\infty$ più velocemente di qualunque potenza). (Senza dimostrazione).
- Limite notevole: se $p \in \mathbb{R}$, $a_n \rightarrow 0$, $a_n \neq 0$, allora $\frac{(1+a_n)^{p-1}}{a_n} \rightarrow p$. (Senza dimostrazione).
- Limite notevole per le potenze: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$ nei casi $a > 1$, $a = 1$, $a \in (-1, 1)$, $a \leq -1$. Dimostrazione.
- Limiti notevoli per il fattoriale: (1) dato $a > 0$, si ha $\frac{n!}{a^n} \rightarrow 0$. (2) $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$. Dimostrazione.
- Definizione di successione crescente, strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente, monotona, strettamente monotona.
- Teorema sulle successioni monotone: (1) ogni successione monotona ha limite; (2) ogni successione monotona limitata converge. Dimostrazione.
- La successione che definisce il numero e : la successione $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è crescente e limitata. Dimostrazione.
- Definizione del numero di Nepero: $e := \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Lezione 16 (mercoledì 28/10/2015, ore 15:30-17:30)

- Proposizione: per ogni $x \in \mathbb{R}$, la successione $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ è definitivamente crescente e limitata. (Senza dimostrazione).
- Definizione dell'esponenziale: $e^x = \exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$. Proprietà dell'esponenziale.
- Limite notevole: se $x_n \rightarrow \pm\infty$, allora $(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} \rightarrow e$. (Si deduce dagli altri limiti notevoli).
- Proposizione: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Allora esiste una successione (a_n) tale che $a_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow \sup(A)$ per $n \rightarrow +\infty$; analogamente esiste una successione (b_n) di elementi di A che tende a $\inf(A)$ quando $n \rightarrow +\infty$. Dimostrazione.
- Successioni definite per ricorrenza: esempio $x_{n+1} = x_n^2$.

Limiti di funzioni.

- Definizione di punto di accumulazione di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Definizione di punto di accumulazione da destra, da sinistra.
- Definizione di punto isolato di un insieme.
- Definizione: si dice che $+\infty$ è di accumulazione per l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se A è illimitato superiormente. Simile per $-\infty$.
- Teorema di caratterizzazione dei punti di accumulazione: p è di accumulazione per A se e solo se esiste una successione (a_n) tale che: (1) $a_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$; (2) $a_n \neq p \forall n \in \mathbb{N}$; (3) $a_n \rightarrow p$ per $n \rightarrow \infty$. Dimostrazione.
- Teorema di caratterizzazione dei punti di accumulazione da destra/sinistra.
- Definizione di limite di funzione (definizione basata sulle successioni).

Lezione 17 (giovedì 29/10/2015, ore 8:30-10:30)

- Definizione di limite destro/sinistro di funzione (definizione basata sulle successioni).
- Unicità del limite di funzione. Dimostrazione.
- Proposizione: non esiste il limite di $\sin(x)$ per $x \rightarrow +\infty$. Dimostrazione.
- Teorema "ponte": il limite di funzione definito tramite successioni equivale a quello definito "con ε, δ ". [Nota che per il limite $\lim_{(x \rightarrow p)} f(x) = v$ ci sono 3 casi per p ($p = +\infty$, $p \in \mathbb{R}$, $p = -\infty$) e 3 casi per v , per un totale di 9 casi]. Dimostrazione nel caso $p \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$.
- Teorema sui limiti destro e sinistro di funzione: il limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ esiste e vale v se e solo se il limite destro $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ e il limite sinistro $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ esistono entrambi e valgono entrambi v . Dimostrazione.

- Tecniche di calcolo per limiti di funzione.
- Teorema della permanenza del segno (per limiti di funzione). Dimostrazione (nel caso $p \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, $v > 0$).
- Teorema dei carabinieri (per i limiti di funzione). Senza dimostrazione (la dimostrazione è come quella per le successioni).
- Teorema di confronto (per i limiti di funzioni). Senza dimostrazione (la dimostrazione è come quella per le successioni).

Lezione 18 (martedì 3/11/2015, ore 10:30-12:30)

Esercizi sui limiti.

