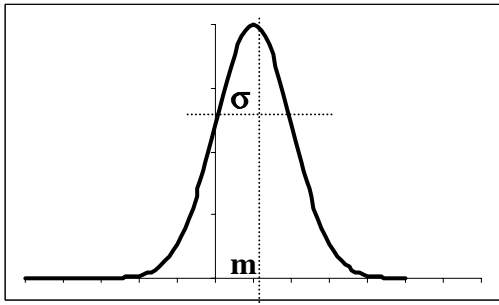


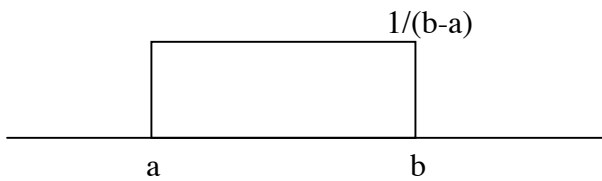
Densità di probabilità note

Gaussiana:



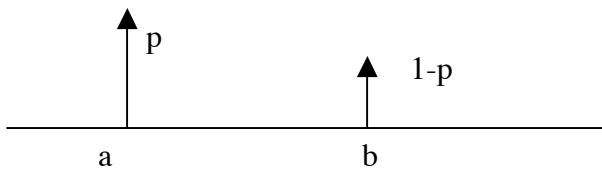
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \rightarrow \begin{cases} M = m \\ \text{Var} = \sigma^2 \\ \text{VQM} = m^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

Uniforme:



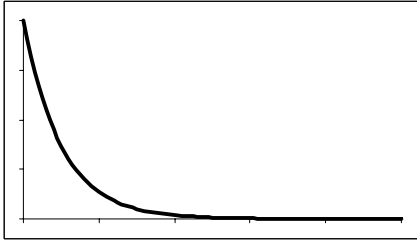
$$\rightarrow \begin{cases} M = \frac{a+b}{2} \\ \text{Var} = \frac{(b-a)^2}{12} \\ \text{VQM} = \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$

Binomiale



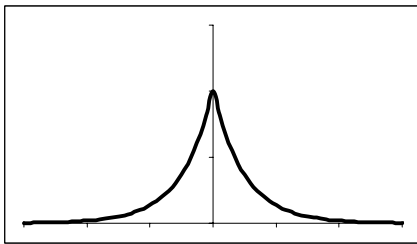
$$\rightarrow \begin{cases} M = p \cdot a + (1-p) \cdot b \\ \text{Var} = p \cdot a^2 + (1-p) \cdot b^2 - [p \cdot a + (1-p) \cdot b]^2 \\ \text{VQM} = p \cdot a^2 + (1-p) \cdot b^2 \end{cases}$$

Esponenziale monolatero



$$a \cdot e^{-at} U_{-1}(t) \rightarrow \begin{cases} M = \frac{1}{a} \\ \text{Var} = \frac{1}{a^2} \\ \text{VQM} = \frac{2}{a^2} \end{cases}$$

Esponenziale bilatero



$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot e^{-a|t|} \rightarrow \begin{cases} M = 0 \\ \text{Var} = \frac{2}{a^2} \\ \text{VQM} = \frac{2}{a^2} \end{cases}$$

Sviluppo di integrali particolari da usare negli esercizi

$$\int_{b_1}^{b_2} a e^{-at} dt = \left[-e^{-at} \right]_{b_1}^{b_2}$$

Integrazione per parti

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

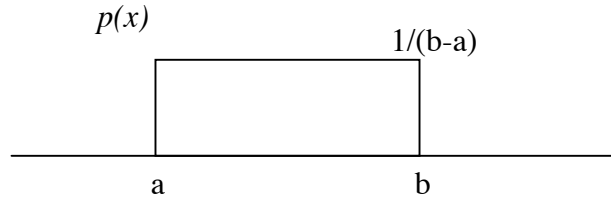
$$\int_{b_1}^{b_2} t \cdot a \cdot e^{-at} dt = \left[-t \cdot e^{-at} - \frac{1}{a} \cdot e^{-at} \right]_{b_1}^{b_2}$$

