

# **CORRENTE ELETTRICA ed elementi di CIRCUITI ELETTRICI**

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

## **FISICA GENERALE II CORRENTE / CIRCUITI**

- ◆ **Corrente elettrica e resistenza elettrica**
- ◆ **Circuiti e leggi di Kirchhoff**

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# CORRENTE / CIRCUITI

## Corrente elettrica e resistenza elettrica

F.Bloisi  
Fisica II

CC 1.  
Rev. 1.2

- ◆ **Generatore**
- ◆ **Definizione di corrente elettrica**
- ◆ **Conservazione della carica**
- ◆ **Legge di Ohm**
- ◆ **Effetto Joule**
- ◆ **Resistenze in parallelo o in serie**
- ◆ *Esempi ed applicazioni*

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Corrente elettrica e resistenza elettrica

## Riepilogo

F.Bloisi  
Fisica II

CC 1.0  
Rev. 1.2

### ◆ **Definizioni**

- ◆ Forza elettromotrice (f.e.m.)
- ◆ Corrente elettrica
- ◆ Densità di corrente elettrica (vettore)
- ◆ Resistenza elettrica
- ◆ Resistività elettrica
- ◆ Conduttività elettrica

### ◆ **Enunciato e Dimostrazione**

- ◆ Resistenza equivalente
- ◆ Resistenze in serie ed in parallelo

### ◆ **Importanti fenomeni fisici**

- ◆ Legge di Ohm
- ◆ Effetto Joule

### ◆ **Esercizi**

- ◆ Resistività e resistenza elettrica
- ◆ Resistenze in parallelo
- ◆ Resistenza e potenza dissipata
- ◆ Resistenze in configurazione serie/parallelo
- ◆ Potenza dissipata e resistenza interna



### **MNV2 Cap.5:**

#### **Corrente elettrica**

- ◆ Par.5.1: Conduzione elettrica
- ◆ Par.5.2: Corrente elettrica. Corrente elettrica stazionaria.
- ◆ Par.5.3: Legge di Ohm della conduzione elettrica
- ◆ Par.5.5: Resistori in serie e in parallelo

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Corrente elettrica e resistenza elettrica

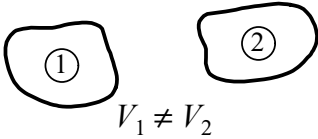
## Generatore

F.Bloisi  
Fisica II

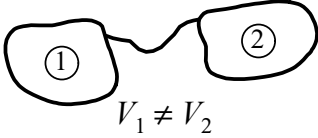
CC 1.1  
Rev. 1.2

### conduttori non equipotenziali

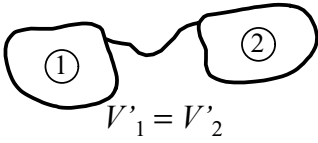
situazione statica



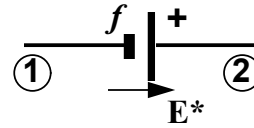
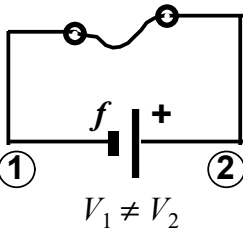
transiente



situazione statica



situazione stazionaria



Generatore di f.e.m costante

$$f = V_2 - V_1 = \int_1^2 \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$$

Nota:

- All'interno del generatore il moto delle cariche è dovuto ad azioni meccaniche, chimiche, etc. (dinamo, batteria, pila, etc.)
- Nel semplice circuito a sinistra le cariche (positive) si muovono
  - nel verso del potenziale crescente (da ① verso ②), all'interno del generatore
  - nel verso del potenziale decrescente (da ② verso ①), all'esterno del generatore

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Corrente elettrica e resistenza elettrica

## Definizione di corrente elettrica

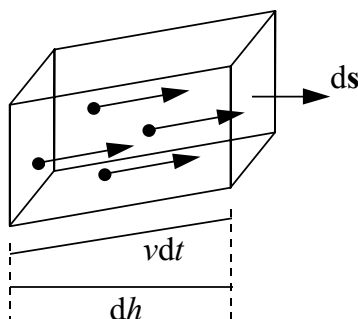
F.Bloisi  
Fisica II

CC 1.2  
Rev. 1.2

quantità di carica che attraversa la superficie  $ds$  nel tempo  $dt$

= carica contenuta nel volume  $d\tau$

$$dq = \rho d\tau = \rho ds dh = \rho ds v dt \cos \vartheta = \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} dt = \vec{J} \cdot d\vec{s} dt$$



Definizioni:

Densità di corrente:

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

Corrente elettrica:

$$dI = dq/dt = \vec{J} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{sezione } ds)$$

$$I = dq/dt = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{sezione } S)$$

Unità di misura:

**A** ampere [I]

$$A = C/s$$

$$C = A \cdot s$$

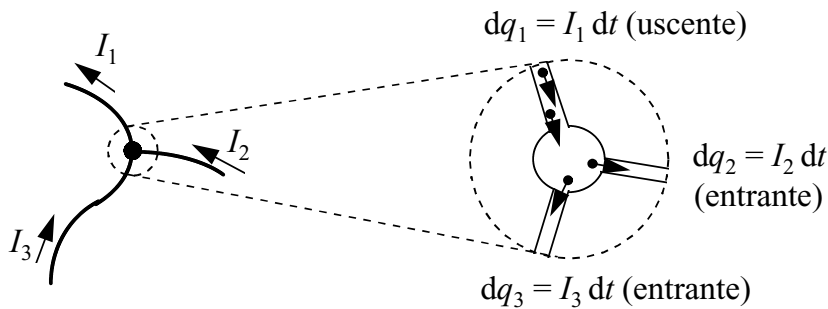
Note:

- se vi sono cariche con velocità (medie) diverse:  $\vec{J} = \rho_1 \vec{v}_1 + \rho_2 \vec{v}_2 + \dots$
- si può avere  $\rho = 0$ ,  $\vec{J} \neq 0$
- in un conduttore contribuiscono alla corrente solo gli elettroni di conduzione
- in un fluido contribuiscono alla corrente anche gli ioni (positivi o negativi)
- in alcuni casi un oggetto carico in moto può essere visto come una corrente elettrica: (anello o disco o cilindro che ruota, filo o cilindro che trasla)

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Corrente elettrica e resistenza elettrica

## Conservazione della carica



Nota:

Anche se gli elettroni di conduzione hanno carica negativa, per convenzione, il verso della corrente è indicato come se si trattasse di cariche positive.

conservazione della carica:  
somma delle cariche entranti =  
= somma delle cariche uscenti  
(in un intervallo di tempo  $dt$ )

$$dq_2 + dq_3 = dq_1$$

$$I_2 dt + I_3 dt = I_1 dt$$

$$I_2 + I_3 = I_1$$

somma delle correnti entranti =  
= somma delle correnti uscenti  
(in un istante  $t$ )

Formulazione  
differenziale

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

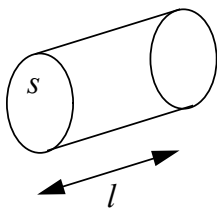
Equazione  
di continuità

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Corrente elettrica e resistenza elettrica

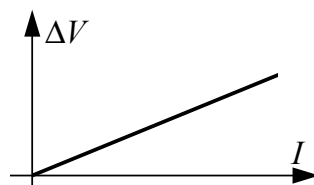
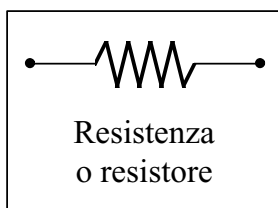
## Legge di Ohm

- I conduttori nei quali la corrente è proporzionale alla differenza di potenziale sono detti “*conduttori ohmici*”
- Per i conduttori ohmici vale la “*Legge di Ohm*”:  $\Delta V_R = IR$  dove  $R$  è detta “*resistenza elettrica*”
- Dal punto di vista microscopico la legge di Ohm si scrive  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$  o  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$   
 $\rho$ : “*resistività elettrica*”;  $\sigma = 1/\rho$ : “*conducibilità elettrica*”;  $R = \rho l / s$



$$E = J \rho = J R s / l = I R / l$$

$$\Delta V_R = E l = I R$$



resistenza elettrica

Unità di misura: ohm  $[\Omega] = [V/A]$

Dimensioni:  $[\Omega] = [L^2 M^{-1} T^{-3} I^{-2}]$

resistività elettrica

Unità di misura:  $[\Omega \cdot m]$

Dimensioni:  $[\Omega \cdot m] = [L^3 M^{-1} T^{-3} I^{-2}]$

conducibilità elettrica

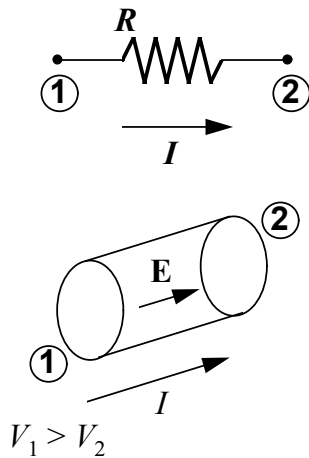
Unità di misura:  $[\Omega^{-1} \cdot m^{-1}]$

Dimensioni:  $[\Omega^{-1} \cdot m^{-1}] = [L^{-3} M^{-1} T^3 I^2]$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Corrente elettrica e resistenza elettrica

## Effetto Joule



Dalla Legge di Ohm, tenendo conto del verso della corrente e del segno della d.d.p. ( $V_1 > V_2$ ):  
 $\Delta V_R = V_2 - V_1 = -IR$

Il lavoro da fare per portare una carica  $dq$ , senza accelerarla, dal punto 1 al punto 2 è:  
 $dL = dq \Delta V_R$

La potenza (dissipata) per “*effetto Joule*” è:  
 $W_J = dL/dt = (dq \Delta V_R)/dt = -I^2 R$

Note:

- A livello qualitativo si può dire che, gli elettroni di conduzione non accelerano a causa di una “forza di attrito” causata dagli “urti” contro gli atomi .
- $W$  è sempre negativa (dissipata).

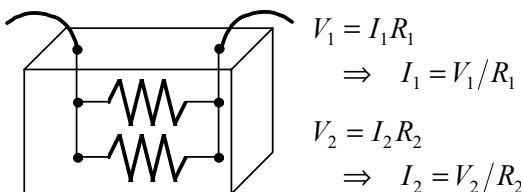
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Corrente elettrica e resistenza elettrica

## Resistenze in parallelo o in serie

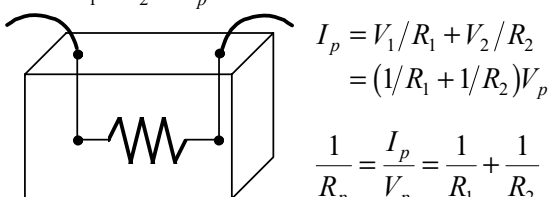
Resistenze *in parallelo* se

- la differenza di potenziale è la stessa per entrambe



$$V_1 = V_2 = V_p$$

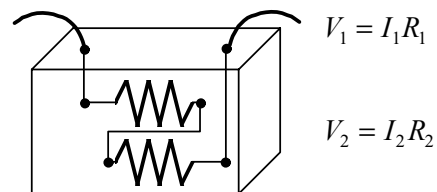
$$I_1 + I_2 = I_p$$



Resistenza equiv. (parallelo):  $\frac{1}{R_p} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

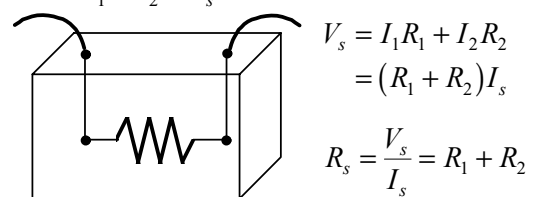
Resistenze *in serie* se

- la corrente è la stessa in entrambe



$$I_1 = I_2 = I_s$$

$$V_1 + V_2 = V_s$$



Resistenza equiv. (serie):  $R_s = \sum_i R_i$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Resistività e resistenza elettrica

F.Bloisi  
Fisica II

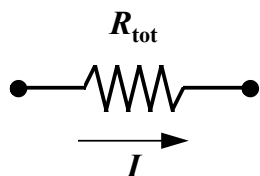
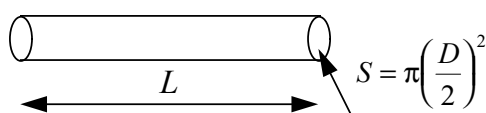
CC 1.7

Rev. 1.2

Una resistenza elettrica è realizzata con un di filo di platino (resistività  $\rho = 10.6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ) di lunghezza  $L = 1.25 \text{ m}$  e spessore (diametro)  $d = 0.500 \text{ mm}$  ed è percorsa da una corrente  $I = 0.750 \text{ A}$ . Si determini:

a) la resistenza elettrica complessiva  $R_{\text{tot}}$ ;

b) la potenza dissipata per unità di lunghezza  $w = W_{\text{tot}}/L_{\text{tot}}$ .



$$\begin{aligned} \text{a) } R_{\text{tot}} &= \frac{\rho L}{S} \\ &= \frac{\rho L}{\pi(D/2)^2} \\ &= \frac{4\rho L}{\pi D^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } W_{\text{tot}} = I^2 R = I^2 \frac{4\rho L}{\pi D^2}$$

$$L_{\text{tot}} = L$$

$$w = \frac{W_{\text{tot}}}{L_{\text{tot}}} = \frac{4\rho I^2}{\pi D^2}$$

Nota:

$$R = 675 \text{ m}\Omega = 675 \cdot 10^{-3} \Omega = 0.675 \Omega$$

$$\rho = 10.6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$d = 0.500 \text{ mm} = 0.500 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$w = 304 \text{ mW/m} = 0.304 \text{ W/m}$$

$$R_{\text{tot}} = \frac{4\rho L}{\pi D^2} = 675 \text{ m}\Omega$$

$$w = \frac{4\rho I^2}{\pi D^2} = 304 \text{ mW/m}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Resistenze in parallelo

F.Bloisi  
Fisica II

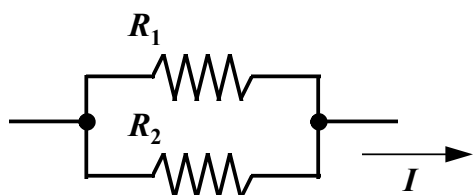
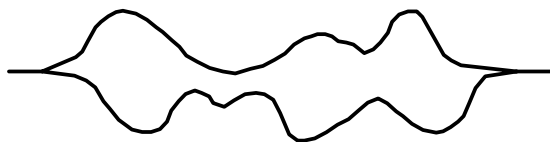
CC 1.8

Rev. 1.2

Una resistenza elettrica è realizzata con due fili collegati in parallelo (ciascun filo ha lunghezza  $L = 2.50 \text{ m}$ , resistività  $\rho = 10.6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , diametro  $d = 0.500 \text{ mm}$ ) ed è percorsa da una corrente  $I = 0.750 \text{ A}$ . Si determini:

a) la resistenza elettrica complessiva  $R_{\text{tot}}$ ;

b) la potenza dissipata per unità di lunghezza  $w = W_{\text{tot}}/L_{\text{tot}}$ .



$$R_1 = R_2 = R = \frac{\rho L}{S} = \frac{\rho L}{\pi(D/2)^2} = \frac{4\rho L}{\pi D^2}$$

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2 \frac{1}{R} \Rightarrow R_{\text{tot}} = \frac{R}{2} = \frac{2\rho L}{\pi D^2}$$

$$W_{\text{tot}} = I^2 R_{\text{tot}} = I^2 \frac{2\rho L}{\pi D^2}$$

$$L_{\text{tot}} = 2L$$

$$w = \frac{W_{\text{tot}}}{L_{\text{tot}}} = \frac{\rho I^2}{\pi D^2}$$

$$R_{\text{tot}} = \frac{2\rho L}{\pi D^2} = 675 \text{ m}\Omega$$

$$w = \frac{\rho I^2}{\pi D^2} = 75.9 \text{ mW/m}$$

Nota:

Si confrontino i risultati con quelli dell'esempio precedente.

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

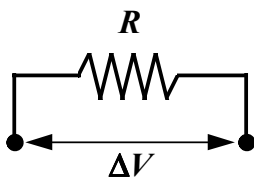
## Resistenza e potenza dissipata

F.Bloisi  
Fisica II

CC 1.9  
Rev. 1.2

Una resistenza elettrica dissipa, per effetto Joule, una potenza  $W = 1.20 \text{ kW}$  quando ad essa è applicata una d.d.p. costante  $\Delta V = 220 \text{ V}$ .