Lezione 19 (mercoledì 4/11/2015, ore 15:30-17:30)

Esercizi sui limiti.

Lezione 20 (giovedì 5/11/2015, ore 8:30-10:30)

Esercizi sui limiti.

Lezione 21 (martedì 10/11/2015, ore 10:30-12:30)

- Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata ammette un'estratta convergente. Dimostrazione.
- Proposizione: se (x_n) è una successione che ha limite $\lim_{(n \rightarrow +\infty)} x_n = \alpha$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$ oppure $\alpha = +\infty$ oppure $\alpha = -\infty$), e (x_{n_k}) è una sua estratta, allora anche $\lim_{(k \rightarrow +\infty)} x_{n_k} = \alpha$. Senza dimostrazione.

Funzioni continue.

- Definizione di funzione continua in un punto p . Definizione di funzione continua in un insieme A .
- Osservazione: f è continua in p se e solo se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow p} x)$, cioè: le funzioni continue in p sono quelle per cui i simboli “ f ” e “ $\lim_{x \rightarrow p}$ ” si possono scambiare.
- Le funzioni elementari: potenza, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcseno, arccoseno, arctangente sono tutte continue, ciascuna nel proprio dominio. Esempio: la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (definita per $x \neq 0$) è continua in ogni punto $x \neq 0$, cioè è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- La funzione modulo $f(x) = |x|$ è continua in \mathbb{R} . Dimostrazione.
- Teorema della permanenza del segno per le funzioni continue: se f è continua in p e $f(p) > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0 \forall x \in A$, $|x - p| < \delta$. Dimostrazione.
- La composizione di funzioni: definizione. Continuità della funzione composta. Dimostrazione.
- Teorema di Weierstrass. Dimostrazione.
- Definizione di punto di minimo/punto di massimo per f in $[a, b]$ (è un punto x del dominio). Definizione di valor minimo/valor massimo di f in $[a, b]$ (è un valore $y = f(x)$ del codominio).

Lezione 22 (mercoledì 11/11/2015, ore 15:30-17:30)

- Teorema dell'esistenza degli zeri. Dimostrazione.
- Primo teorema di esistenza dei valori intermedi: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Dimostrazione.
- Secondo teorema di esistenza dei valori intermedi: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra il suo valor minimo e il suo valor massimo in $[a, b]$. Dimostrazione.
- Definizione di funzione uniformemente continua nel dominio.
- Teorema di Cantor dell'uniforme continuità: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è uniformemente continua in $[a, b]$. Dimostrazione.

Funzioni monotone.

- Teorema: (1) se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente monotona, allora è iniettiva in A . (2) Se $f : A \rightarrow B$ è strettamente monotona e suriettiva, allora è invertibile. Inoltre se f è strettamente crescente, allora anche la funzione inversa f^{-1} è strettamente crescente; se f è strettamente decrescente, allora anche f^{-1} è strettamente decrescente. (3) Se f è invertibile e continua, allora anche la funzione inversa f^{-1} è continua. Senza dimostrazione.
- Teorema sui limiti di funzioni monotone: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ crescente (non necessariamente continua), e sia $p \in (a, b)$. Allora tutti i seguenti limiti esistono finiti, con queste disuguaglianze: $f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) \leq f(p) \leq \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \leq f(b)$. Simile se f è decrescente (cambiare verso alle disuguaglianze). Senza dimostrazione.

Lezione 23 (giovedì 12/11/2015, ore 8:30-10:30)

Le derivate.