$$\int_{b_1}^{b_2} t^2 \cdot a \cdot e^{-at} dt = \left[-t^2 \cdot e^{-at} - \frac{2}{a} \cdot t \cdot e^{-at} - \frac{2}{a^2} \cdot e^{-at} \right]_{b_1}^{b_2}$$

$$\int x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -x \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \sigma^2 \int \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Calcolo dei momenti delle d.d.p note

Densità di Probabilità Uniforme:



Valor medio:

$$M = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) = \frac{b+a}{2}$$

Valor quadratico medio:

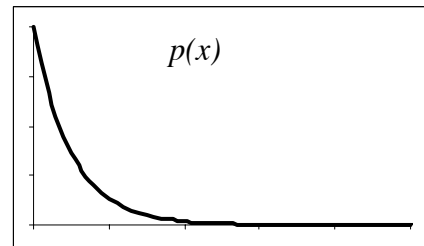
$$\begin{aligned} VQM = E[x^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) = \\ &= \frac{(b-a) \cdot (b^2 + a^2 + ab)}{3 \cdot (b-a)} = \frac{(b^2 + a^2 + ab)}{3} \end{aligned}$$

Varianza:

$$Var = E[(x - E[x])^2] = VQM - M^2 = \frac{(b^2 + a^2 + ab)}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Densità di Probabilità Esponenziale monolatero:

$$p(x) = a \cdot e^{-a \cdot x} U_{-1}(x)$$



Valor medio:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_0^{+\infty} a \cdot x \cdot e^{-a \cdot x} dx = \text{applicazione della formula di integrazione per parti}$$

$$= \left[-x \cdot e^{-a \cdot x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-a \cdot x} dx = 0 + \left[-\frac{e^{-a \cdot x}}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

Valor quadratico medio:

$$VQM = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx = \int_0^{+\infty} a \cdot x^2 \cdot e^{-a \cdot x} dx = \text{applicazione della formula di integrazione per parti}$$

$$= \left[-x^2 \cdot e^{-a \cdot x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2 \cdot x \cdot e^{-a \cdot x} dx = 0 + 2 \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-a \cdot x} dx = \text{integrazione per parti}$$

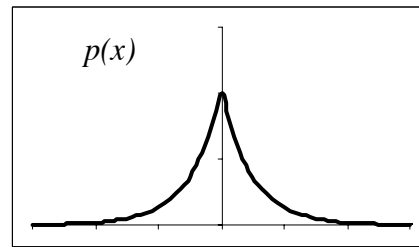
$$= \left[-2 \cdot x \cdot \frac{e^{-a \cdot x}}{a} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a \cdot x} dx = 0 + \frac{2}{a} \left[-\frac{e^{-a \cdot x}}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{a^2}$$

Varianza:

$$Var = E[(x - E[x])^2] = VQM - M^2 = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

Densità di Probabilità Esponenziale bilatero:

$$p(x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot e^{-a|x|}$$



Valor medio:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot e^{a \cdot x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot e^{-a \cdot x} dx = && \text{formula di integrazione per parti} \\ &= \left[\frac{x \cdot e^{a \cdot x}}{2} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \cdot e^{a \cdot x} dx - \left[\frac{x \cdot e^{-a \cdot x}}{2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{-a \cdot x} dx = \\ &= \left[-\frac{e^{a \cdot x}}{2 \cdot a} \right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{e^{-a \cdot x}}{2 \cdot a} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2 \cdot a} + \frac{1}{2 \cdot a} = 0 \end{aligned}$$