Si determini il valore della sua resistenza elettrica  $R$ .



$$\left. \begin{aligned} \Delta V &= I R \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} \\ W &= I \Delta V \Rightarrow I = \frac{W}{\Delta V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \frac{\Delta V^2}{W}$$

Nota:

$$W = I \Delta V = I^2 R$$

fissato il valore della corrente  
la potenza dissipata è  
proporzionale alla resistenza

$$W = I \Delta V = \Delta V^2 / R$$

fissato il valore della corrente  
la potenza dissipata è  
inversamente proporzionale alla resistenza

$$R = \frac{\Delta V^2}{W} = 40.3 \Omega$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

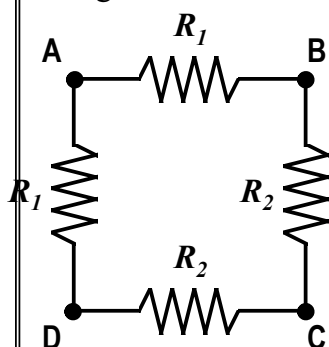
# Esempi ed applicazioni

## Resistenze in configurazione serie/parallelo

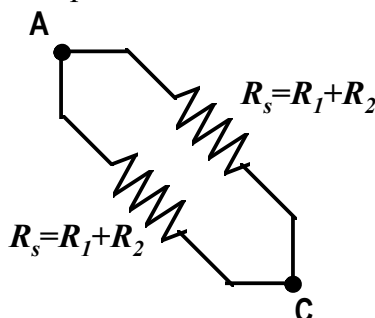
F.Bloisi  
Fisica II

CC 1.10  
Rev. 1.2

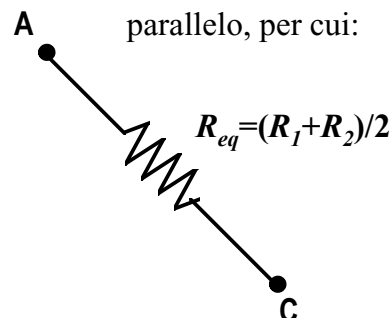
Quattro resistori, due di resistenza  $R_1$  e due di resistenza  $R_2$ , sono collegati come illustrato in figura. Determinare il valore della resistenza equivalente tra A e C.



$R_1$  ed  $R_2$  sono in serie,  
per cui:



Le due resistenze così  
ottenute sono in  
parallelo, per cui:



Note:

- Nella sostituzione  $R_1, R_2 \rightarrow R_s$  si perdono le informazioni relative al potenziale in B (ed in D).
- Se si vuole calcolare la resistenza equivalente tra B e D il risultato è, ovviamente, diverso:  $R_{eq} = 2 R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$

$$R_{eq} = (R_1 + R_2) / 2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

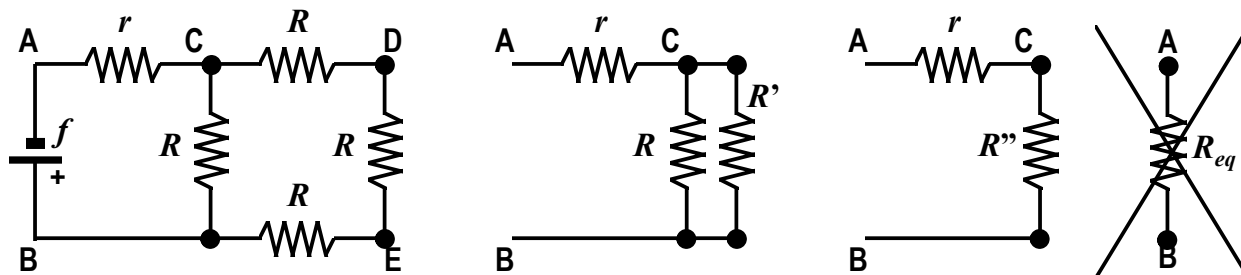
## Potenza dissipata e resistenza interna (1/2)

F.Bloisi  
Fisica II

CC 1.11  
Rev. 1.2

Sei resistori sono collegati come illustrato in figura ad un generatore che fornisce una f.e.m.  $f$ . Determinare il rapporto tra la potenza dissipata, per effetto Joule, da  $r$  e quella dissipata da tutte le resistenze.

(Nota:  $r$  può essere vista come la resistenza interna del generatore)



Passo 1:

Possiamo innanzi tutto semplificare la configurazione delle resistenze con successive sostituzioni di serie/parallelo (attenzione: non si deve includere  $r$  nella resistenza equivalente!):

$$R' = 3R$$

$$R'' = R R' / (R + R') = (3/4)R$$

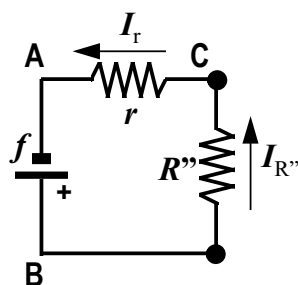
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Potenza dissipata e resistenza interna (1/2)

F.Bloisi  
Fisica II

CC 1.12  
Rev. 1.2



Passo2:

La potenza dissipata per effetto Joule (il segno negativo ricorda che si tratta di potenza *dissipata*) è

$$W_r = -I_r^2 r \quad W_{R''} = -I_{R''}^2 R''$$

ed il rapporto richiesto vale, tenendo conto che per la conservazione della carica in C deve essere  $I_r = I_{R''}$ ,

$$W_r / W_{tot} = W_r / (W_r + W_{R''}) = (-I_r^2 r) / (-I_r^2 r - I_{R''}^2 R'') = 1 + (r / R'')$$

e, sostituendo il valore di  $R''$  ricavato in precedenza

$$W_r / W_{tot} = 1 + (4/3) (r/R)$$

Nota: questo esercizio è stato volutamente risolto senza utilizzare le leggi di Kirchhoff, (vedi lezione seguente).

$$\frac{W_r}{W_{tot}} = 1 + \frac{4r}{3R}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# CORRENTE / CIRCUITI

## Circuiti e leggi di Kirchhoff

F.Bloisi  
Fisica II

CC 2.  
Rev. 1.2

- ◆ **Nodi / Rami / Maglie**
- ◆ **Leggi di Kirchhoff**
- ◆ **Generatore / Condensatore / Resistenza**
- ◆ **Strumenti di misura**
- ◆ **Altri componenti**
- ◆ **Circuito RC**
- ◆ *Esempi ed applicazioni*

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e leggi di Kirchhoff

## Riepilogo

F.Bloisi  
Fisica II

CC 2.0  
Rev. 1.2

### ◆ **Principali componenti circuitali**

- ◆ Generatore di f.e.m. costante
- ◆ generatore di corrente costante
- ◆ Resistenza
- ◆ Condensatore
- ◆ Voltmetro
- ◆ Amperometro
- ◆ Wattmetro

### ◆ **Enunciato e dimostrazione**

- ◆ 1<sup>a</sup> legge di Kirchhoff (o dei nodi)
- ◆ 2<sup>a</sup> legge di Kirchhoff (o delle maglie)

### ◆ **Importanti fenomeni fisici**

- ◆ Circuito RC
- ◆ Carica e scarica di un condensatore

### ◆ **Esercizi**

- ◆ Resistenza interna e carico
- ◆ Circuito RC (carica)
- ◆ Circuito RC (scarica)
- ◆ Circuito RC (bilancio energetico)



### **MNV2 Cap.6:**

#### **Campo magnetico. Forza magnetica.**

- ◆ Par.6.1: Interazione magnetica. Campo magnetico
- ◆ Par.6.2: Eletticità e magnetismo
- ◆ Par.6.3: Forza magnetica su una carica in moto
- ◆ Par.6.4: Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente
- ◆ Par.6.7: Moto di una particella carica in un campo magnetico **B**
- ◆ Par.6.8: Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e leggi di Kirchhoff

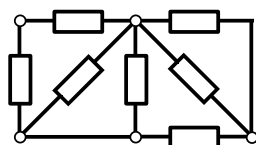
## Nodi / Rami / Maglie

F.Bloisi  
Fisica II

CC 2.1  
Rev. 1.2

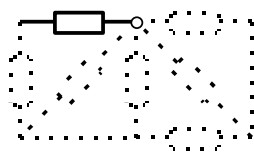
**nodo:** un punto nel quale convergono almeno tre conduttori

**ramo:** parte di circuito che collega due nodi adiacenti

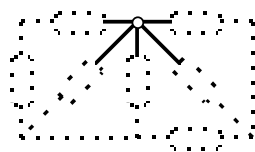


Circuito o rete

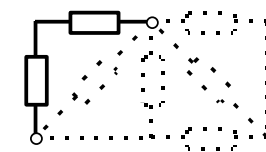
**maglia:** cammino chiuso che parte da un nodo e vi ritorna attraversando due o più rami



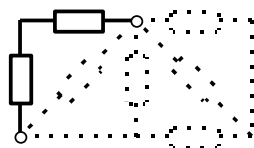
Componente



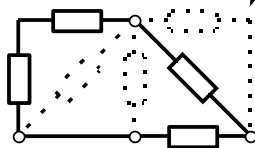
Nodo



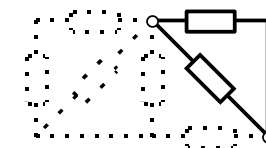
Componenti in serie



Ramo



Maglia



Componenti in parallelo

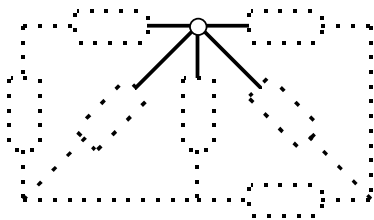
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e leggi di Kirchhoff

## Leggi di Kirchhoff

F.Bloisi  
Fisica II

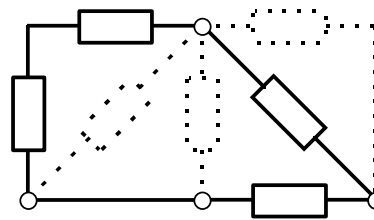
CC 2.2  
Rev. 1.2



### 1ª legge di Kirchhoff (legge dei nodi)

La somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla

$$\sum_k I_k = 0$$



### 2ª legge di Kirchhoff (legge delle maglie)

La somma algebrica delle f.e.m. presenti nei rami della maglia è uguale alla somma algebrica dei prodotti  $R I$  per tutte le resistenze presenti nei rami della maglia

$$\sum_k f_k = \sum_k R_k I_k$$

o più in generale

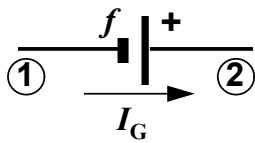
la somma algebrica delle f.e.m. o d.d.p. ai capi di tutti i componenti presenti lungo una maglia è nulla

$$\sum_k \Delta V_k = 0$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e leggi di Kirchhoff

## Generatore / Condensatore / Resistore



### Generatore di f.e.m. costante

Differenza di potenziale:

$$\Delta V_G = V_2 - V_1 = f = \text{cost.}$$

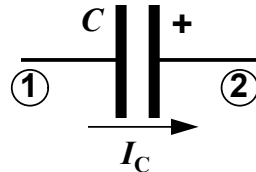
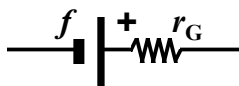
$$I_G = I_G(t)$$

Potenza:

$$W_G(t) = I_G(t) f$$

Note:

- $W_G$  può essere  $>0$  o  $<0$
- Un generatore reale ha anche una resistenza interna  $r_G$



### Condensatore/Capacità

Differenza di potenziale:

$$\Delta V_C(t) = V_2 - V_1 = Q(t)/C$$

Corrente:

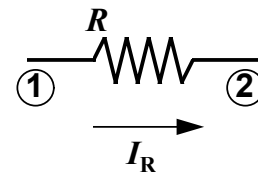
$$I_C(t) = -dQ/dt = -C dV_G/dt$$

Energia immagazzinata:

$$U_C(t) = \frac{1}{2} C V_G^2(t)$$

Note:

- $U_C$  è sempre  $>0$  (immagazzinata).
- Serie  $C_s^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$
- Parallelo  $C_p = C_1 + C_2$



### Resistore/Resistenza

Differenza di potenziale:

$$\Delta V_R(t) = V_2 - V_1 = -I_R(t) R$$

Potenza dissipata:

$$W_R(t) = dq \Delta V/dt = I(t) V_R(t) = -I_R^2(t) R$$

Note:

- $W_R$  è sempre  $<0$  (dissipata)
- Serie  $R_s = R_1 + R_2$
- Parallelo  $R_p^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$

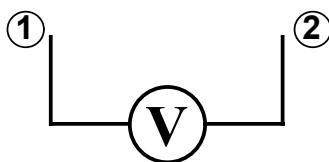
Nota: Talvolta si usa la notazione  $V$ , invece di  $\Delta V$ , per indicare una d.d.p.

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

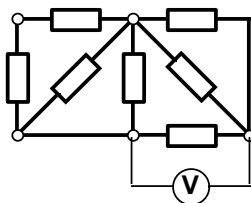
# Circuiti e leggi di Kirchhoff

## Strumenti di misura

Voltmetro



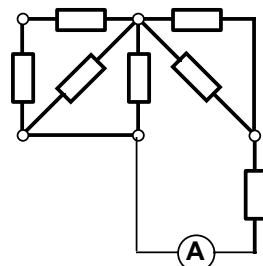
Va' collegato "in parallelo" al componente



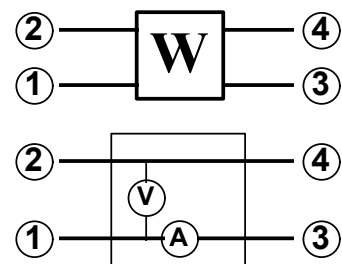
Amperometro



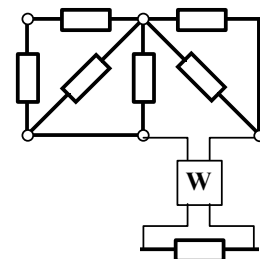
Va' collegato "in serie" al componente



Wattmetro



Va' collegato "al posto" del componente



--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e leggi di Kirchhoff

## Altri componenti

F.Bloisi  
Fisica II

CC 2.5  
Rev. 1.2

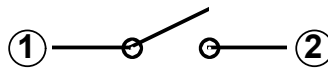
Conduttore



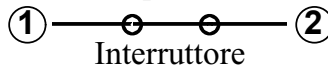
Un tratto di conduttore tra due nodi fa' sì che la d.d.p. tra i nodi sia nulla:  $V_1 = V_2$

Si dice che i due nodi sono "cortocircuitati" o in "corto circuito"

Interruttore



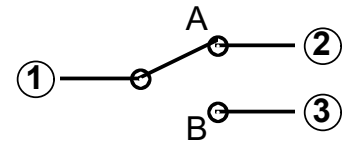
Interruttore "aperto"



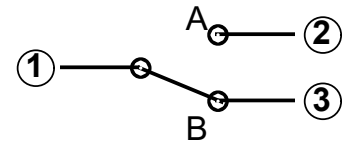
Interruttore "chiuso"

Un interruttore chiuso è equivalente ad un "corto circuito"

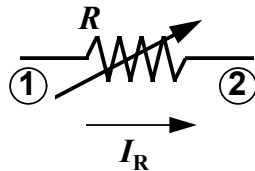
Deviatore



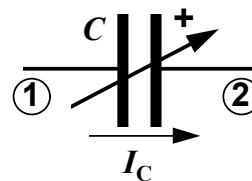
Posizione A



Posizione B



Resistenza variabile  
o potenziometro



Condensatore variabile

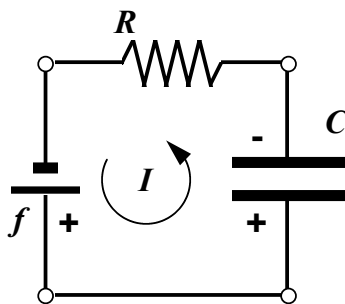
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e leggi di Kirchhoff

## Circuito RC

F.Bloisi  
Fisica II

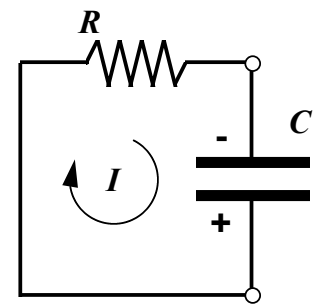
CC 2.6  
Rev. 1.2



Carica del condensatore

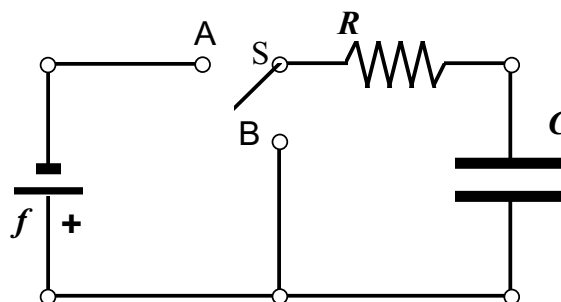
Carica del condensatore: il generatore fornisce energia che viene in parte immagazzinata nel condensatore ed in parte dissipata dalla resistenza

Scarica del condensatore: l'energia precedentemente immagazzinata nel condensatore viene dissipata dalla resistenza



Scarica del condensatore

Con il deviatore nella posizione A si ha la carica del condensatore



Con il deviatore nella posizione B si ha la scarica del condensatore

Uno studio più approfondito del circuito RC è svolto negli "Esercizi ed applicazioni"

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Resistenza interna e carico

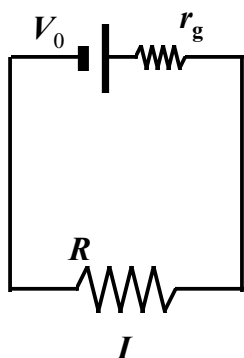
F.Bloisi  
Fisica II

CC 2.7

Rev. 1.2

Nel circuito illustrato in figura il generatore di f.e.m. costante (d.d.p.  $V_0$ , resistenza interna  $r_g$ ) è collegato ad una resistenza costante  $R$  (carico).