- Il coefficiente angolare della retta che unisce due punti $A = (p, f(p))$ e $B = (p+h, f(p+h))$ sul grafico G_f di una funzione f vale $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ e si chiama rapporto incrementale.
- Definizione di funzione derivabile nel punto p . Definizione di derivata $f'(p)$ di una funzione f nel punto p . Interpretazione geometrica: $f'(p)$ è la pendenza della retta tangente a G_f nel punto $(p, f(p))$.
- Definizione di funzione derivabile in un intervallo (a, b) .
- Definizione di derivata destra/sinistra.
- Definizione di funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$.
- Calcolo delle derivate di funzioni elementari: potenze, esponenziale, logaritmo, seno, coseno. Dimostrazione.
- Proposizione: la funzione radice quadrata $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ è continua in $[0, +\infty)$, è derivabile in $(0, +\infty)$, e non è derivabile in $x = 0$. Dimostrazione.
- Proposizione: la funzione modulo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua in \mathbb{R} , è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e non è derivabile in $x = 0$. Dimostrazione.
- Proposizione: se f è derivabile in p , allora f è continua in p . Dimostrazione.
- Formule per la derivata: (1) della somma $f(x) + g(x)$; (2) del prodotto $f(x)g(x)$; (3) di $\frac{1}{f(x)}$; (4) del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$; (5) della funzione composta $g(f(x))$; (6) della funzione inversa $f^{-1}(x)$. Dimostrazione (solo un cenno per (5),(6)).
- Derivata della tangente.

Lezione 24 (martedì 17/11/2015, ore 10:30-12:30)

- Proposizione: la funzione arcseno è continua in $[-1, 1]$, è derivabile in $(-1, 1)$, non è derivabile in $x = \pm 1$. Formula della sua derivata. Simile per arccoseno.
- Proposizione: la funzione arctangente è continua e derivabile in \mathbb{R} . Formula della sua derivata.
- Derivata di $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 \pm 1})$, derivata delle funzioni iperboliche \sinh, \cosh, \tanh .
- Definizione di derivata seconda $f''(x)$, derivata terza $f'''(x)$, ..., derivata n -esima $f^{(n)}(x)$.
- Definizione di funzione di classe $C^n(A)$ su un dominio $A \subseteq \mathbb{R}$. Definizione di funzione di classe $C^\infty(A)$.
- Definizione di punto interno e punto di frontiera di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.
- Definizione di punto di minimo/massimo globale (o assoluto) e locale (o relativo) di una funzione.
- Teorema di Fermat. Dimostrazione.

Lezione 25 (mercoledì 18/11/2015, ore 15:30-17:30)

- Teorema di Rolle. Dimostrazione.
- Teorema di Lagrange. Dimostrazione.
- Esempio di funzione derivabile che non è di classe C^1 : funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. f è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. La sua derivata $f'(x)$ non è continua in $x = 0$.
- Applicazione del teorema di Lagrange: le disuguaglianze $|\sin(x)| \leq |x|$, $|\cos(x) - 1| \leq x^2$, $|\sin(x) - x| \leq x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Proposizione: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è costante se e solo se f è derivabile in $[a, b]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Dimostrazione.
- Criterio di monotonia per f dallo studio del segno di f' . Dimostrazione.
- Equazione della retta tangente al grafico G_f di f nel punto $(p, f(p))$: $y = f(p) + f'(p)(x - p)$.

Lezione 26 (giovedì 19/11/2015, ore 8:30-10:30)

- Definizione di funzione convessa/concava in un intervallo, definizione di punto di flesso.
- Criterio di convessità per f dallo studio del segno di f'' . (Senza dimostrazione).
- Condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine per punti di massimo/minimo di una funzione. Dimostrazione.
- Definizione di asintoto orizzontale, obliquo, verticale per una funzione.
- Regola per il calcolo di un asintoto obliquo o orizzontale. Dimostrazione.
- Cosa si intende con “studio di funzione”.
- Studio di funzione completo: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x$.

Lezione 27 (martedì 24/11/2015, ore 10:30-12:30)

- Teorema di de l'Hôpital. (Senza dimostrazione).
- Definizione di polinomio di Taylor $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(p)(x - p)^k$ di ordine n , centrato nel punto p , per una funzione f derivabile n volte. Definizione di resto n -esimo $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$.
- Formula di derivazione dei polinomi.
- Teorema della formula di Taylor con resto in forma di Peano. Dimostrazione.

Lezione 28 (mercoledì 25/11/2015, ore 15:30-17:30)

- Calcolo dei polinomi di Taylor per le funzioni e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(1 + x)$, $(1 + x)^\alpha$ (in particolare $\sqrt{1 + x}$ e $\frac{1}{1+x}$) centrate in $p = 0$.
- Definizione di o piccolo.
- Regole per le operazioni con gli o piccolo. Dimostrazione.
- Esercizi sugli sviluppi di Taylor e calcoli con gli o piccolo.