Valor quadratico medio:

$$\begin{aligned} VQM &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \cdot a \cdot x^2 \cdot e^{a \cdot x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot a \cdot x^2 \cdot e^{-a \cdot x} dx = && \text{formula di integrazione per parti} \\ &= \dots \dots \dots = \left[\frac{e^{a \cdot x}}{a^2} \right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{e^{-a \cdot x}}{a^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \end{aligned}$$

Varianza:

$$Var = E[(x - E[x])^2] = VQM - M^2 = \frac{2}{a^2}$$

Esercizio 1: Somma di Variabili Aleatorie (V. A.) indipendenti

Siano date le due variabili aleatorie x e y indipendenti, descritte rispettivamente dalle densità di probabilità $P_x(x)$ e $P_y(y)$. Calcolare la densità di probabilità (d.d.p.) della variabile aleatoria z ottenuta dalla seguente trasformazione: $z = x + y$

Soluzione:

Le funzioni caratteristiche che descrivono le tre variabili aleatorie sono, rispettivamente:

$$P_x(f) = E_x[e^{-j2\pi f \cdot x}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \cdot x} \cdot P_x(x) dx$$

$$P_y(f) = E_y[e^{-j2\pi f \cdot y}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \cdot y} \cdot P_y(y) dy$$

$$P_z(f) = E_z[e^{-j2\pi f \cdot z}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \cdot z} \cdot P_z(z) dz$$

Poiché le due V. A. x e y sono indipendenti, la densità di probabilità congiunta si può fattorizzare nel prodotto delle singole densità di probabilità secondo la seguente:

$$P_{x,y}(x, y) = P_x(x) \cdot P_y(y)$$

Allora, la funzione caratteristica di z diventa:

$$\begin{aligned} P_z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \cdot (x+y)} \cdot P_{x,y}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \cdot x} \cdot P_x(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \cdot y} \cdot P_y(y) dy = E_x[e^{-j2\pi f \cdot x}] \cdot E_y[e^{-j2\pi f \cdot y}] = \\ &= P_x(f) \cdot P_y(f) \end{aligned}$$

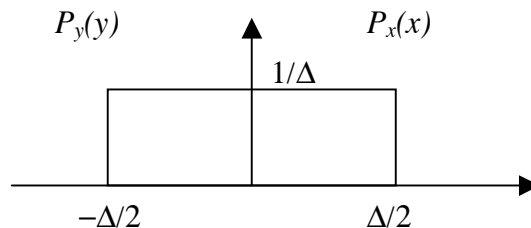
Ovvero il prodotto delle singole funzioni caratteristiche di x e y . Concludendo, possiamo ora calcolare la d.d.p. di z che risulterà pari a :

$$P_z(z) = P_x(x) * P_y(y)$$

N.B.: La d.d.p. cercata risulterà essere pari alla convoluzione delle singole d.d.p.

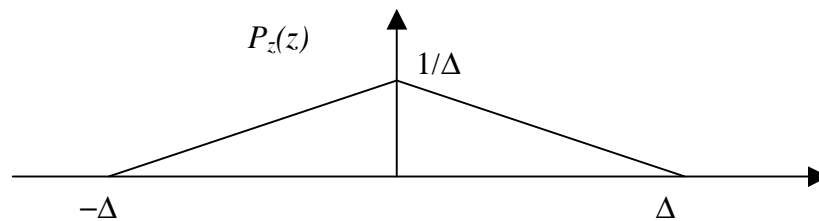
Esercizio 2: Somma di Variabili Aleatorie (V. A.) indipendenti

Siano date le due variabili aleatorie x e y indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.), descritte rispettivamente dalle densità di probabilità $P_x(x)$ e $P_y(y)$, rappresentate graficamente in figura. Calcolare la densità di probabilità (d.d.p.) della variabile aleatoria z ottenuta dalla seguente trasformazione: $z = x + y$



Soluzione:

Da quanto visto nell'esercizio precedente, la d.d.p. di z altro non è che la convoluzione delle singole d.d.p. di x e y : ovvero la convoluzione tra due *rect* aventi la stessa base. Il risultato di tale operazione, come è ben noto, risulta essere una *tri* di base doppia. L'altezza della *tri* sarà tale che l'area della d.d.p. sia *sempre* unitaria.