Determinare che relazione deve sussistere tra la resistenza interna  $r_g$  ed il carico  $R$  affinché almeno il 95% della potenza fornita dal generatore sia dissipata da  $R$ .



Poniamo

$$W_R / W_g \geq \alpha = 0.95 = 95\%$$

La potenza fornita dal generatore è

$$W_g = V_0 I$$

La potenza dissipata dalla resistenza  $R$  è

$$W_R = I^2 R$$

Tenendo conto che dalla 2<sup>a</sup> legge di Kirchhoff

$$V_0 - I r_g - I R = 0$$

si ricava

$$I = V_0 / (r_g + R)$$

e quindi

$$W_g = V_0^2 / (r_g + R)$$

$$W_R = V_0^2 R / (r_g + R)^2$$

$$W_R / W_g = R / (r_g + R)$$

$$R / (r_g + R) \geq \alpha$$

$$r_g / R \leq (1 - \alpha) / \alpha$$

$$r_g / R \leq 0.053 = 5.3\%$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Circuito RC (carica)

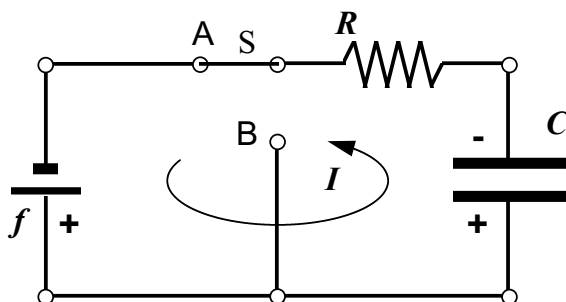
F.Bloisi  
Fisica II

CC 2.8

Rev. 1.2

Nel circuito illustrato in figura il condensatore  $C$  è inizialmente scarico ( $Q(0)=0$ ) ed all'istante  $t$

Determinare la differenza di potenziale  $V_C(t)$  ai capi del condensatore.



$$t = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} f - \frac{Q}{C} - IR &= 0 \\ Q(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_0 = \frac{f}{R}$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \left. \begin{aligned} f - \frac{Q}{C} - IR &= 0 \\ Q = \text{cost.} \Rightarrow I(\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_\infty = fC$$

$$V_G + V_C + V_R = 0$$

$$f - \frac{Q}{C} - IR = 0 \quad \left[ \frac{dQ}{dt} = \frac{dq}{dt} = I \right]$$

$$\frac{df}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} - R \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I$$

$$I(t) = \frac{f}{R} e^{-t/RC}$$

$$V_C = f - IR = f(1 - e^{-t/RC})$$

$$V_C(t) = f(1 - e^{-t/\tau_c})$$

$$\tau_c = RC$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

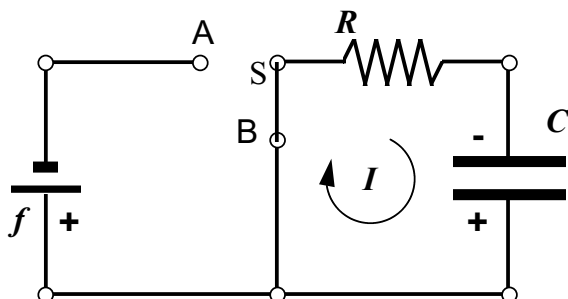
## Circuito RC (scarica)

F.Bloisi  
Fisica II

CC 2.9  
Rev. 1.2

Nel circuito illustrato in figura il condensatore  $C$  è inizialmente carico ( $V_C(0)=f$ ) ed all'istante  $t$

Determinare la differenza di potenziale  $V_C(t)$  ai capi del condensatore.



$$t=0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_C - IR = 0 \\ V_C(0) = f \end{array} \right\} \Rightarrow I_0 = \frac{f}{R}$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_C - IR = 0 \\ Q = \text{cost.} \Rightarrow I(\infty) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow V_C = 0$$

$$V_C + V_R = 0$$

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \quad \left[ \frac{dQ}{dt} = -\frac{dq}{dt} = -I \right]$$

$$\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} - R \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$

$$V_C(t) = -V_R(t) = I(t)R = f e^{-t/RC}$$

$$V_C(t) = f e^{-t/\tau_C}$$

$$\tau_C = RC$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

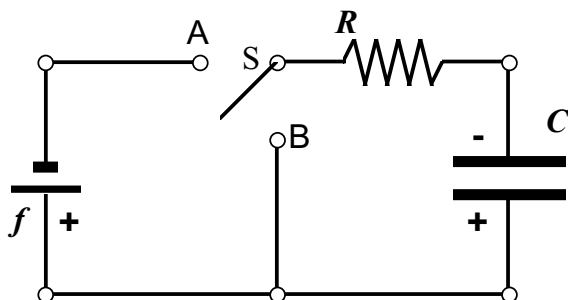
## Circuito RC (bilancio energetico)

F.Bloisi  
Fisica II

CC 2.10  
Rev. 1.2

Nel circuito illustrato in figura il condensatore  $C$  è inizialmente scarico ( $Q(0)=0$ ). Il deviatore  $S$  viene prima portato nella posizione A; dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo ( $\Delta t \gg \tau_C = RC$ ) il deviatore  $S$  viene portato nella posizione B.

Verificare che l'energia immagazzinata nel condensatore durante la fase di carica è uguale



L'energia accumulata nel condensatore durante la carica (S in A) è:

$$\mathcal{E}_C = \Delta U_C = \frac{1}{2} C f^2 - 0$$

Nota: durante la carica  $W_G(t) \neq W_R(t)$ .

La potenza dissipata dalla resistenza durante la scarica del condensatore (S in B) è:

$$W_R(t) = I^2(t)R = (f^2/R) e^{-2t/RC}$$

$$\mathcal{E}_R = \int_0^{\infty} W_R(t) dt = \frac{f^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/RC} dt$$

$$= \frac{f^2}{R} \left[ -\frac{RC}{2} e^{-2t/RC} \right]_0^{\infty} = \frac{f^2}{R} \left[ -\frac{RC}{2} (0 - 1) \right] = \frac{f^2 C}{2}$$

$$\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_R = \frac{1}{2} f^2 C$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# MAGNETOSTATICA

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

FISICA GENERALE II  
MAGNETOSTATICA

- ◆ **Le basi della magnetostatica**
- ◆ **Proprietà di  $\mathbf{B}$**
- ◆ **Circuiti e campo magnetico**
- ◆ **Materiali magnetici**

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# MAGNETOSTATICA

## Le basi della magnetosttica

F.Bloisi  
Fisica II

MS 1.  
Rev. 1.1

- ◆ **I primi esperimenti**
- ◆ **Interazioni tra correnti e magneti**
- ◆ **Definizione del campo di induzione magnetica**
- ◆ **Prima formula di Laplace**
- ◆ **Seconda formula di Laplace**
- ◆ **Forza di Lorentz**
- ◆ ***Esempi ed applicazioni***

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Le basi della magnetostatica

## Riepilogo

F.Bloisi  
Fisica II

MS 1.0  
Rev. 1.1

### ◆ **Definizioni**

- ◆ Campo di induzione magnetica

### ◆ **Enunciato**

- ◆ Prima formula di Laplace
- ◆ Seconda formula di Laplace
- ◆ Forza di Lorentz

### ◆ **Importanti fenomeni fisici**

- ◆ Forze tra fili percorsi da correnti
- ◆ Forze su cariche elettriche in moto

### ◆ **Esercizi**

- ◆ Spira circolare percorsa da corrente
- ◆ Filo infinito percorso da corrente
- ◆ Disco carico che ruota
- ◆ Moto di una carica in campo magnetico
- ◆ Forza tra due fili percorsi da corrente
- ◆ Campo B generato da un circuito



### **MNV2 Cap.6:**

#### **Campo magnetico. Forza magnetica.**

- ◆ Par.6.1: Interazione magnetica. Campo magnetico.
- ◆ Par.6.2: Eletticità e magnetismo.
- ◆ Par.6.3: Forza magnetica su una carica in moto.
- ◆ Par.6.4: Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente.
- ◆ Par.6.7: Moto di una particella carica in un campo magnetico **B**.
- ◆ Par.6.8: Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme.



### **MNV2 Cap.7:**

#### **Sorgenti del campo magnetico.**

#### **Legge di Ampere.**

#### **Proprietà magnetiche della materia.**

- ◆ Par.7.1: Campo magnetico prodotto da una corrente.
- ◆ Par.7.2: Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari.
- ◆ Par.7.3: Azioni elettrodinamiche tra fili percorsi da correnti.

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Le basi della magnetostatica

## I primi esperimenti

F.Bloisi  
Fisica II

MS 1.1

- ◆ **Barrette magnetizzate si comportano in maniera analoga a dipoli elettrici:**
  - ◆ poli uguali si respingono, poli opposti si attraggono
  - ◆ la forza (attrattiva o repulsiva) è inversamente proporzionale al quadrato della distanza
- ◆ **Tuttavia vi è una fondamentale differenza:**
  - ◆ è impossibile isolare un singolo polo (“monopolo”) magnetico
- ◆ **La Terra si comporta nel suo complesso come un dipolo magnetico orientato approssimativamente come l’asse di rotazione.**
  - ◆ da cui i nomi N (Nord) e S (Sud) per i “poli” magnetici
- ◆ **Per visualizzare qualitativamente l’andamento del “campo magnetico” si può usare**
  - ◆ della limatura di ferro
  - ◆ un piccolo dipolo magnetico libero di ruotare (come l’ago di una bussola)

### Nota storica:

Fin dall’ 800 a.C. i greci sapevano che alcuni minerali ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$  magnetite) sono in grado di attirare piccoli pezzi di ferro.



Limatura di ferro attorno ad un magnete permanente (calamita)

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Le basi della magnetostatica

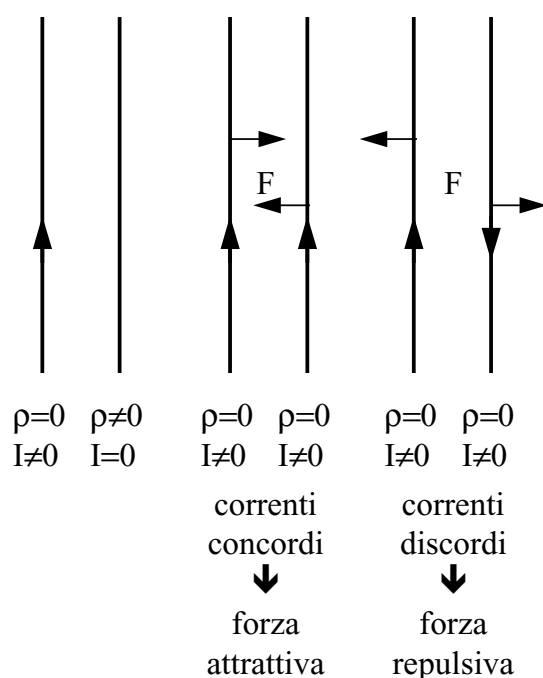
## Interazioni tra correnti e magneti

F.Bloisi  
Fisica II

MS 1.2

Rev. 1.1

### Interazioni tra fili percorsi da corrente



### • Effetti magnetici di una corrente (cariche elettriche in moto)

- Fili paralleli percorsi da correnti costanti concordi (discordi) si attraggono (si respingono)
- Un filo percorso da corrente è in grado di deflettere l’ago di una bussola
- Un filo percorso da corrente è in grado di “allineare” la limatura di ferro (su circonferenze concentriche centrate sul filo)
- Un “solenoido” percorso da corrente costante produce gli stessi effetti “magnetici” di una barretta magnetizzata

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

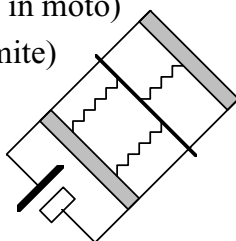
# Le basi della magnetostatica

## Definizione del campo di induzione magnetica

### Osservazioni

(con un piccolo circuito di prova)

- ◆ La forza che agisce sul segmento  $\Delta l$ 
  - ◆ è proporzionale all'intensità della corrente
  - ◆ dipende dalla direzione della corrente
  - ◆ cambia verso se si inverte il verso della corrente
  - ◆ è sempre ortogonale alla direzione della corrente
- ◆ Le sorgenti sono
  - ◆ correnti elettriche (cariche in moto)
  - ◆ magneti permanenti (calamite)



### Definizione operativa del vettore di induzione magnetica $\mathbf{B}$

- ◆ Ruotare il circuito di prova fino ad avere  $\mathbf{F} = 0$ 
  - ◆ la direzione del filo da' la direzione del vettore  $\mathbf{B}$
- ◆ ruotare la spira in modo che  $\Delta l$  sia ortogonale a  $\mathbf{B}$ 
  - ◆ il modulo di  $\mathbf{B}$  è dato da  $B = F/I \Delta l$
- ◆ guardando la spira dal lato in cui la corrente circola in verso antiorario
  - ◆  $\mathbf{B}$  è "entrante" se la spira si "contrae"
  - ◆  $\mathbf{B}$  è "uscente" se la spira si "dilata"

Unità SI:  $\mathbf{T}$  tesla  $[\mathbf{M T}^{-2} \mathbf{I}^{-1}]$   
 $\mathbf{T} = \mathbf{N/A \cdot m}$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Le basi della magnetostatica

## Prima formula di Laplace

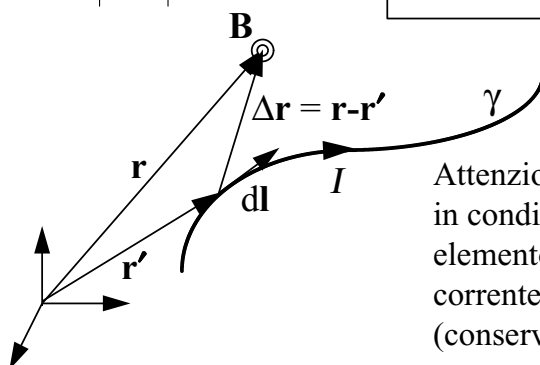
Campo  $\mathbf{B}$  generato da una corrente  
(Prima formula di Laplace)

$$d\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\bar{\mathbf{l}} \times (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}')}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3}$$



Nota:  $d\mathbf{B}$  è ortogonale al piano che contiene  $\Delta \mathbf{r}$  e  $d\mathbf{l}$

$$\bar{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{r}}) = \oint_{\gamma} d\bar{\mathbf{B}} = \oint_{\gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\bar{\mathbf{l}} \times (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}')}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3}$$



Campo  $\mathbf{E}$  generato da una carica elettrica distribuita uniformemente su di un filo

$$d\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq(\bar{\mathbf{r}}') \frac{\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \frac{\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} dl'$$



Nota:  $d\mathbf{E}$  ha la direzione di  $\Delta \mathbf{r}$

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \int_{\gamma} d\bar{\mathbf{E}} = \int_{\gamma} \frac{\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3} \lambda(\bar{\mathbf{r}}') dl'$$

Confronto

Attenzione:  
in condizioni stazionarie un singolo elemento di circuito  $dl$  percorso da corrente non può fisicamente esistere (conservazione della carica)

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Le basi della magnetostatica

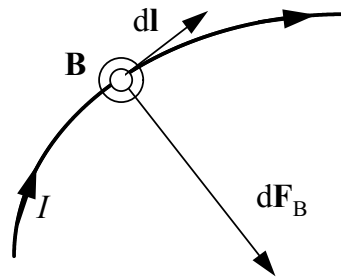
## Seconda formula di Laplace

Azione di  $\mathbf{B}$  su una corrente  
(Seconda formula di Laplace)

$$d\vec{F}_B = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Nota:  $d\vec{F}_B$  è ortogonale a  $\mathbf{B}$   
ed a  $d\mathbf{l}$

$$\vec{F}_B = \oint_{\gamma} d\vec{F}_B = I \oint_{\gamma} d\vec{l} \times \vec{B} = -I \oint_{\gamma} \vec{B} \times d\vec{l}$$



Azione di  $\mathbf{E}$  su di una carica elettrica  
distribuita uniformemente su di un filo

$$d\vec{F}_E = \lambda \vec{E} dl$$

Nota:  $d\vec{F}_E$  ha la direzione di  $\mathbf{E}$

$$\vec{F}_E = \int_{\gamma} d\vec{F}_E = \lambda \int_{\gamma} \vec{E} dl$$

Confronto

Attenzione:  
la forza agisce fisicamente su  
ciascun elementino e può deformare  
il circuito, se questo non è rigido

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Le basi della magnetostatica

## Forza di Lorentz

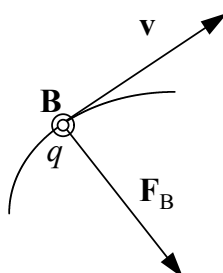
Azione di  $\mathbf{B}$  su una carica in moto  
(Forza di Lorentz)

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Nota:  $\mathbf{F}_B$  è sempre ortogonale a  $\mathbf{B}$  ed a  $\mathbf{v}$

Il lavoro compiuto da  $\mathbf{F}_B$  è sempre nullo:

$$dL_B = \vec{F}_B \cdot d\vec{s} = (q \vec{v} \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} dt) = 0$$



Forza elettromagnetica su di una carica elettrica  
(Forza di Lorentz)

$$\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Nota: considerando due sistemi di riferimento  
inerziale, i contributi dovuti al campo  
elettrico ed al campo magnetico cambiano.