Lezione 29 (giovedì 26/11/2015, ore 8:30-10:30)

- Esercizi sull'utilizzo della formula di Taylor nel calcolo dei limiti di funzione.
- Utilizzo dello sviluppo di Taylor per il calcolo degli asintoti orizzontali/obliqui di funzioni.
- Utilizzo dello sviluppo di Taylor per stabilire se un punto p in cui $f'(p) = 0$, $f''(p) = 0$, \dots , $f^{(n)}(p) = 0$, $f^{(n+1)}(p) \neq 0$ è punto di minimo o di massimo o punto di flesso.

Lezione 30 (martedì 1/12/2015, ore 10:30-12:30)

Gli integrali.

- Idea geometrica: calcolare le aree per approssimazione con rettangoli.
- Definizione di partizione di un intervallo $[a, b]$.
- Definizione di somma integrale inferiore $\underline{S}(f, P)$ e somma integrale superiore $\overline{S}(f, P)$ di una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rispetto ad una partizione P di $[a, b]$.
- Lemma dei raffinamenti (raffinando una partizione, la somma integrale inferiore cresce, la somma integrale superiore cala). Senza dimostrazione.
- Proposizione: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora l'insieme $A = \{\underline{S}(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$ delle somme integrali inferiori di f e l'insieme $B = \{\overline{S}(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}$ delle somme integrali superiori di f sono due insiemi separati, cioè $\alpha \leq \beta$ per ogni $\alpha \in A, \beta \in B$. Dimostrazione.
- Definizione di funzione integrabile in $[a, b]$. Definizione di integrale $\int_a^b f = \sup(A) = \inf(B)$.
- Criterio di integrabilità. Dimostrazione.

- Definizione di $\int_b^a f$ (con $a < b$) e di $\int_a^a f$.
- Proprietà dell'integrale: (1) additività; (2) linearità; (3) confronto; (4) disuguaglianza fondamentale $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. (Senza dimostrazione).
- Integrale delle funzioni costanti: $\int_a^b c dx = (b-a)c$. Dimostrazione.
- Definizione di media integrale, suo significato geometrico.

Lezione 31 (mercoledì 2/12/2015, ore 15:30-17:30)

- Teorema di integrabilità delle funzioni continue. Dimostrazione.
- Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Dimostrazione.
- Primo teorema della media integrale (per funzioni limitate integrabili). Dimostrazione.
- Secondo teorema della media integrale (per funzioni continue). Dimostrazione.
- Definizione di primitiva di una funzione.
- Proposizione: sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e sia $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f . Allora una funzione $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva di f se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in [a, b]$. Dimostrazione.
- Definizione di funzione integrale $I(x)$ di punto iniziale a : $I(x) = \int_a^x f(t) dt$.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale: $I(x)$ è una primitiva di $f(x)$. Dimostrazione.
- Formula fondamentale del calcolo integrale: se F è una primitiva di f , allora $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Dimostrazione.

Lezione 32 (giovedì 3/12/2015, ore 8:30-10:30)

- Definizione di integrale indefinito $\int f(x) dx$ come famiglia di tutte le primitive di f .
- Integrale indefinito delle funzioni elementari. Integrali immediati.
- Integrazione per sostituzione (conseguenza della regola della derivata di funzione composta). Regola di trasformazione del "dx".
- Integrazione per parti (conseguenza della regola della derivata del prodotto di due funzioni).
- Esercizi e tecniche varie nel calcolo degli integrali.
- Integrazione di funzione razionale $\frac{N(x)}{D(x)}$, $N(x)$, $D(x)$ polinomi: richiamo alla divisione tra polinomi con quoziente e resto. Calcolo di $\int \frac{mx+q}{ax^2+bx+c} dx$ nei tre casi $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.