Calcoliamo ora la varianza della d.d.p di z , una volta nota quella di x e y :

$$E[x^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} \cdot x^2 dx = \frac{\Delta^2}{12} = E[y^2]$$

$$E[z^2] = E[(x + y)^2] = E[x^2] + E[y^2] + 2 \cdot E[x \cdot y] = 2 \cdot E[x^2] = \frac{\Delta^2}{6}$$

Infatti si ha:

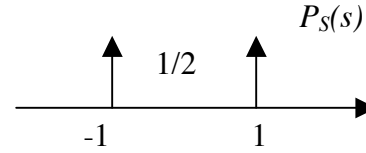
$$E[x \cdot y] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x \cdot y \cdot \frac{1}{\Delta^2} dx dy = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x \cdot \frac{1}{\Delta} dx \cdot \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} y \cdot \frac{1}{\Delta} dy = 0$$

N.B.: Si possono riutilizzare tutti i risultati notevoli sulla convoluzione tra segnali.

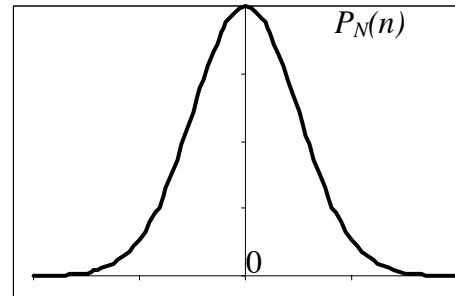
Esercizio 3: Ricezione binaria per Telecomunicazioni

Sia data la seguente trasformazione $r = s + n$, dove la V.A. r rappresenta il segnale ricevuto in un sistema di TLC ottenuto come somma della componente del segnale utile s e del rumore n rappresentati rispettivamente dalle seguenti d.d.p.:

$$P_S(s) = \frac{1}{2} [\delta(s-1) + \delta(s+1)]$$



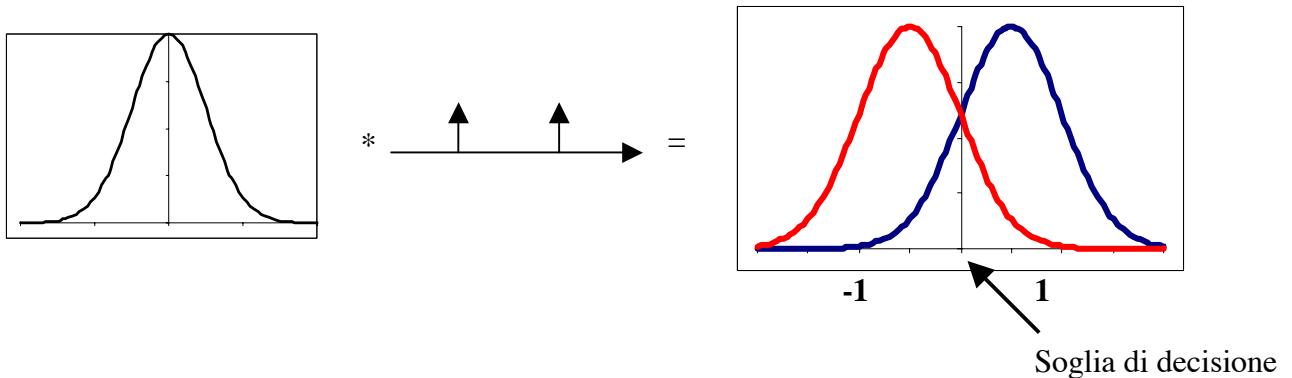
$$P_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}, \text{ gaussiana a valor medio nullo}$$



Calcolare la d.d.p. $P_R(r)$.