Confronto

Azione di  $\mathbf{E}$  su una carica ferma  
(Forza di Coulomb)

$$\vec{F}_E = q \vec{E}$$

Nota:  $\mathbf{F}_E$  ha la direzione di  $\mathbf{E}$

Osservazione:

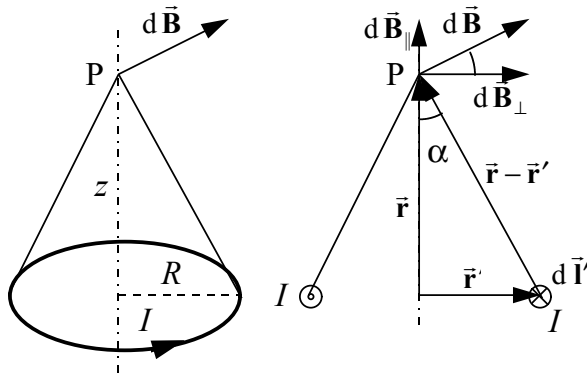
$$d\vec{F}_B = dq \vec{v} \times \vec{B} = I dt \vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Spira circolare percorsa da corrente

Data una spira circolare (raggio  $R$ ) percorsa da una corrente costante  $I$ , determinare il vettore campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  in un punto  $P \equiv (0,0,z)$  sull'asse di simmetria della spira.



Nel un punto  $P$ , appartenente all'asse della spira, per simmetria, il vettore  $\mathbf{B}$  è diretto lungo tale asse.

$$|\mathbf{B}| = \int_{\text{circonf.}} |d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl' = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$|d\mathbf{B}| = |d\mathbf{B}_{\parallel}| \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \sin \alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dl'$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

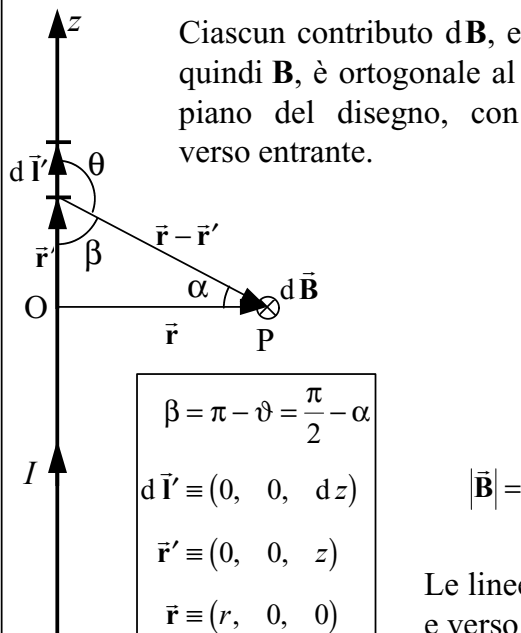
$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Filo infinito percorsa da corrente

Determinare il campo di induzione magnetica prodotto da un filo infinito ( $L \gg r; L \gg z_p$ ) percorso da una corrente costante  $I$ .



Ciascun contributo  $d\mathbf{B}$ , e quindi  $\mathbf{B}$ , è ortogonale al piano del disegno, con verso entrante.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl' \sin \vartheta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r / \cos \alpha$$

$$|\mathbf{r}'| = z = r \tan \alpha \Rightarrow dl' = dz = r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin \vartheta = \sin \beta = \cos \alpha$$

$$|\mathbf{B}| = \int_{\alpha=-\pi/2}^{\alpha=\pi/2} |d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{t}}$$

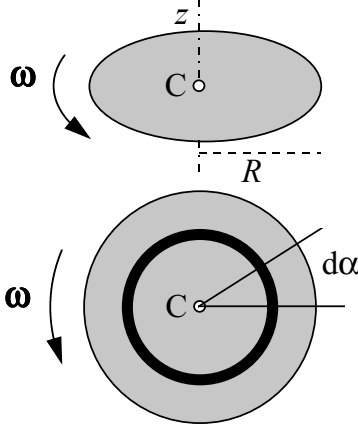
Le linee di forza di  $\mathbf{B}$  sono circonferenze con il centro sul filo e verso antiorario se osservate dal verso della corrente.

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Disco carico che ruota

Dato un disco carico con densità uniforme  $\sigma$ , che ruota intorno al proprio asse di simmetria con velocità angolare costante  $\omega$ , determinare il vettore campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  in un punto  $P \equiv (0,0,z)$  appartenente all'asse di rotazione del disco.



L'intero disco di raggio  $R$  è equivalente ad un insieme di spire circolari concentriche di raggi da  $r=0$  ad  $r=R$ , percorse da corrente  $dI(r)=\sigma\omega r dr$ .

$$|d\vec{B}| = |d\vec{B}_{||}| = \frac{\mu_0 dI(r)}{2} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \frac{r^3 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Nel centro  $C$  del disco ( $z=0$ ):

$$|d\vec{B}| = |d\vec{B}_{||}| = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr$$

$$|\vec{B}| = |\vec{B}_{||}| = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

$$\vec{B}(C) = \frac{\mu_0 \sigma \vec{\omega} R}{2}$$

$$dq = \sigma dS = \sigma dl dr = \sigma r d\alpha dr$$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma r d\alpha dr}{dt} = \sigma r dr \frac{d\alpha}{dt}$$

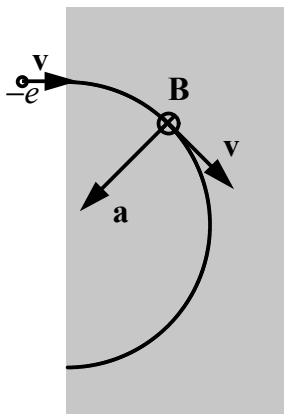
$$= \sigma \omega r dr$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Moto di una carica in campo magnetico

Determinare il tempo che impiega un elettrone (carica elettrica  $-e$ , massa  $m_e$ , velocità iniziale  $\mathbf{v}$  induzione magnetica  $\mathbf{B}$  costante ed uniforme, perpendicolare entrante nel piano del disegno.



Dal secondo principio della dinamica, tenendo conto che sull'elettrone agisce la forza di Lorentz:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= m_e \vec{a} \\ \vec{F} &= -e\vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m_e} \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} a_n = evB/m_e = \text{cost} \\ a_t = 0 \end{cases}$$

quindi il moto è circolare uniforme.

Dalla cinematica sappiamo che in un moto circolare uniforme l'accelerazione (centripeta) vale

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

quindi il raggio ed il periodo sono rispettivamente:

$$R = \frac{m_e v}{eB} \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m_e}{eB}$$

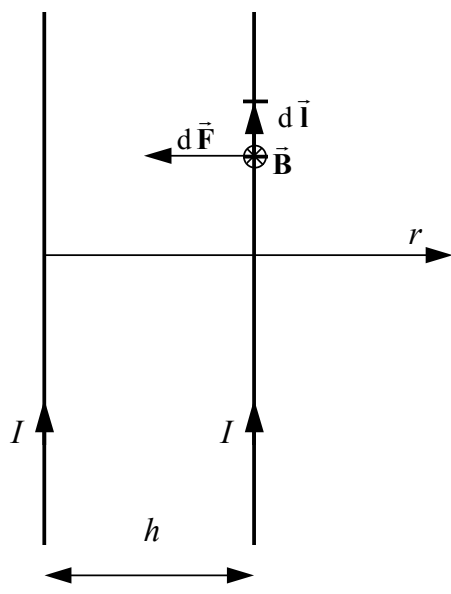
$$\Delta t = \frac{\pi m_e}{eB}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

## Esempi ed applicazioni

### Forza tra due fili percorsi da corrente

Determinare la forza che si esercita tra due fili (lunghezza  $L$ ) percorsi da corrente costante  $I$  (versi concordi) posti a distanza  $h$  tra loro ( $L \gg h$ ).



$$d\vec{F}_B = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F}_B = I B(h) dl(-\hat{r}) = I \frac{\mu_0 I}{2\pi h} dl(-\hat{r}) = -\frac{\mu_0 I^2 dl}{2\pi h} \hat{r}$$

$$\vec{F}_B = \int_{\text{filo 2}} d\vec{F}_B = \int_{\text{filo 2}} -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} \hat{r} dl = -\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi h} \hat{r}$$

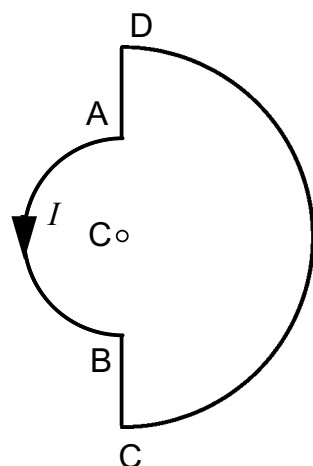
$$\vec{F}_B = -\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi h} \hat{r}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

## Esempi ed applicazioni

### Campo $\vec{B}$ generato da un circuito

Il circuito illustrato in figura è costituito da due semicirconferenze (AB di raggio  $R_1$  e CD di raggio  $R_2$ ) aventi lo stesso centro C, unite da due tratti rettilinei (BC e DA). Determinare il campo di induzione magnetica nel centro C quando il circuito è percorso da corrente costante  $I$  (nel verso illustrato).



$$\vec{B} = \oint_{\gamma} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \int_{\text{arco AB}} \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} + \int_{\text{segmento BC}} \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} + \int_{\text{arco CD}} \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} + \int_{\text{segmento DA}} \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \int_{\text{arco AB}} \frac{R_1 dl \hat{n}}{|R_1|^3} + 0 + \int_{\text{arco CD}} \frac{R_2 dl \hat{n}}{|R_2|^3} + 0 \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\pi R_1^2}{|R_1|^3} + \frac{\pi R_2^2}{|R_2|^3} \right) \hat{n}$$

Nota: indichiamo con  $\hat{n}$  il versore normale uscente dal piano del disegno.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \hat{n}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# MAGNETOSTATICA

## Proprietà di $\mathbf{B}$

F.Bloisi  
Fisica II

MS 2.  
Rev. 1.1

- ◆ **Flusso di  $\mathbf{B}$**
- ◆ **Flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con una linea chiusa**
- ◆ **Circuitazione di  $\mathbf{B}$ : filo infinito**
- ◆ **Teorema della circuitazione di Ampere**
- ◆ **Corrente concatenata con una curva**
- ◆ **Formulazione differenziale**
- ◆ *Esempi ed applicazioni*

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

## Proprietà di $\mathbf{B}$

### Riepilogo

F.Bloisi  
Fisica II

MS 2.0  
Rev. 1.1

#### ◆ **Definizioni**

- ◆ Flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie
- ◆ Flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con una linea chiusa
- ◆ Corrente concatenata con una linea chiusa

#### ◆ **Enunciato e Dimostrazione**

- ◆ Teorema della circuitazione di Ampere
- ◆ Proprietà di  $\mathbf{B}$  in forma integrale ed in forma differenziale

#### ◆ **Importanti fenomeni fisici**

- ◆ Linee di campo di  $\mathbf{B}$  sempre “chiuse”
- ◆ Assenza dei “monopoli” magnetici
- ◆ Uso del teorema della circuitazione di Ampere per il calcolo del campo  $\mathbf{B}$

#### ◆ **Esercizi**

- ◆ Filo infinito percorso da corrente
- ◆ Solenoide infinito
- ◆ Solenoide toroidale
- ◆ Flusso di  $\mathbf{B}$



#### **MNV2 Cap.7:**

##### **Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampere.**

- ◆ Par.7.4: Legge di Ampere.
- ◆ Par.7.7: La legge di Gauss per il campo magnetico.

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Proprietà di $\mathbf{B}$

## Flusso di $\mathbf{B}$

**Importante:**

Il flusso del vettore  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.

in forma integrale: 
$$\oiint_{S_{chiusa}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

in forma differenziale:  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$

Unità di misura del flusso del campo di induzione magnetica:

**Wb** weber  
 $[L^2 M^1 T^{-2} I^{-1}]$

**Wb = T·m<sup>2</sup>**

Dal punto di vista fisico:

- le linee di campo del vettore  $\mathbf{B}$  sono sempre linee “chiuse”
- non esistono le “cariche magnetiche” (monopoli magnetici)
- è possibile parlare di flusso di  $\mathbf{B}$  “concatenato” con una linea chiusa

**Approfondimento**
Dal punto di vista matematico:

Si dimostra che

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = \operatorname{div} \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{\mathbf{l}} \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|^3} \right) = 0$$

da cui

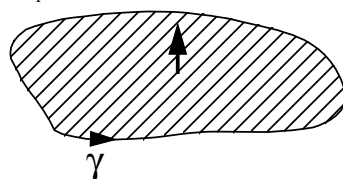
$$\oiint_{S_{chiusa}} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

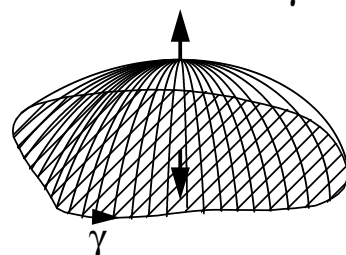
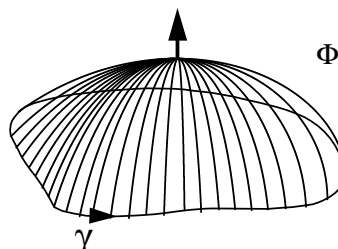
# Proprietà di $\mathbf{B}$

## Flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con una linea chiusa

$$\Phi_{\Sigma_1} = \iint_{\Sigma_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, ds$$



$$\Phi_{\Sigma_2} = \iint_{\Sigma_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, ds$$



$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma} &= \iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iint_{\Sigma_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, ds + \iint_{\Sigma_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, ds \\ &= -\iint_{\Sigma_1} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, ds + \iint_{\Sigma_2} \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, ds \\ &= -\Phi_{\Sigma_1} + \Phi_{\Sigma_2} \end{aligned}$$

$$\Phi_{\Sigma} = 0 \Rightarrow \Phi_{\Sigma_2} = \Phi_{\Sigma_1} = \Phi_{\gamma}$$

Def: si dice flusso del vettore  $\mathbf{B}$  “concatenato” con una curva  $\gamma$  il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso qualunque superficie che abbia tale curva come bordo.