Lezione 33 (mercoledì 9/12/2015, ore 15:30-17:30)

- Formule di trigonometria utili per risolvere alcuni integrali per sostituzione: le formule parametriche $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, dove $t = \tan(x/2)$. Dimostrazione.
- Formula per l'area della regione piana compresa tra due grafici di funzione.
- Definizione di integrale generalizzato. Calcolo di alcuni integrali generalizzati significativi.
- Proposizione (monotonia dell'integrale generalizzato): se $f(x) \geq 0$, allora la funzione integrale $I(x) = \int_a^x f$ è crescente, e dunque ha limite per $x \rightarrow +\infty$ (finito oppure $+\infty$).
- Teorema di confronto per gli integrali generalizzati. Dimostrazione.

Lezione 34 (giovedì 10/12/2015, ore 8:30-10:30)

- Integrale di funzione razionale con denominatore di grado ≥ 3 , esercizio.

Serie.

- Definizioni: serie, termine generale di una serie, somma parziale n -esima di una serie, somma di una serie. Serie convergente, divergente, indeterminata. Carattere di una serie.
- Calcolo della somma parziale $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ per questi esempi: (1) la serie di Mengoli, di termine generale $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; (2) la serie indeterminata di termine generale $a_n = (-1)^n$; (3) la serie divergente di termine generale $a_n = 1$.

- Condizione necessaria per la convergenza di una serie: se una serie converge, allora il suo termine generale è necessariamente infinitesimo. Dimostrazione.
- Proposizione: le serie a termine generale a_n definitivamente ≥ 0 convergono o divergono a $+\infty$ (dunque non possono essere indeterminate o divergere a $-\infty$). Dimostrazione.
- Proposizione: se $a_n \rightarrow c > 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$. Dimostrazione.
- La serie geometrica di ragione p . Dimostrazione.
- La serie geometrica convergente che non parte da zero: $\sum_{k=m}^{\infty} p^k = \frac{p^m}{1-p}$. Dimostrazione (2 modi diversi).

Lezione 35 (martedì 15/12/2015, ore 10:30-12:30)

- Formula generale per la serie geometrica che non parte da $n = 0$, dimostrazione.
- La serie armonica. Disuguaglianza per la somma parziale: $\log(n+1) \leq s_n \leq \log(n) + 1$. Conseguenza: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$. Dimostrazione (usando l'integrale $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$).
- La serie armonica generalizzata. Dimostrazione.
- Criterio del confronto per le serie. Dimostrazione.
- Criterio degli infinitesimi e del confronto asintotico per le serie. Dimostrazione.
- Applicazione del criterio del confronto asintotico per le serie, usando anche gli sviluppi di Taylor, per studiare il carattere delle serie.

Lezione 36 (mercoledì 16/12/2015, ore 15:30-17:30)

- Le serie telescopiche (esempio: $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$).
- Criterio del rapporto per le serie a termini definitivamente > 0 . Dimostrazione.
- Criterio della radice per le serie a termini definitivamente ≥ 0 . Dimostrazione.
- Definizione di serie assolutamente convergente.
- Teorema: la convergenza assoluta di una serie implica la sua convergenza. Dimostrazione.
- Criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno. (Senza dimostrazione).
- Esempio classico di serie che converge ma non converge assolutamente: $\sum_{n=1}^{\infty} \infty \frac{(-1)^n}{n}$.
- Criterio del rapporto e della radice per le successioni. Dimostrazione.

Lezione 37 (giovedì 17/12/2015, ore 8:30-10:30)

- Proposizione: se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora la coda $c_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ è infinitesima. Dimostrazione.
- Teorema: formula di Taylor con resto in forma integrale. Dimostrazione.
- Teorema: formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange. Dimostrazione.
- Definizione di serie di Taylor per funzioni di classe C^∞ .
- Teorema: condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor. Dimostrazione.
- Formula della serie di Taylor di $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x .
- Cenno all'esponenziale complesso rivisto alla luce delle serie di Taylor di seno, coseno ed esponenziale: $e^{i\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\vartheta)^n}{n!} = (1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \frac{\vartheta^6}{6!} + \dots) + i(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \frac{\vartheta^7}{7!} + \dots) = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$.
- Teorema: se $f(x)$ è una funzione ≥ 0 e decrescente, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e l'integrale generalizzato $\int_1^{\infty} f(x) dx$ hanno lo stesso carattere. Dimostrazione.