Soluzione:

Da quanto visto negli esercizi precedenti, la $P_R(r)$ è ottenibile come convoluzione tra la d.d.p. del segnale utile e quella del rumore, ovvero:



La probabilità d'errore $P(e)$ è definita pari a:

$$P(e) = P(e|s = 1) \cdot P(s = 1) + P(e|s = -1) \cdot P(s = -1)$$

Se $P(s = 1) = P(s = -1) = 1/2$, detta:

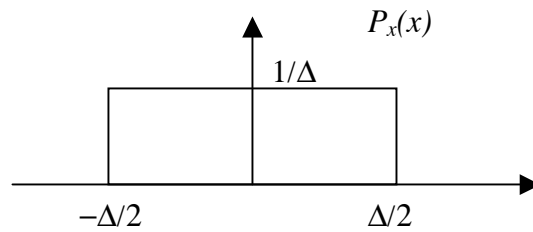
$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ funzione d'errore (error function), funzione tabulata}$$

Allora, scelto, ad esempio, $P(e) = P(e|s = -1)$ si ottiene $P(e) = Q(1/\sigma)$, con un semplice cambio di variabile nell'integrale.

N.B.: $1^2/\sigma^2$ è un rapporto segnale rumore (SNR: Signal-to-Noise ratio).

Esercizio 4: Cambio di scala

Sia data la seguente trasformazione $y = \alpha \cdot x$, essendo la V.A. x descritta dalla d.d.p $P_x(x)$ come indicato in figura. Calcolare la $P_y(y)$.

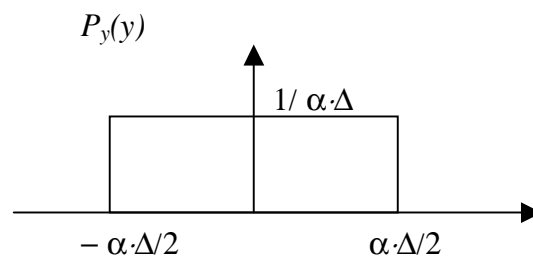


Soluzione:

La d.d.p. cercata è ottenibile tramite la seguente trasformazione:

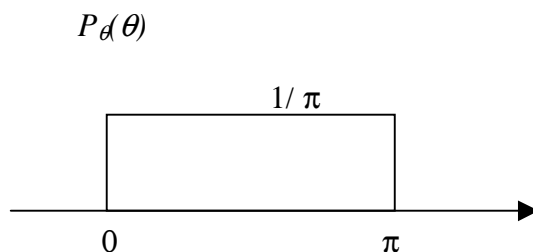
$$P_y(y) = \frac{1}{\alpha} \cdot P_x\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

In forma grafica si ha:



Esercizio 5a: Cambio di variabile

Sia θ una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, \pi]$, la cui d.d.p. è rappresentata in figura. Sia x una variabile aleatoria ottenuta da θ tramite la seguente trasformazione: $x = \cos \theta$. Calcolare la $P_x(x)$.



Soluzione 1:

La d.d.p. cercata può essere ottenuta secondo la seguente:

$$P_x(x) = P_\theta(\theta) \cdot \frac{1}{\left| \frac{dx}{d\theta} \right|} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{|\sin \theta|} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Soluzione 2:

Essendo $x = \cos \theta$ invertibile in $[0, \pi]$, ottenendo $\theta = \arccos(x)$, la d.d.p. cercata si può ricavare da:

$$P_x(x) = P_\theta(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

in quanto:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esercizio 5a bis: Cambio di variabile

Sia θ una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 2\pi]$, la cui d.d.p. è rappresentata in figura. Sia x una variabile aleatoria ottenuta da θ tramite la seguente trasformazione: $x = \cos \theta$. Calcolare la $P_x(x)$.

