Esercizi di Analisi Matematica 1

December 17, 2015

1) Determinare il dominio delle seguenti funzioni

- $f(x) = \sqrt{\log(1 - \sin x)}$
- $f(x) = \arctan\left(\sqrt{4e^{2x} - 9e^{x} + 2} - 2e^{x}\right)$
- $f(x) = \log\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - x - 2} - x + 1}{x^2 - 4x}\right)$
- $f(x) = \sqrt{\arctan\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sin^2 x}\right]}$
- $f(x) = \sqrt{|x^2 - x| - |x + 3|} + \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2x} - 2^{x+1} - 3\right)$

2) Calcolare i limiti delle seguenti successioni

- $\sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$;
- $\left(n^{\sqrt{n}} - 2^{n}\right)$;
- $\dfrac{\sqrt[4]{n}\log n + \sqrt[2]{n}(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$;

3) Calcolare il seguente limite al variare di α nell'intervallo $[0, 2\pi[$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \sin\alpha)^n}{(1 + \frac{\sin\alpha}{n})}$$

4) Calcolare $\liminf$ e $\limsup$ delle seguenti successioni

- $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

- $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

5) Sia dato $\alpha \in (0, \pi)$ e sia definita la successione

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n + \sin a_n \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Stabilire se la successione $\{a_n\}$ ammette limite e, in caso affermativo, calcolarlo.

6) Si tracci il grafico delle seguente funzioni

- $f(x) = |\sqrt[3]{x-3} + 2| - 1$
- $f(x) = |\log_{2^{-1}}(|x+1|) - 2|$

7) Determinare il dominio e (se esistono) max/min, sup/inf della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cos^2 x}$$

8) Determinare (se esistono) massimo e minimo della seguente funzione nell'intervallo $[-2, 2]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \in \mathbb{Z} \\ ||x| - 1| & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

9) Calcolare i seguenti limiti di funzioni

- $\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2\cos x}$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x + (x + \sqrt[3]{x})^{2/3}} - \sqrt[3]{x}\right)$
- $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x-3}}{3 - \sqrt[4]{85 - x}}$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log(x^x - 2x\log x)}{1 - \cos(\sqrt{x \log x})}$
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{\log x}{x^2 + 3x - 4}$
- $\lim_{x \to 0} (\cos(2x))^{\tan^2(x - \frac{\pi}{2})}$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(\log(1 + 3x))}{e^x - 3^x}$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x + \tan x) - \arcsin x^2}{x^2 - \sin^2 x}$

10) Calcolare α e β in $\mathbb{R}$ in modo tale che il seguente limite valga 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\log(\cos x)-\cos(\log(1+x))}{\alpha x^2+\beta x^3}$$

11) Si determinino i valori dei parametri reali a, b che rendono continua la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & x < -\pi/2 \\ a\sin x + b & |x| \le \pi/2 \\ \cos x & x > \pi/2 \end{cases} .$$

12) Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si definiscano $g(x) := (f(x))^2$, $h(x) := (f(x))^3$.
Si dimostri che, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è continua, allora nemmeno $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua. Vale lo stesso anche per g?

13) Provare le seguenti uguaglianze

- $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$;
- $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

14) Si calcoli la derivata delle seguenti funzioni

- $f(x) = \log(\sqrt{1+x^2} - x)$
- $f(x) = \frac{1}{x^2} \log^3(2x^4 + \sqrt[5]{x})$
- $f(x) = \log\left(\tan \frac{x}{2}\right) - (\cos x)\log(\tan x)$
- $f(x) = (x+1)^{x^2+1}$
- $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$

15) Sia data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ ax + b & x > x_0 \end{cases} .$$

Si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che anche la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia derivabile.

16) Calcolare α e β in $\mathbb{R}$ in modo tale che la seguente funzione sia continua e derivabile in $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2 & x \geq 0 \\ \alpha \sin x & x < 0 \end{cases}$$

17) Siano date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che f è derivabile nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$, mentre g non è derivabile in x_0. Che cosa se ne può dedurre sulla derivabilità della funzione $f(x) + g(x)$ nel punto x_0? E sulla derivabilità della funzione $f(x)g(x)$ in x_0?

18) Considerata, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la funzione $f_k : D \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R} \backslash \{3\}$, definita dalla seguente legge

$$f_k(x) = \begin{cases} -\left|k^2(x^2+3x+2)\right| & \text{se } x \in]-\infty, 1[\\ k\,\dfrac{x^2-3x+14}{x^2-3x} & \text{se } x \in [1, +\infty[\backslash \{3\}\,, \end{cases}$$

svolgere i seguenti punti:

- studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la continuità e la derivabilità della funzione f_k nell'insieme di definizione D;
- nel caso particolare $k = 1$, posto $g(x) := f_1(x)$, dopo aver classificato i punti $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, determinare le tangenti al grafico della funzione g in tali punti;
- g ammette zeri in D?

19) Considerata, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la funzione $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge

$$f_k(x) = \begin{cases} x^4 + 5x^3 + 6x^2 + kx & \text{se } x \in]-\infty, 0] \\ 2x^2(\ln x - 1 + k) & \text{se } x \in]0, +\infty[\,, \end{cases}$$

studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la continuità e la derivabilità nel punto $x_0 = 0$ della funzione f_k.

20) Considerata, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la funzione $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2+1} & \text{se } x \in]-\infty, 0] \\ k^2 - x \log^2 x & \text{se } x \in]0, +\infty[, \end{cases}$$

e posto, nel caso particolare $k = 1$, $g(x) := f_1(x)$, svolgere i seguenti punti:

- studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la continuità e la derivabilità nel punto $x_0 = 0$ della funzione f_k;

- determinare le tangenti al grafico della funzione $g(x)$ nei punti $x_0 = 0,\ x_1 = -1$;
- g ammette zeri su $\mathbb{R}$?

21) Considerata, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la funzione $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla seguente legge

$$f_k(x) = \begin{cases} \sqrt{2k^2x^2 + k^2} - 1 & \text{se } x \in]-\infty, 0] \\ \\ (k^2 + k)xe^{-x^2} & \text{se } x \in]0, +\infty[\,, \end{cases}$$

svolgere i seguenti punti:

- studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la continuità e la derivabilità nel punto $x_0 = 0$ della funzione f_k;
- nel caso particolare $k = 1$, posto $g(x) := f_1(x)$, determinare le tangenti al grafico della funzione $g(x)$ nei punti $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

22) Calcolare, senza l'uso del calcolo differenziale, l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione

$$f(x) = \arctan(\log x) - \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

23) Considerata la successione di termine generale

$$a_n = 3^{-n} \sin n + 2^n \cos n - x^n,$$

provare che non ha limite e dedurre che non è limitata dal calcolo del minimo e massimo limite.