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Proprietà di $\mathbf{B}$

## Circuitazione di $\mathbf{B}$ : filo infinito

- il campo  $\mathbf{B}$  è prodotto da un filo infinito percorso da corrente
- la curva  $\gamma$  è in un piano perpendicolare al filo infinito

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha = \mu_0 I$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha = 0$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos \vartheta = B ds = Br d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Proprietà di $\mathbf{B}$

## Teorema della circuitazione di Ampere

Nell'esempio:  
 $I_{\gamma} = -I_1 + I_2$

### Teorema della circuitazione di Ampere

La circuitazione del vettore induzione magnetica lungo una linea chiusa è pari alla corrente concatenata con la linea chiusa moltiplicata per la costante  $\mu_0$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\gamma}$$

in forma integrale

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_{\gamma}} \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

in forma differenziale

$I_{\gamma}$  la corrente "concatenata" con la curva  $\gamma$ , è definita come:

$$I_{\gamma} = \sum n_i I_i$$

- le correnti  $I_i$  devono essere prese con il segno positivo o negativo a seconda del loro verso rispetto al verso della curva  $\gamma$
- $n_i$  è il numero di volte che la corrente  $I_i$  è concatenata con la curva  $\gamma$

$$I_{\gamma} = \iint_{S_{\gamma}} \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

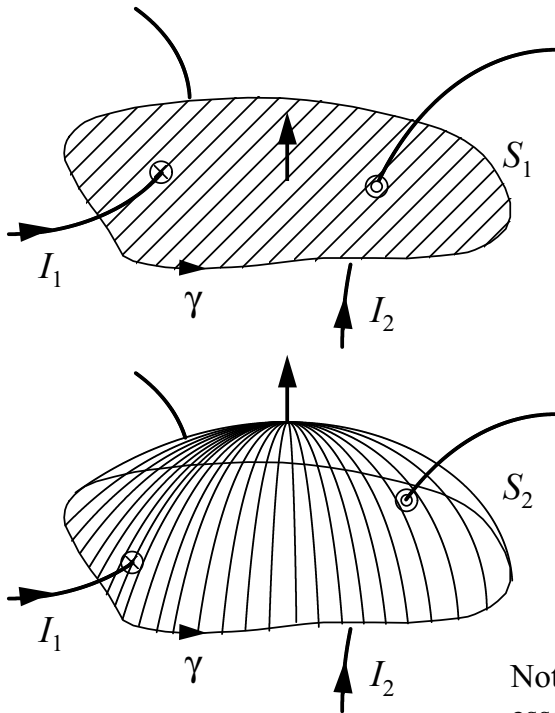
- $S_{\gamma}$  è una superficie che ha la curva  $\gamma$  come bordo
- i versi della curva  $\gamma$  e della normale alla superficie  $S_{\gamma}$  devono essere "concordi"
- Nota: dall'equazione di continuità in condizioni stazionarie segue che tutte le superfici che hanno la curva  $\gamma$  come bordo danno lo stesso valore di  $I_{\gamma}$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Proprietà di $\mathbf{B}$

## Corrente concatenata con una curva

Approfondimento



$S_1$  ed  $S_2$  costituiscono, nell'insieme, una superficie chiusa  $S$

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds &= \iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds + \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds \\ &= -\iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, ds + \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, ds \end{aligned}$$

In condizioni stazionarie

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \oiint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

quindi la corrente "concatenata" non dipende dalla scelta della superficie

$$\iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \, ds = \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \, ds$$

Nota: la corrente "concatenata" con una curva  $\gamma$  può essere definita solo in condizioni stazionarie

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Proprietà di $\mathbf{B}$

## Formulazione differenziale

Equazioni di Maxwell per il campo magnetico in condizioni stazionarie

in forma integrale

$$\oint_{\gamma} \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \mu_0 I_{\gamma}$$

$$\oiint_S \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$$

in forma differenziale

$$\text{rot } \bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{J}}$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{B}} = 0$$

non è possibile, in genere, definire un potenziale scalare tale che  $\bar{\mathbf{B}} = -\text{grad } V_B$

è sempre possibile definire un potenziale vettore tale che  $\bar{\mathbf{B}} = \text{rot } \bar{\mathbf{A}}$

Unità SI del potenziale vettore:

$\text{Wb/m} = \text{T} \cdot \text{m}$   
 $[\text{L}^1 \text{M}^1 \text{T}^{-2} \text{I}^{-1}]$

Approfondimento

Nota: Utilizzando il potenziale vettore è possibile scrivere il flusso del campo di induzione magnetica concatenato con una curva  $\gamma$  come la circuitazione del potenziale vettore lungo tale curva:

$$\Phi_{\gamma} = \iint_S \bar{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \iint_S \text{rot } \bar{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \oint_{\gamma} \bar{\mathbf{A}} \cdot d\bar{\mathbf{l}}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

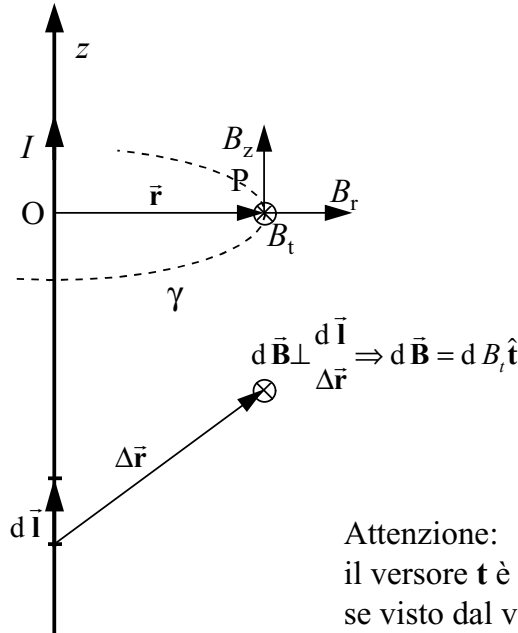
# Esempi ed applicazioni

## Filo infinito percorso da corrente (1/2)

F.Bloisi  
Fisica II

MS 2.7  
Rev. 1.1

Determinare il campo di induzione magnetica prodotto da un filo infinito ( $L \gg r$ ;  $L \gg z_p$ ) percorso da una corrente costante  $I$ .



- Da considerazioni di simmetria si deduce che

$$\vec{B}(r, \vartheta, z) = B_r(r)\hat{r} + B_z(r)\hat{k} + B_t(r)\hat{t}$$

- dalla prima formula di Laplace si ricava che  $d\vec{B}$ , e quindi  $\vec{B}$ , è ortogonale al piano del disegno

$$\vec{B} = \int_{\text{filo}} d\vec{B} = \int_{\text{filo}} d B_t \hat{t} = \left( \int_{\text{filo}} d B_t \right) \hat{t} = B_t \hat{t}$$

- dal teorema della circuitazione di Ampere si ricava il modulo di  $\vec{B}$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\gamma} \Rightarrow 2\pi r B_t = \mu_0 I \Rightarrow B_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Attenzione:

il versore  $\hat{t}$  è orientato in verso antiorario se visto dal verso positivo della corrente.

$$\vec{B}(r, \vartheta, z) = \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{t}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

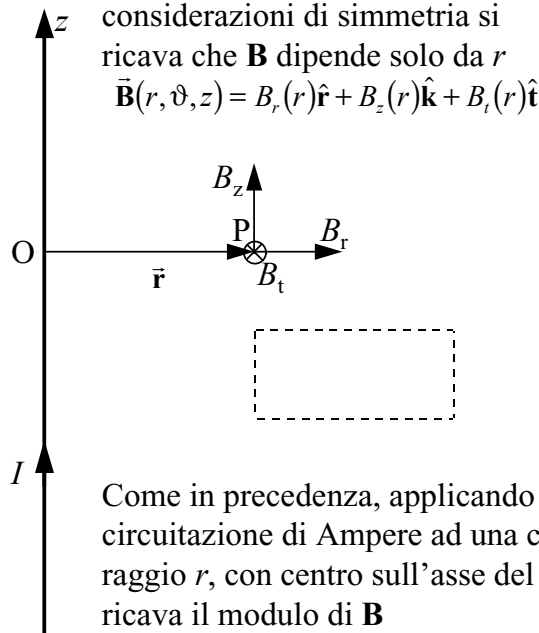
# Esempi ed applicazioni

## Filo infinito percorso da corrente (2/2)

F.Bloisi  
Fisica II

MS 2.8  
Rev. 1.1

Come in precedenza, da considerazioni di simmetria si ricava che  $\vec{B}$  dipende solo da  $r$

$$\vec{B}(r, \vartheta, z) = B_r(r)\hat{r} + B_z(r)\hat{k} + B_t(r)\hat{t}$$


Nota: è possibile evitare l'uso della prima formula di Laplace

- dal teorema del flusso applicato ad un cilindro di raggio  $r$  coassiale con il filo si ricava  $B_r(r) = 0$
- dal teorema della circuitazione di Ampere applicato ad un rettangolo come quello illustrato, dovendo essere  $\vec{B} = 0$  all'infinito, si ricava  $B_z(r) = 0$

$$B_r(r) = 0 \quad B_z(r) = 0 \Rightarrow \vec{B}(r, \vartheta, z) = B_t(r)\hat{t}$$

Come in precedenza, applicando il teorema della circuitazione di Ampere ad una circonferenza di raggio  $r$ , con centro sull'asse del solenoide si ricava il modulo di  $\vec{B}$

$$\vec{B}(r, \vartheta, z) = \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{t}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

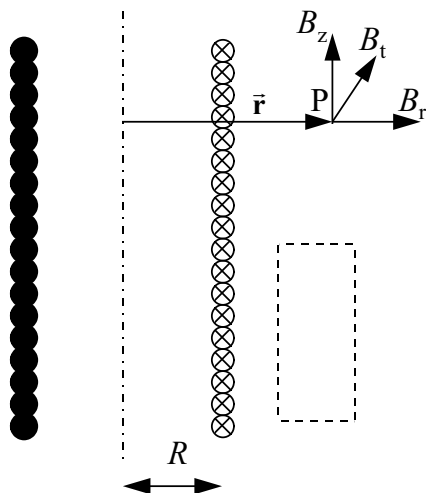
## Solenoidi infiniti (1/2)

Determinare il campo di induzione magnetica prodotto da un solenoide infinito ( $L \gg R$ ;  $L \gg r$ ;  $L \gg z_p$ ), con  $n$  spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente costante  $I$ .

Da considerazioni di simmetria si deduce

$$\text{che } \vec{B}(r, \vartheta, z) = B_r(r)\hat{r} + B_z(r)\hat{k} + B_t(r)\hat{t}$$

Per  $r > R$



Applicando il teorema del flusso ad un cilindro di raggio  $r$ , coassiale con il solenoide si ricava che  $B_r(r) = 0$

Applicando il teorema della circuitazione ad una circonferenza di raggio  $r$ , con centro sull'asse del solenoide si ricava che  $B_t(r) = 0$

Applicando il teorema della circuitazione ad un rettangolo come quello illustrato, e dovendo essere  $\mathbf{B} = 0$  all'infinito, si ricava che  $B_z(r) = 0$

$$\vec{B}(r, \vartheta, z) = 0 \quad \text{per } r > R$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

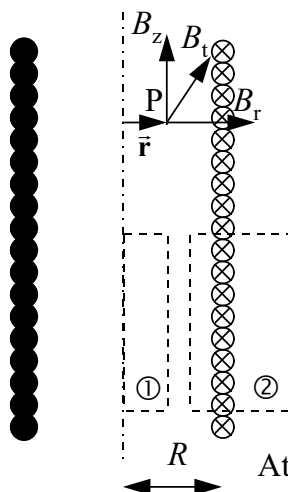
## Solenoidi infiniti (2/2)

Determinare il campo di induzione magnetica prodotto da un solenoide infinito ( $L \gg R$ ;  $L \gg r$ ;  $L \gg z_p$ ), con  $n$  spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente costante  $I$ .

Da considerazioni di simmetria si deduce

$$\text{che } \vec{B}(r, \vartheta, z) = B_r(r)\hat{r} + B_z(r)\hat{k} + B_t(r)\hat{t}$$

Per  $r < R$



Anche per  $r < R$  si ricava che  $B_r(r) = 0$   $B_t(r) = 0$

Applicando il teorema della circuitazione ad un rettangolo come quello indicato con ①, si ricava che  $B_z(r) = \text{cost}$

Applicando il teorema della circuitazione ad un rettangolo come quello indicato con ②, poiché  $\mathbf{B} = 0$  all'esterno, si ricava che  $B_z(r) = \mu_0 n I$

Attenzione:

il versore  $\hat{k}$  è orientato in modo da veder circolare la corrente in verso antiorario.

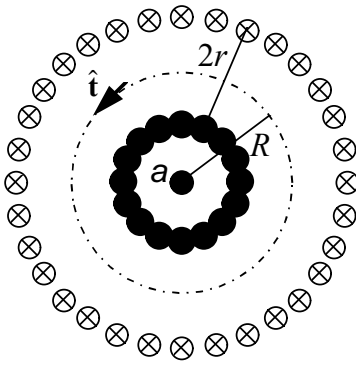
$$\vec{B}(r, \vartheta, z) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{k} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Solenoide toroidale

Determinare il campo di induzione magnetica sulla circonferenza mediana di un solenoide toroidale (raggi  $R$  ed  $r$ ,  $N$  spire) percorso da una corrente costante  $I$ .



Nota:  
nel solenoide toroidale  
 $\mathbf{B}$  non è uniforme.

- Ricordando che le linee di campo di  $\mathbf{B}$ 
  - devono essere chiuse
  - devono concatenare delle correnti
- Tenendo conto della simmetria del problema si può affermare che le linee di campo di  $\mathbf{B}$  sono delle circonferenze aventi centro sull'asse di simmetria ( $a$  in figura).

Applicando il teorema della circuitazione alla circonferenza mediana del solenoide toroidale (una circonferenza di raggio  $R$ ), si ricava che

$$\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

$$B 2\pi R = \mu_0 N I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N I}{2\pi R}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \frac{N I}{2\pi R} \hat{\mathbf{t}}$$

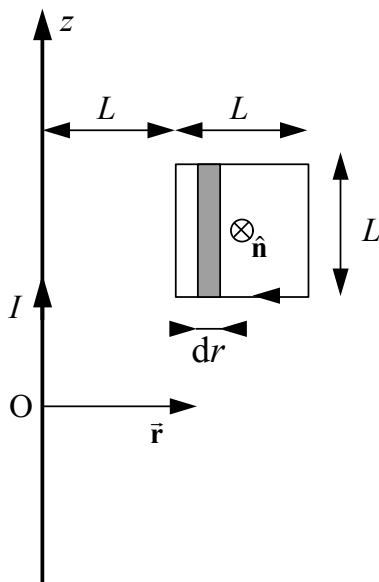
$\hat{\mathbf{t}}$  orientato come in figura.

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Flusso di $\mathbf{B}$

Un filo infinito è percorso da una corrente costante  $I$ . Si determini il flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con un quadrato di lato  $L$  posto a distanza  $L$  dal filo, orientata come illustrato in figura.



Il campo di induzione magnetica prodotto da un filo infinito è

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{t}}$$

Il flusso attraverso un elemento  $ds = L dr$  è

$$d\Phi = \vec{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} L dr$$

ed il flusso attraverso la superficie del quadrato vale

$$\Phi = \int_{\text{quadrato}} d\Phi = \int_L^{2L} -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} L dr = -\frac{\mu_0 I L}{2\pi} \int_L^{2L} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln 2$$

$$\Phi = -\frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln 2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# MAGNETOSTATICA

## Circuiti e campo magnetico

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.  
Rev. 1.1

- ◆ **Dipolo magnetico**
- ◆ **Approssimazione di dipolo**
- ◆ **Effetto Hall**
- ◆ **Auto/mutua induzione**
- ◆ **Campo B ed energia**
- ◆ *Esempi ed applicazioni*

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e campo magnetico

## Riepilogo

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.0  
Rev. 1.1

### ◆ Definizioni

- ◆ Dipolo magnetico
- ◆ Coefficienti di auto/mutua induzione

### ◆ Calcolo di

- ◆ Energia associata al campo magnetico
- ◆ Energia immagazzinata in un'induttanza

### ◆ Importanti fenomeni fisici

- ◆ Approssimazione di dipolo
- ◆ Scomposizione di una spira
- ◆ Effetto Hall

### ◆ Esercizi

- ◆ Momento meccanico su di una spira
- ◆ Lavoro per spostare una spira
- ◆ Coefficiente di mutua induzione
- ◆ Coefficiente di autoinduzione di un solenoide
- ◆ Energia immagazzinata in un solenoide



### MNV2 Cap.6:

#### **Campo magnetico. Forza magnetica.**

- ◆ Par.6.5: Momenti meccanici su circuiti piani.
- ◆ Par.6.6: Effetto Hall.



### MNV2 Cap.7:

#### **Sorgenti del campo magnetico.**

#### **Legge di Ampere.**

#### **Proprietà magnetiche della materia.**

- ◆ Par.7.2: Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari.



### MNV2 Cap.8:

#### **Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo.**

- ◆ Par.8.4: Autoinduzione.
- ◆ Par.8.5: Energia magnetica.
- ◆ Par.8.6: Induzione mutua.