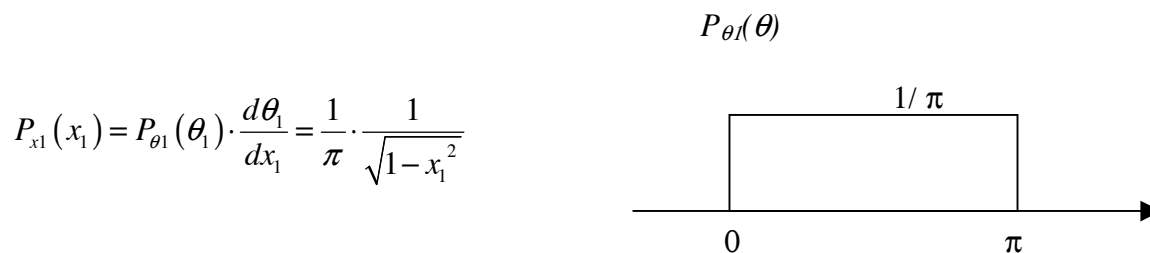


Soluzione:

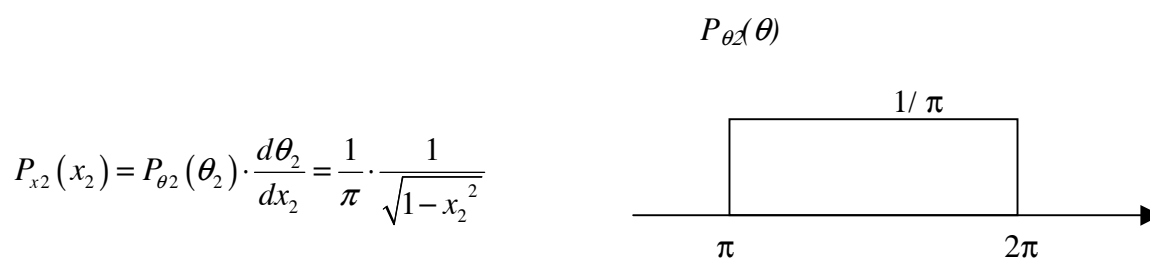
Essendo θ definita in $[0, 2\pi]$, la funzione $\theta = \arccos(x)$ non è invertibile.

Tuttavia, è possibile spezzare in due l'intervallo ottenendo $[0, \pi] \cup [\pi, 2\pi]$, rendendo così le funzioni $\theta_1 = \arccos(x_1)$ e $\theta_2 = \arccos(x_2)$, invertibili nei due domini separati $[0, \pi]$ e $[\pi, 2\pi]$.

Dato che risulta (vedi esercizio precedente):



$$P_{x_1}(x_1) = P_{\theta_1}(\theta_1) \cdot \frac{d\theta_1}{dx_1} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}$$



$$P_{x_2}(x_2) = P_{\theta_2}(\theta_2) \cdot \frac{d\theta_2}{dx_2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}}$$

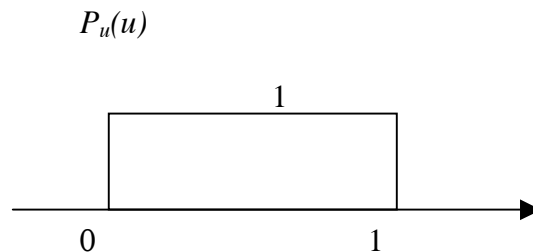
la d.d.p. cercata si può ottenere mediante il teorema della probabilità totale (insiemi di eventi $\{\theta\}$ mutuamente esclusivi) dalla somma delle due d.d.p. condizionate al fatto che θ sia in uno dei due insiemi angolari prima definiti, moltiplicate ciascuna per la propria probabilità che cioè si verifichi:

$$\begin{aligned} P_x(x) &= P_{x_1}(x | 0 \leq \theta \leq \pi) \cdot P(0 \leq \theta \leq \pi) + P_{x_2}(x | \pi < \theta \leq 2\pi) \cdot P(\pi < \theta \leq 2\pi) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

N.B.: la d.d.p. risulta identica al caso precedente.