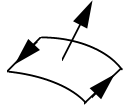
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e campo magnetico

## Dipolo magnetico

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.1  
Rev. 1.1



Poiché non esistono le “cariche magnetiche” la sorgente di campo magnetico più semplice è una piccola spira percorsa da corrente o “*dipolo magnetico*”.

Def.: momento di dipolo magnetico

$$d\vec{m} = I \hat{n} ds$$

Unità di misura:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}^2 \quad [\mathbf{L}^2 \mathbf{I}]$$

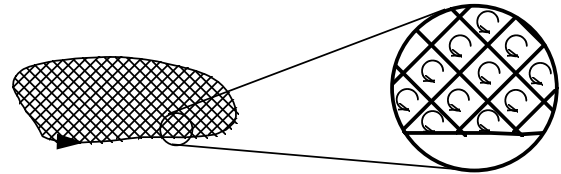
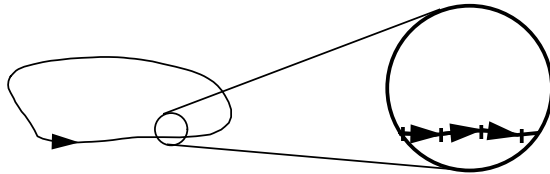
Le interazioni tra dipolo magnetico e campo  $\mathbf{B}$  si esprimono, come per il dipolo elettrico in campo elettrico:

forza  $\vec{F}_m = \text{grad}(\vec{B} \cdot \vec{m})$

momento meccanico  $\vec{M}_m = -\vec{B} \times \vec{m}$

energia potenziale  $E_m = -\vec{B} \cdot \vec{m}$

Nota: L'energia potenziale di una spira percorsa da corrente costante  $I$ , in un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  si può scrivere  $E_m = -I \Phi_\gamma$  dove  $\Phi_\gamma$  è il flusso di  $\mathbf{B}$  concatenato con il circuito  $\gamma$ .



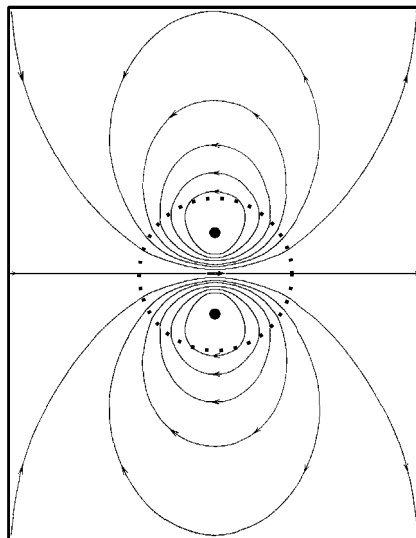
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e campo magnetico

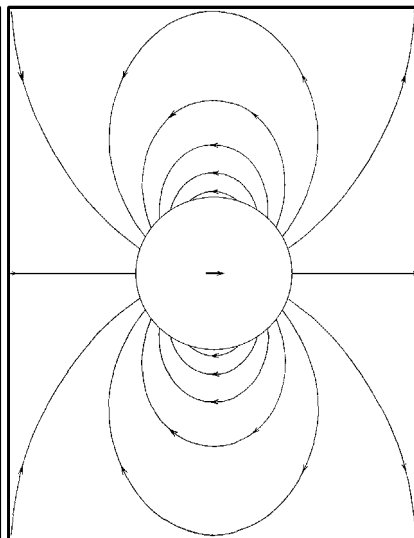
## Approssimazione di dipolo

F.Bloisi  
Fisica II

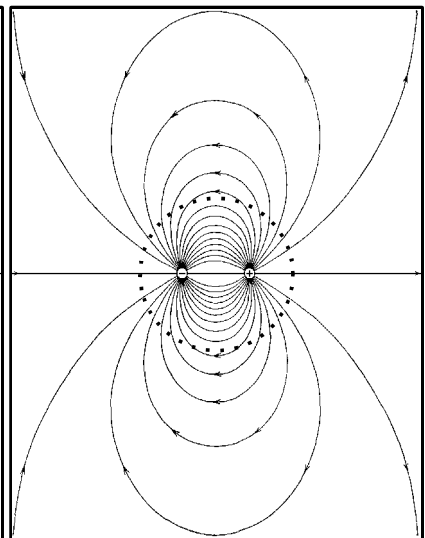
MS 3.2  
Rev. 1.1



Linee di campo ( $\mathbf{B}$ ) di una spira percorsa da corrente



Linee di campo di un dipolo (elettrico o magnetico)



Linee di campo ( $\mathbf{E}$ ) di due cariche elettriche opposte

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e campo magnetico

## Effetto Hall

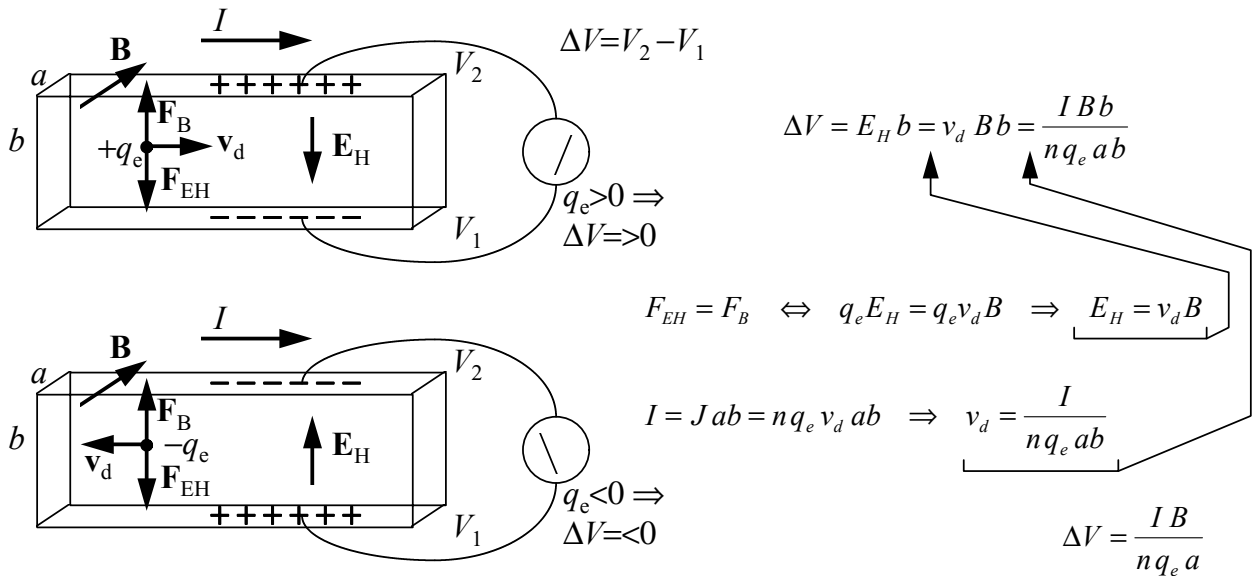
F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.3

Rev. 1.1

Un conduttore (densità di cariche di conduzione  $n$ ) a forma di nastro (sezione  $a, b$ ), percorso da una corrente costante  $I$ , viene posto in un campo  $\mathbf{B}$  costante ed uniforme.

(ortogonalmente alla direzione della corrente) dipende dal segno della carica elementare  $q_e$ .



--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

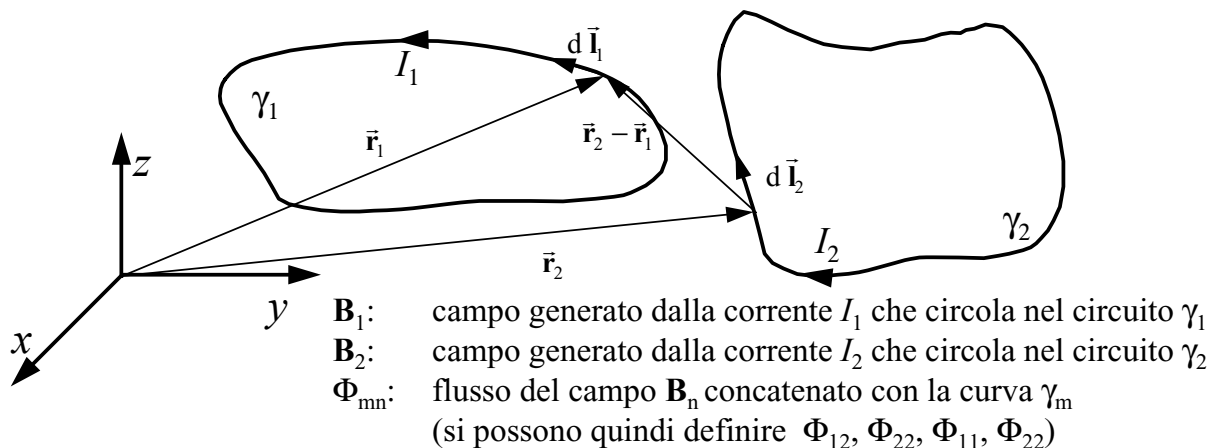
# Circuiti e campo magnetico

## Auto/mutua induzione (1/2)

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.4

Rev. 1.1



Si dimostra che

$$\Phi_{21} = \int_{\Sigma_2} \vec{\mathbf{B}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 d s_2$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{d \vec{\mathbf{I}}_1 \cdot d \vec{\mathbf{I}}_2}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|}$$

- Il rapporto  $\Phi_{21}/I_1$  dipende solo dalle caratteristiche geometriche dei due circuiti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$
- Lo stesso vale per i rapporti  $\Phi_{12}/I_2, \Phi_{11}/I_1, \Phi_{22}/I_2$
- Vale:  $\Phi_{12}/I_2 = \Phi_{21}/I_1$

**Approfondimento**

Utilizzando il potenziale vettore

$$\Phi_{21} = \oint_{\gamma_2} \vec{\mathbf{A}}_1 \cdot d \vec{\mathbf{I}}_2$$

$$= \oint_{\gamma_1} \left( \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \frac{d \vec{\mathbf{I}}_1}{|\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1|} \right) \cdot d \vec{\mathbf{I}}_2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e campo magnetico

## Auto/mutua induzione (2/2)

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.5

Def.: Si chiama coefficiente di mutua induzione tra i circuiti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  il rapporto tra il flusso  $\Phi_{21}$  (del campo  $\mathbf{B}_1$  concatenato con la curva  $\gamma_2$ ) e la corrente  $I_1$  che circola nel circuito  $\gamma_1$  (e che genera il campo  $\mathbf{B}_1$ )

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Def.: Si chiama coefficiente di auto induzione del circuito  $\gamma_1$  il rapporto tra il flusso  $\Phi_{11}$  (del campo  $\mathbf{B}_1$  concatenato con la curva  $\gamma_1$ ) e la corrente  $I_1$  che circola nel medesimo circuito

$$L_1 = M_{11} = \frac{\Phi_{11}}{I_1}$$

- Scambiando i ruoli di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si trova che  $M_{12} = M_{21}$ , anche se  $\Phi_{12} \neq \Phi_{21}$
- Il flusso concatenato con il circuito  $\gamma_1$  è

$$\Phi_{\gamma_1} = \Phi_{11} + \Phi_{12} = I_1 L_1 + I_2 M_{21}$$

Unità di misura:

$$\mathbf{H} \quad \text{henry} \\ [\mathbf{L}^2 \mathbf{M}^1 \mathbf{T}^{-2} \mathbf{I}^{-2}]$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Wb/A} \\ \mathbf{H} = \mathbf{T \cdot m^2/A}$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Circuiti e campo magnetico

## Campo $\mathbf{B}$ ed energia

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.6

Si trova che, come per il campo elettrico, anche al campo di induzione magnetica, è possibile associare una densità di energia :

$$w_B(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{B^2(\vec{r})}{\mu_0}$$

$$E_m = \iiint_{V_\infty} w_B d\tau = \iiint_{V_\infty} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau$$

Si trova anche che, se  $L$  è il coefficiente di autoinduzione di un circuito, l'energia immagazzinata nel campo di induzione magnetica può essere anche scritta come:

$$E_L = \frac{1}{2} L I^2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

## Momento meccanico su di una spira

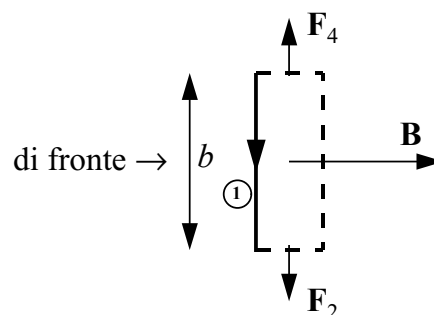
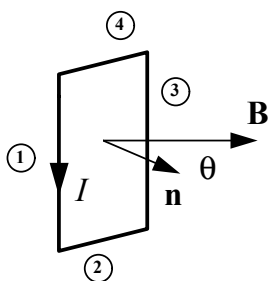
F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.7

Calcolare il momento meccanico che un campo di induzione magnetica uniforme esercita su di una spira rettangolare percorsa da corrente.

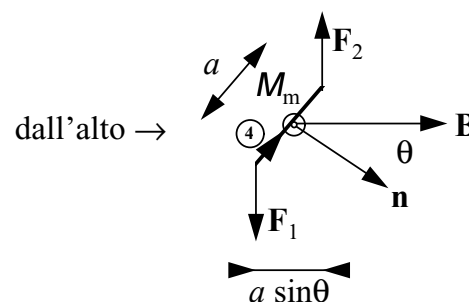
$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_3| = I b B$$

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = I a B \cos \vartheta$$



$$|\vec{M}_m| = |\vec{F}_1| a \sin \vartheta = I b B a \sin \vartheta = I (a b) |\hat{n} \times \vec{B}| = I S |\hat{n} \times \vec{B}|$$

$$\vec{M}_m = I S \hat{n} \times \vec{B} = (I S \hat{n}) \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{m}$$



--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

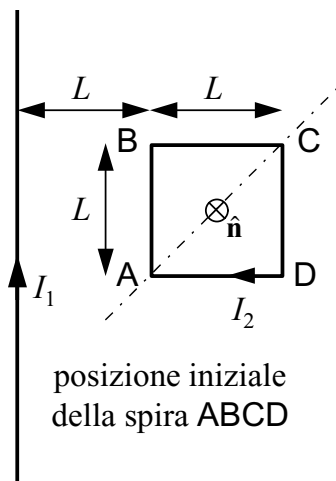
# Esempi ed applicazioni

## Lavoro per spostare una spira

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.8

Una spira quadrata di lato  $L$ , percorsa da una corrente costante  $I_2$ , è posta a distanza  $L$  da un filo infinito percorso da una corrente costante  $I_1$ . Calcolare il lavoro per ruotare la spira di  $180^\circ$  attorno ad una sua diagonale.



posizione iniziale  
della spira ABCD

$$L^{(est)} = \Delta E_m$$

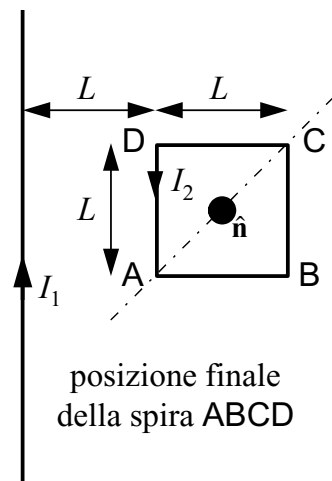
$$= (-I_2 \Phi_{21 \text{ fin}}) - (-I_2 \Phi_{21 \text{ iniz}})$$

$$= -I_2 (\Phi_{21 \text{ fin}} - \Phi_{21 \text{ iniz}})$$

$$\Phi_{21 \text{ fin}} = -\frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln 2$$

$$\Phi_{21 \text{ iniz}} = -\Phi_{21 \text{ fin}} = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln 2$$

$$L^{(est)} = -I_2 \left( -2 \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln 2 \right)$$



posizione finale  
della spira ABCD

$$L^{(est)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{\pi} \ln 2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

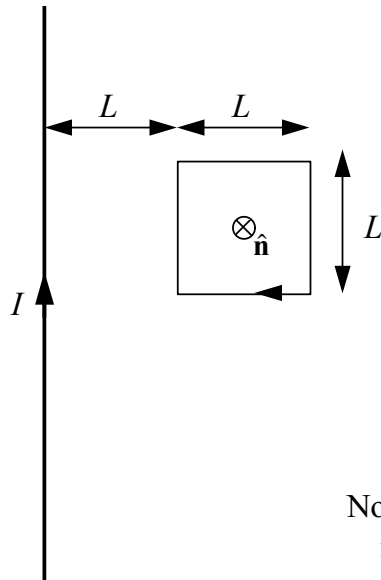
# Esempi ed applicazioni

## Coefficiente di mutua induzione

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.9

Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra un filo infinito ed una spira quadrata di lato  $L$  posto a distanza  $L$  dal filo.



Supponiamo che nel filo circoli una corrente costante  $I_1$ .

Il flusso concatenato con la spira quadrata è già stato calcolato

$$\Phi_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln 2$$

quindi dalla definizione di coefficiente di mutua induzione

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = -\frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln 2$$

Nota:

il segno di  $M$  dipende dalla scelta dei versi di percorrenza dei due circuiti

$$M = -\frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln 2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

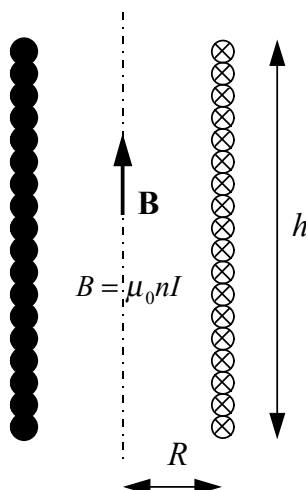
# Esempi ed applicazioni

## Coefficiente di autoinduzione di un solenoide

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.10

Calcolare il coefficiente di autoinduzione di un solenoide (raggio  $R$  e lunghezza  $h \gg R$ ), con  $n$  spire per unità di lunghezza.



Per definizione, il coefficiente di autoinduzione è  $L = \frac{\Phi}{I}$

Supponiamo che nel solenoide circoli una corrente costante  $I$ .

Il flusso concatenato con una singola spira è

$$\Phi' = \int_{\text{cerchio raggio R}} \vec{B} \cdot \hat{n} \, ds = nh B \pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2$$

Il flusso concatenato con l'intero solenoide ( $N$  spire) è

$$\Phi = N \Phi' = nh \mu_0 n I \pi R^2 = \mu_0 n^2 I \pi R^2 h$$

$$L = \mu_0 n^2 \pi R^2 h$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

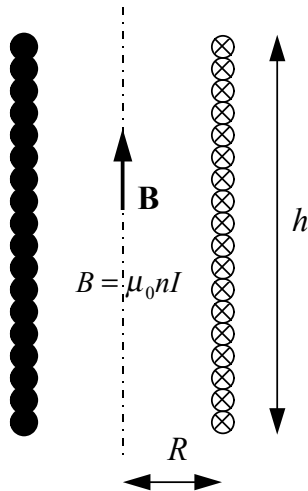
## Energia immagazzinata in un solenoide <sup>(1/2)</sup>

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.11

Calcolare l'energia immagazzinata in un solenoide (raggio  $R$  e lunghezza  $h \gg R$ ), con  $n$  spire per unità di lunghezza.

Metodo 1)



Il campo di induzione magnetica è già stato calcolato e vale, in modulo:

$$B = \mu_0 n I$$

quindi la densità di energia del campo  $\mathbf{B}$  è

$$w_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{(\mu_0 n I)^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$$

e l'energia totale immagazzinata nel solenoide è

$$E = \iiint_{V_\infty} w_B d\tau = \iiint_{V_\infty} \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 d\tau = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \pi R^2 h$$

$$E_L = \frac{\pi R^2 h}{2} \mu_0 n^2 I^2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

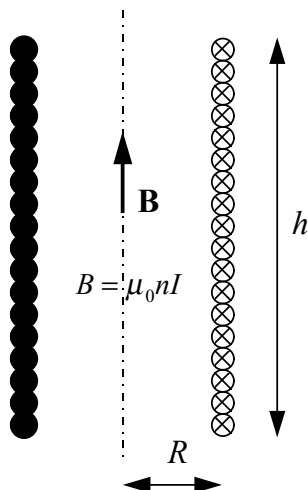
## Energia immagazzinata in un solenoide <sup>(2/2)</sup>

F.Bloisi  
Fisica II

MS 3.12

Calcolare l'energia immagazzinata in un solenoide (raggio  $R$  e lunghezza  $h \gg R$ ), con  $n$  spire per unità di lunghezza.

Metodo 2)



Il coefficiente di autoinduzione è già stato calcolato e vale

$$L = \mu_0 n^2 \pi R^2 h$$

quindi l'energia immagazzinata nell'induttanza è

$$E = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi R^2 h I^2$$

$$E_L = \frac{\pi R^2 h}{2} \mu_0 n^2 I^2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# MAGNETOSTATICA

## Materiali magnetici

F.Bloisi  
Fisica II

MS 4.  
Rev. 1.1

- ◆ **Alcuni fatti sperimentali**
- ◆ **Descrizione microscopica**
- ◆ **Descrizione macroscopica**
- ◆ **Ciclo di iteresi**
- ◆ **Condizioni di raccordo**
- ◆ **Deflessione delle linee di campo**
- ◆ *Esempi ed applicazioni*

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Materiali magnetici

## Riepilogo

F.Bloisi  
Fisica II

MS 4.0  
Rev. 1.1

### ◆ **Definizioni**

- ◆ Intensità di magnetizzazione
- ◆ Correnti atomiche microscopiche
- ◆ Vettore campo magnetico
- ◆ Suscettività magnetica
- ◆ Permeabilità magnetica relativa

### ◆ **Enunciato (senza dimostrazione)**

- ◆ Condizioni di raccordo di **B**
- ◆ Condizioni di raccordo di **H**

### ◆ **Importanti fenomeni fisici**

- ◆ Diamagnetismo/paramagnetismo
- ◆ Ferromagnetismo

### ◆ **Esercizi**

- ◆ Solenoide rettilineo
- ◆ Solenoide toroidale
- ◆ Solenoide toroidale con traferro
- ◆ Solenoide toroidale (confronto)
- ◆ Magnete permanente
- ◆ Mutua induzione



### **MNV2 Cap.7:**

#### **Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampere.**

- ◆ Par.7.5: Proprietà magnetiche della materia.
- ◆ Par.7.6: Meccanismi di magnetizzazione e correnti amperiane.
- ◆ Par.7.8: Equazioni generali della magnetostatica in presenza di mezzi magnetizzati.

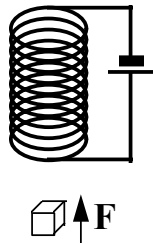
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Materiali magnetici

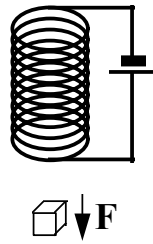
## Alcuni fatti sperimentali

F.Bloisi  
Fisica II

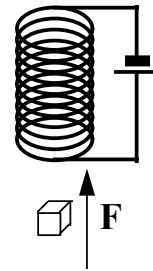
MS 4.1



Debole forza  
attrattiva  
-  
alluminio  
platino  
cromo  
etc.  
-  
paramagnetismo



Debole forza  
repulsiva  
-  
rame  
piombo  
carbonio  
etc.  
-  
diamagnetismo



Notevole forza  
attrattiva  
-  
ferro  
cobalto  
nichel  
etc.  
-  
ferromagnetismo

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

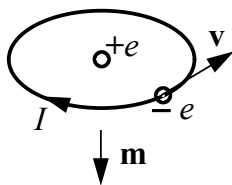
# Materiali magnetici

## Descrizione microscopica

F.Bloisi  
Fisica II

MS 4.2

Modello atomico  
di Rutherford



Atomo di idrogeno

nucleo:

carica elettrica  $+Ze$

$Z$  elettroni:

carica elettrica  $-e$

raggio dell'orbita:

$\approx 10^{-10}$  m

periodo di rotazione:

$\approx 10^{-16}$  s

### Materiali paramagnetici

- le molecole hanno un momento di dipolo magnetico proprio
- il momento di dipolo magnetico indotto è concorde al campo
- il materiale viene (debolmente) attratto verso le zone in cui il campo è più intenso

### Materiali diamagnetici

- le molecole non hanno un momento di dipolo magnetico proprio
- il momento di dipolo magnetico indotto è opposto al campo
- il materiale viene (debolmente) respinto dalle zone in cui il campo è più intenso

### Materiali ferromagnetici

- le molecole hanno un momento di dipolo magnetico proprio
- all'interno di ciascun volumetto (domini di Weiss) i momenti di dipolo sono allineati tra loro e si muovono assieme
- il momento di dipolo magnetico indotto (ottenuto allineando i domini) è concorde al campo ed è molto intenso
- il materiale viene (fortemente) attratto verso le zone in cui il campo è più intenso

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Materiali magnetici

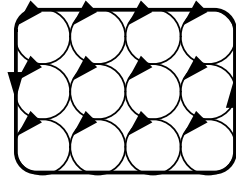
## Descrizione macroscopica

Vettore intensità di magnetizzazione:  $\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{N \Delta\tau}$   $\vec{M} = \vec{M}(\vec{B})$

Correnti atomiche microscopiche

• di superficie:  $\vec{J}_{msup} = \vec{M} \times \hat{n}$

• di volume:  $\vec{J}_m = \text{rot } \vec{M}$



Vettore campo magnetico:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Suscettività magnetica,  $\chi_m$ :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Permeabilità magnetica relativa,  $\mu_r$ :

$$\vec{B} = \mu_0(\chi_m + 1)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

Equazioni di Maxwell nella materia (per il campo magnetico):

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

sup. chiusa  
 $\Sigma$

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{conc}}$$

linea chiusa  
 $\gamma$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{cond}}$$

Condizioni di raccordo:

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\mu_{r1}H_{1n} = \mu_{r2}H_{2n}$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$B_{1t}/\mu_{r1} = B_{2t}/\mu_{r1}$$

Nota:

mat. paramagnetici:

$$\chi_m > 0 \Rightarrow \mu_r \approx 1$$

$$\chi_m \approx +10^{-6}$$

mat. diamagnetici:

$$\chi_m < 0 \Rightarrow \mu_r < 1$$

$$\chi_m \approx -10^{-6}$$

mat. ferromagnetici:

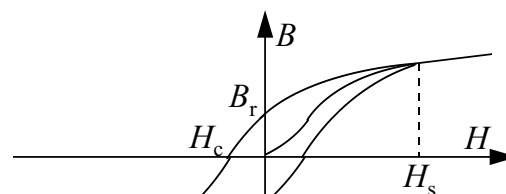
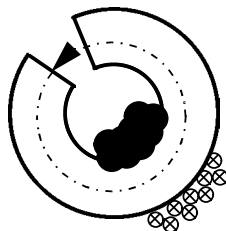
$$\chi_m \gg 0 \Rightarrow \mu_r \gg 1$$

$$\chi_m \approx +10^{+3} \div +10^{+5}$$

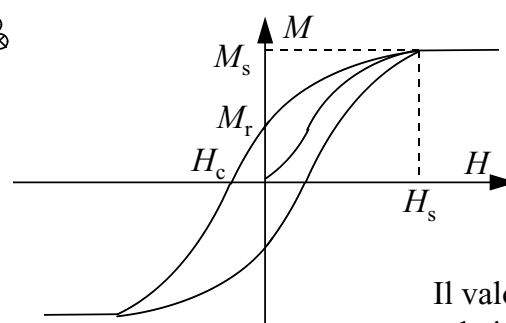
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Materiali magnetici

## Ciclo di isteresi



ciclo di isteresi



Nota:

per  $T > T_c$  (temperatura di Curie) diventa paramagnetico

$H_s$ : Campo di saturazione

$M_s$ : Magnetizzazione di saturazione

$B_r$ : Campo residuo

$M_r$ : Magnetizzazione residua

$H_c$ : Campo coercitivo

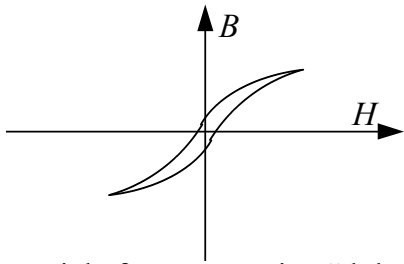
$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$$

Il valore della permeabilità magnetica relativa,  $\mu_r$ , dipende, in genere, sia dalle condizioni di lavoro che dalla "storia".

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

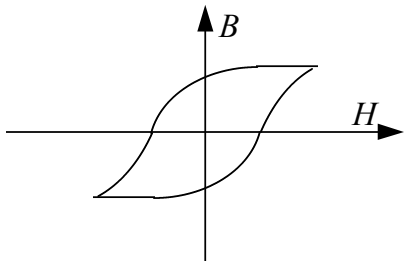
# Materiali magnetici

## Materiali ferromagnetici



materiale ferromagnetico "dolce"

Ciclo di isteresi "stretto".  
Permeabilità magnetica relativa elevata, ma praticamente costante.  
Campo residuo molto basso.  
Materiale adatto per elettromagneti.



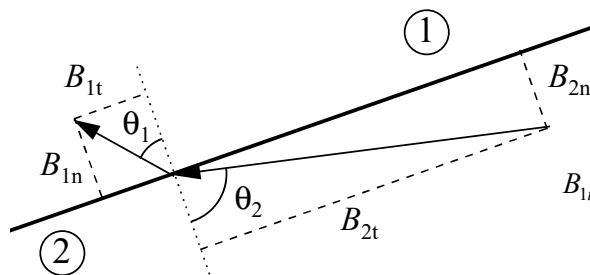
materiale ferromagnetico "duro"

Ciclo di isteresi "lago".  
Magnetizzazione residua elevata e prossima al valore di saturazione.  
Materiale adatto per magneti permanenti (calamite).

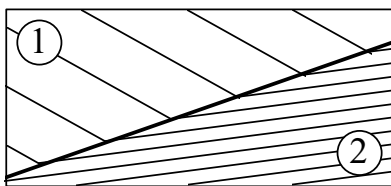
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Materiali magnetici

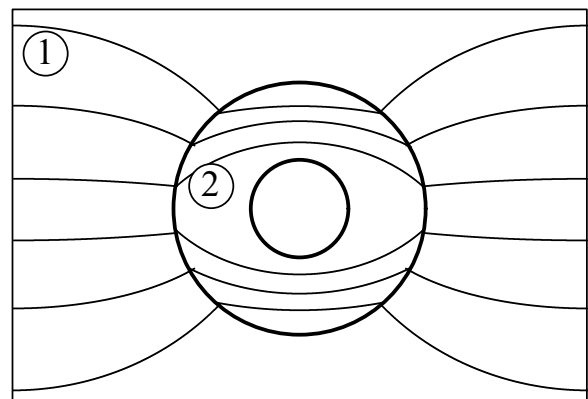
## Deflessione delle linee di campo



$$\left. \begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ B_{1t}/\mu_{r1} &= B_{2t}/\mu_{r2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\tan \vartheta_2}{\tan \vartheta_1} = \frac{B_{2t}}{B_{2n}} = \frac{B_{2t} B_{1n}}{B_{2n} B_{1t}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$



$$\mu_{r2} \gg \mu_{r1}$$



All'interno di un materiale ferromagnetico:

- le linee di campo sono molto più fitte (il campo  $\mathbf{B}$  è molto più intenso) che all'esterno
- le linee di campo tendono a seguire la forma del materiale ferromagnetico

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

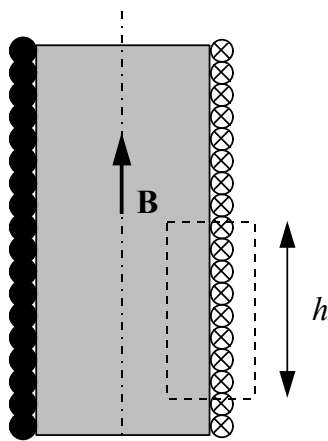
## Solenoidi rettilineo

F. Bloisi  
Fisica II

MS 4.7

Rev. 1.1

Calcolare il campo di induzione magnetica all'interno di un solenoide infinito (raggio  $R$ ,  $n$  spire per unità di lunghezza) riempito con un materiale magnetico (permeabilità magnetica relativa  $\mu_r$ ) percorso da una corrente costante  $I$ .



Applichiamo il teorema della circuitazione di Ampere scritto per il campo magnetico  $\mathbf{H}$ :

$$\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = I_{\text{conc}}$$

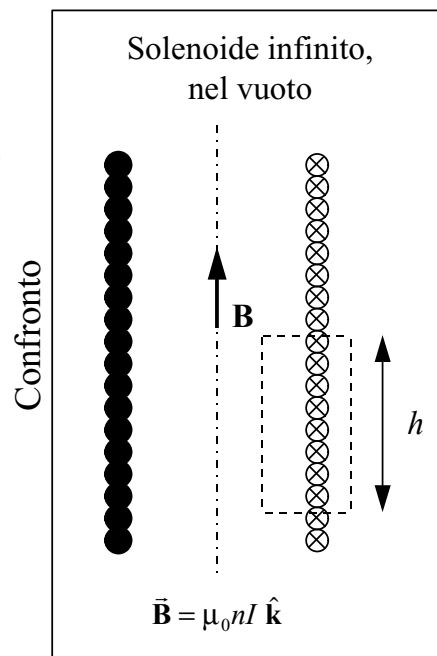
$$Hh = nhI$$

$$H = nI$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r nI$$

Nota: il versore  $\hat{\mathbf{k}}$  è orientato in modo da veder circolare la corrente in verso antiorario.