Esercizio 5b: Cambio di variabile

Sia u una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 1]$, la cui d.d.p. è rappresentata in figura. Sia x una variabile aleatoria ottenuta da u tramite la seguente trasformazione: $x = -\log(u)$. Calcolare la $P_x(x)$.



Soluzione:

Essendo $u = e^{-x}$, la d.d.p. cercata si può ottenere da:

$$P_x(x) = P_u(u) \cdot \left| \frac{du}{dx} \right| = e^{-x}, \quad \text{con } x \in [0, +\infty]$$

Ovvero la d.d.p. di x è quella di un esponenziale monolatero.

Esercizio 6: Combinazione lineare di V.A.

Siano u_1 ed u_2 due variabili aleatorie indipendenti ed uniformemente distribuite nell'intervallo $[0,1]$.

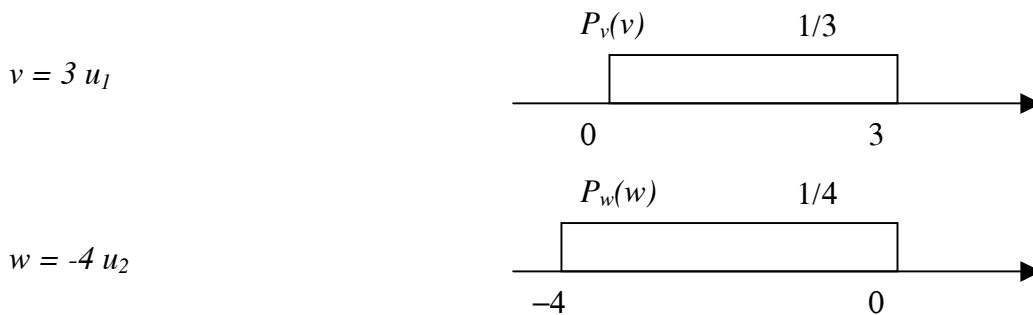
Sia x la variabile aleatoria ottenuta come combinazione lineare secondo la seguente:

$$x = 3 u_1 - 4 u_2 + 2.$$

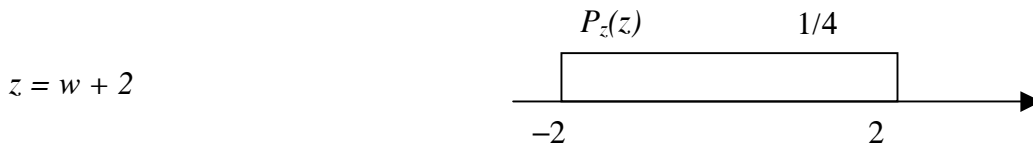
Calcolare la $P_x(x)$.

Soluzione:

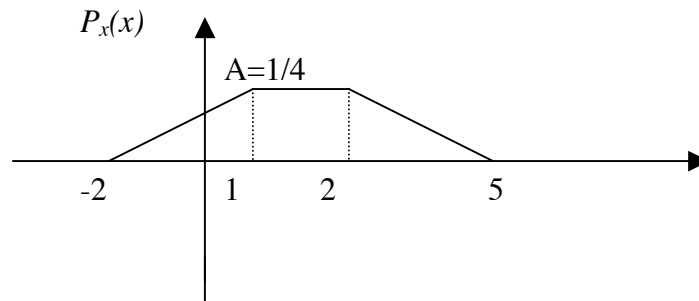
Introduciamo due nuove variabili aleatorie v e w ottenute, rispettivamente dalle seguenti trasformazioni e le cui d.d.p. sono rappresentate in figura:



Sia z la variabile aleatoria ottenuta da $z = w + 2$ e la cui d.d.p. è :



Ora, la d.d.p. di x è semplicemente la convoluzione di $P_z(z)$ con $P_v(v)$:



Si ottiene un trapezio, la cui altezza A è tale che l'area della d.d.p. sia unitaria, ovvero:

$$A = 1/4$$