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu_r nI \hat{\mathbf{k}}$$



--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

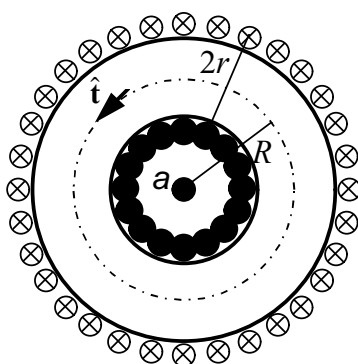
## Solenoidi toroidale

F. Bloisi  
Fisica II

MS 4.8

Rev. 1.1

Determinare il campo di induzione magnetica sulla circonferenza mediana di un solenoide toroidale (raggi  $R$  ed  $r$ ,  $N$  spire) percorso da una corrente costante  $I$ .



Applichiamo il teorema della circuitazione di Ampere scritto per il campo magnetico  $\mathbf{H}$ :

$$\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = I_{\text{conc}}$$

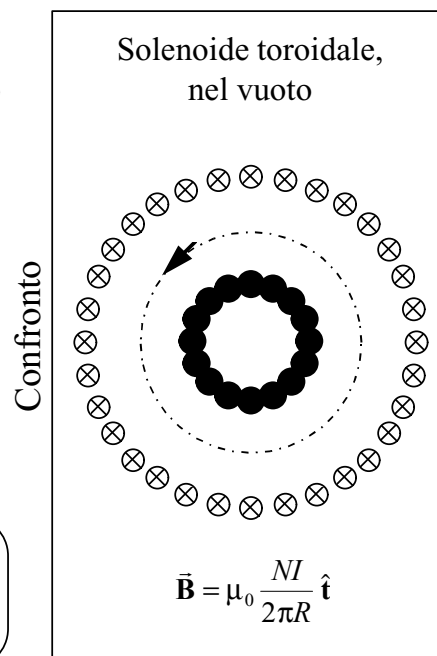
$$H2\pi R = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi R}$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{2\pi R}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{2\pi R} \hat{\mathbf{t}}$$

$\hat{\mathbf{t}}$  orientato come in figura.



--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

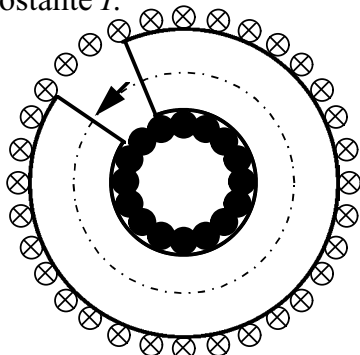
## Solenoido toroidale con traferro

F.Bloisi  
Fisica II

MS 4.9

Rev. 1.1

Determinare il campo di induzione magnetica sulla circonferenza mediana di un solenoide toroidale (raggi  $R$  ed  $r$ ,  $N$  spire, traferro di spessore  $\delta \ll R$ ) percorso da una corrente costante  $I$ .



Il campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  è lo stesso nel traferro e nel materiale magnetico; la medesima affermazione non è vera per il campo magnetico  $\mathbf{H}$ .

Se il traferro è molto sottile possiamo assumere che le linee di campo di  $\mathbf{B}$  (e di  $\mathbf{H}$ ) siano ancora delle circonferenze.

Applichiamo il teorema della circuitazione di Ampere scritto per il campo magnetico  $\mathbf{H}$ :

$$\oint_{\gamma} \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = I_{\text{conc}}$$

$$H\delta + H_1(2\pi R - \delta) = NI$$

$$\frac{B}{\mu_0}\delta + \frac{B}{\mu_0\mu_r}(2\pi R - \delta) = NI$$

$$\frac{B}{\mu_0} \left( \delta + \frac{2\pi R - \delta}{\mu_r} \right) = NI$$

$$B = \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi R + \delta(\mu_r - 1)}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi R + \delta(\mu_r - 1)} \hat{\mathbf{t}}$$

$\mathbf{t}$  orientato come in figura.

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Esempi ed applicazioni

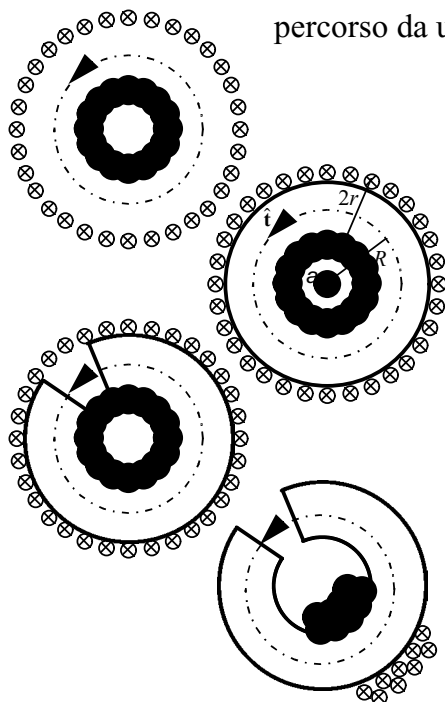
## Solenoido toroidale (confronto)

F.Bloisi  
Fisica II

MS 4.10

Rev. 1.1

Determinare, nelle situazioni illustrate, il campo di induzione magnetica sulla circonferenza mediana di un solenoide toroidale (raggi  $R$  ed  $r$ ,  $N$  spire, traferro di spessore  $\delta \ll R$ ) percorso da una corrente costante  $I$ .



a) Solenoide toroidale,  
nel vuoto

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} \hat{\mathbf{t}}$$

b) Solenoide toroidale,  
riempito di materiale magnetico

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\mu_r \frac{NI}{2\pi R} \hat{\mathbf{t}}$$

c) Solenoide toroidale,  
riempito di materiale magnetico,  
con traferro

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi R + \delta(\mu_r - 1)} \hat{\mathbf{t}}$$

d) Solenoide avvolto su  
materale magnetico toroidale,  
con traferro

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi R + \delta(\mu_r - 1)} \hat{\mathbf{t}}$$

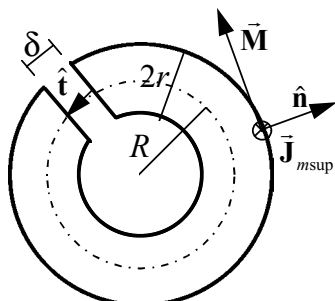
( $\mathbf{t}$  orientato come in figura)

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Materiali magnetici

## Magnete permanente

toroidale (raggi  $R$  ed  $r \ll R$ , traferro di spessore  $\delta \ll R$ ) avente magnetizzazione uniforme in modulo  $\vec{M} = M \hat{t}$ .



La magnetizzazione  $\mathbf{M}$  produce lo stesso effetto di una densità di corrente (di superficie)  $\vec{J}_{msup} = \vec{M} \times \hat{n}$  e poiché i vettori  $\vec{M}$  ed  $\hat{n}$  sono ortogonali tra loro  $J_{msup} = M$ .

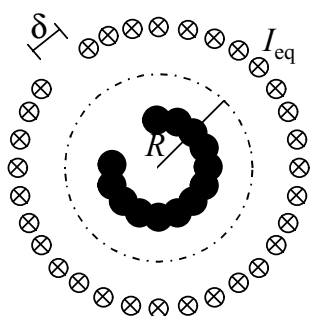
Il magnete permanente è quindi equivalente ad un solenoide toroidale di  $N$  spire percorse da corrente  $I_{eq}$  tale che (si è trascurato  $\delta$  rispetto alla lunghezza  $2\pi R$  della circonferenza)

$$J_{msup} 2\pi R = N I_{eq}$$

quindi: 
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N I_{eq}}{2\pi R} \hat{t} = \mu_0 \frac{J_{msup} 2\pi R}{2\pi R} \hat{t} = \mu_0 M \hat{t}$$

$$\vec{B} = \mu_0 M \hat{t}$$

$\hat{t}$  orientato come in figura.

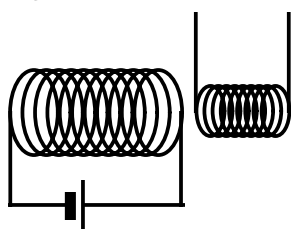


--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

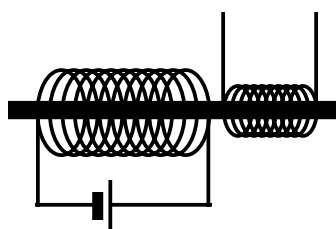
# Esempi ed applicazioni

## Mutua induzione

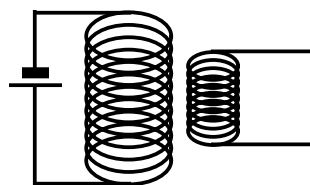
Dati due solenoidi, valutare come varia il coefficiente di mutua induzione nelle diverse configurazioni illustrate.



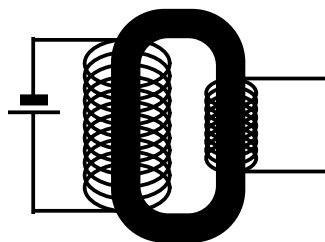
a) coassiali,  
non sovrapposti



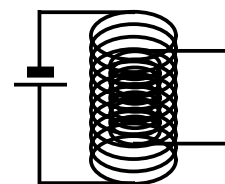
b) coassiali,  
su materiale magnetico



c) affiancati,  
con assi paralleli



d) affiancati,  
su materiale magnetico



e) coassiali, sovrapposti

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Magnetostatica

## Riepilogo (1/6)

$$I = dq/dt$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = n_c q_e \vec{v}_d$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds$$

Corrente elettrica  
Densità di corrente

Conservazione della carica  
Equazione di continuità

in condizioni stazionarie

$$\sum_{\text{in un nodo}} I_i = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{J} = 0$$

(in condizioni non stazionarie)

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$R = \rho l/S$$

$$\Delta V = I R$$

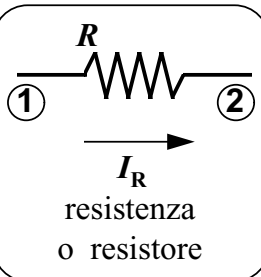
$$\vec{J} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

Legge di Ohm  
Resistenza/resistività elettrica

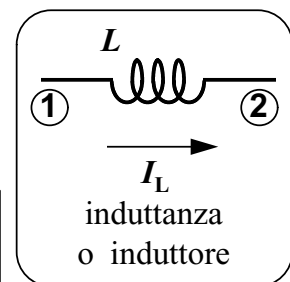
--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Magnetostatica

## Riepilogo (2/6)

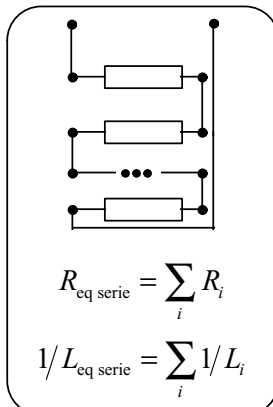


Resistenza elettrica (ohmica)  
rappresentazione grafica

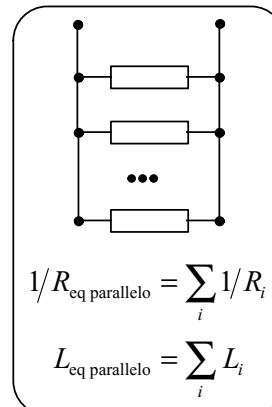


Induttanza (autoinduzione) elettrica  
rappresentazione grafica

Serie



Parallelo



Potenza dissipata  
(effetto Joule)

$$W_J = -I^2 R = -\Delta V^2 R$$

Energia  
immagazzinata

$$E_L = \frac{1}{2} L I^2$$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Magnetostatica

## Riepilogo (3/6)

F.Bloisi  
Fisica II

MS R.3

Rev. 1.1

Elettrostatica	Magnetostatica
$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3}$ $\vec{F}_E = q \vec{E}$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3}$ $\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} \quad d\vec{F}_B = I d\vec{l} \times \vec{B}$
$\oiint_{\text{sup. chiusa } \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int } \Sigma}}{\epsilon_0} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\oint_{\text{linea chiusa } \gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = 0$	$\oiint_{\text{sup. chiusa } \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0$ $\oint_{\text{linea chiusa } \gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{conc}} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
$\vec{E} = -\text{grad} V \quad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' }$ $L_{AB} = -q[V(B) - V(A)]$ $w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$	$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad dA_{x,y,z} = \frac{\mu_0}{4\pi} J_{x,y,z} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3}$ $L^{(est)} = -I \Delta \Phi_\gamma$ $w_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Magnetostatica

## Riepilogo (4/6)

F.Bloisi  
Fisica II

MS R.4

Rev. 1.1

Elettrostatica	Magnetostatica
$\vec{p} = q \vec{\delta} \quad E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ $\vec{M}_p = -\vec{E} \times \vec{p} \quad \vec{F}_p = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E})$	$\vec{m} = I S \hat{n} \quad E_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ $\vec{M}_m = -\vec{B} \times \vec{m} \quad \vec{F}_m = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})$
$\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{N \Delta\tau} \quad \rho_p = -\text{div } \vec{P} \quad \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{D} = \epsilon_0 (\chi_e + 1) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ $E_{1t} = E_{2t} \quad \epsilon_{r1} E_{1n} = \epsilon_{r2} E_{2n}$ $D_{1n} = D_{2n} \quad D_{1t} / \epsilon_{r1} = D_{2t} / \epsilon_{r2}$	$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{N \Delta\tau} \quad \vec{J}_m = \text{rot } \vec{M} \quad \vec{J}_{msup} = \vec{M} \times \hat{n}$ $\vec{M} = \vec{M}(\vec{B}) \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \vec{B} = \mu_0 (\chi_m + 1) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ $B_{1t} = B_{2t} \quad B_{1t} / \mu_{r1} = B_{2t} / \mu_{r1}$ $H_{1t} = H_{2t} \quad \mu_{r1} H_{1n} = \mu_{r2} H_{2n}$
$w_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$	$w_B = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Magnetostatica

## Riepilogo (5/6)

F.Bloisi  
Fisica II

MS R.5

Rev. 1.1

Elettrostatica	Magnetostatica
mat. dielettrici: $\chi_e > 0 \Rightarrow \epsilon_r > 1$	mat. paramagnetici: $\chi_m \approx 0 \Rightarrow \mu_r \approx 1$ mat. diamagnetici: $\chi_m \approx 0 \Rightarrow \mu_r \approx 1$ mat. ferromagnetici: $\chi_m \gg 0 \Rightarrow \mu_r \gg 1$
$\oiint_{\text{sup. chiusa } \Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{lib int } \Sigma}}{\epsilon_0} \quad \text{div } \vec{D} = \rho_{\text{lib}}$ $\oint_{\text{linea chiusa } \gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = 0$	$\oiint_{\text{sup. chiusa } \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0$ $\oint_{\text{linea chiusa } \gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{conc}} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{cond}}$
$C = \frac{Q}{V} \quad E_C = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV$	$L = \frac{\Phi}{I} \quad E_L = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2} \Phi I$
$C_{\text{parallelo}} = C_1 + C_2 \quad \frac{1}{C_{\text{serie}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	$L_{\text{serie}} = L_1 + L_2 \quad \frac{1}{L_{\text{parallelo}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---

# Magnetostatica

## Riepilogo (6/6)

F.Bloisi  
Fisica II

MS R.6

Rev. 1.1

Elettrostatica	Magnetostatica
<b><u>Equazioni di Maxwell in condizioni stazionarie, nel vuoto</u></b>	
$\oiint_{\text{sup. chiusa } \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\text{vol. interno a } \Sigma} \rho d\tau \quad \oint_{\text{linea chiusa } \gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oiint_{\text{sup. chiusa } \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \oint_{\text{linea chiusa } \gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\text{su. di bordo } \gamma} \vec{J} \cdot \hat{n} d s$
$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{rot } \vec{E} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
<b><u>Equazioni di Maxwell in condizioni stazionarie, nella materia</u></b>	
$\oiint_{\text{sup. chiusa } \Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\text{vol. interno a } \Sigma} \rho_{\text{lib}} d\tau \quad \oint_{\text{linea chiusa } \gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oiint_{\text{sup. chiusa } \Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \oint_{\text{linea chiusa } \gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{\text{su. di bordo } \gamma} \vec{J}_{\text{cond}} \cdot \hat{n} d s$
$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{lib}} \quad \text{rot } \vec{E} = 0$ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E})$	$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{cond}}$ $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}(\vec{B})$

--- queste note sono reperibili sul sito <http://people.na.infn.it/~bloisi> ---