I Prova in itinere — Traccia A

14 aprile 2016

Nome ____________________ Cognome __________________________ Matricola _______________________

Esercizio A.1 *Si risolva con il metodo di Gauss-Jordan il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t:*

$$\begin{cases} x - 2z + 3t = -2 \\ -y + 4z + t = 1 \\ 2x - z + t = 0 \\ x + 2y - 3t = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \{(\frac{17}{38}, \frac{-27}{38}, \frac{9}{38}, \frac{-25}{38})\}$

Esercizio A.2

i) Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V; si dimostri che l'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio di V.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono o meno sottospazi individuando, in caso affermativo, un sistema di generatori.

– $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - 2y = 0\}$

– $V_2 = \{(0, 0, 0), (-2, 0, 1), (5, 0, 0)\}$

– $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + z - 1 = 0\}$

– $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - z = 0, y + 2z = 0\}$

iii) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\} \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3y - z = 0\}$$

– Si determini il sottospazio $U \cap W$ e si stabilisca quali tra i seguenti vettori sono elementi di tale sottospazio:

$$(1, \frac{1}{3}, -1), (0, 0, -3), (6, 2, -6), (1, 2, 3)$$

– Si determini il sottospazio congiungente $U + W$.

ii) L'unico sottospazio è V_4 ed un sistema di generatori è $S = [(-1, -2, 1)]$; iii) $U \cap W = \{(-z, \frac{z}{3}, z) | z \in \mathbb{R}\}$ e nessuno dei vettori considerati è elemento di $U \cap W$. $U + W = \{(a + x, b + y, -a + 3y) | a, b, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$

I Prova in itinere — Traccia B

14 aprile 2016

Nome ____________________ Cognome __________________________ Matricola ________________________

Esercizio B.1 *Si risolva con il metodo di Gauss-Jordan il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t:*

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3t = 1 \\ y + 5z - t = -2 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x - 3y + 3z + 3t = 3 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \{(\frac{21+18t}{4}, \frac{7+14t}{4}, \frac{-(2t+3)}{4}, t) | t \in \mathbb{R}\}$

Esercizio B.2

i) Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sottoinsieme W di uno spazio vettoriale V sia un sottospazio.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi individuando, in caso affermativo, un sistema di generatori.

– $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 - z = 0\}$

– $V_2 = \{(0, 0, 0), (\sqrt{2}, 0, 0)\}$

– $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3y - 5z + 2 = 0\}$

– $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - 5y + z = 0, x + 2y = 0\}$

iii) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2y + z = 0\} \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - y = 0\}$$

– Si determini il sottospazio $U \cap W$ e si stabilisca quali tra i seguenti vettori sono elementi di tale sottospazio:

$$(1, 3, -6), (0, -1, 2), (1, 1, 4), (-2, -6, 12)$$

– Si determini il sottospazio congiungente $U + W$.

ii) L'unico sottospazio è V_4 ed un sistema di generatori è $S = [(-2, 1, 11)]$; iii) $U \cap W = \{(\frac{y}{3}, y, -2y) | y \in \mathbb{R}\}$; i vettori $(1, 3, -6), (-2, -6, 12)$ sono elementi di $U \cap W$. $U + W = \{(a + x, y + 3x, -2y + z) | a, x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$

I Prova in itinere — Traccia C

14 aprile 2016

Nome ____________ Cognome ________________ Matricola ______________

Esercizio C.1 *Si risolva con il metodo di Gauss-Jordan il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t:*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y + z + t = -2 \\ 3x - y + 2z + t = 1 \\ 2x + 4z + t = -1 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \{(\frac{-(5h+1)}{6}, \frac{-(7h+11)}{6}, \frac{(h-1)}{6}, h))|h \in \mathbb{R}\}$

Esercizio C.2

i) Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V; posto $U + W = \{u + w|u \in U, w \in W\}$, si provi che tale insieme è un sottospazio di V ed è il più piccolo (rispetto all'inclusione) sottospazio di V che contiene $U \cup W$.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi individuando, in caso affermativo, un sistema di generatori.

– $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3|x - 2y + z - 5 = 0\}$

– $V_2 = \{(0, 0, 0), (7, 0, 1), (-1, 1, 1)\}$

– $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3|x - 8y + z = 0, 7x + 5y = 0\}$

– $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3|y^2 - 3z = 0\}$

iii) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3|y - z = 0\} \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3|x + y + z = 0\}$$

– Si determini il sottospazio $U \cap W$ e si stabilisca quali tra i seguenti vettori sono elementi di tale sottospazio:

$$(-2, 1, 1), (1, 1, 5), (4, -2, -2), (0, 0, 3)$$

– Si determini il sottospazio congiungente $U + W$.

ii) L'unico sottospazio è V_3 ed un sistema di generatori è $S = [(\frac{-5}{61}, \frac{7}{61}, 1)]$; iii) $U \cap W = \{(-2z, z, z)|y \in \mathbb{R}\}$; i vettori $(-2, 1, 1), (4, -2, -2)$ sono elementi di $U \cap W$. $U + W = \{(a + x, y - x - z, y + z)|a, x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$

I Prova in itinere — Traccia D

14 aprile 2016

Nome ____________________ Cognome __________________________ Matricola ________________________

Esercizio D.1 *Si risolva con il metodo di Gauss-Jordan il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z e t:*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 7 \\ -x + 4z + t = -3 \\ x - 3y + 5z + t = 4 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \{(4k + h + 3, \frac{9k+2h-1}{3}, k, h) | k, h \in \mathbb{R})\}$

Esercizio D.2

i) Sia S un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V; si dimostri che l'insieme delle combinazioni lineari di S è un sottospazio ed è il più piccolo (rispetto all'inclusione) sottospazio di V che contiene S.

ii) Si stabilisca, motivando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi individuando, in caso affermativo, un sistema di generatori.

– $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 1 = 0\}$

– $V_2 = \{(0, 0, 0), (-5, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

– $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y = 0, y + 2z = 0\}$

– $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 + x = 0\}$

iii) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - y = 0\} \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2z = 0\}$$

– Si determini il sottospazio $U \cap W$ e si stabilisca quali tra i seguenti vettori sono elementi di tale sottospazio:

$$(-4, -12, 2), (1, 0, 1), (-2, 1, 3), (-1, -3, \frac{1}{2})$$

– Si determini il sottospazio congiungente $U + W$.

ii) L'unico sottospazio è V_3 ed un sistema di generatori è $S = [(-3, -2, 1)]$; iii) $U \cap W = \{(x, 3x, \frac{-x}{2}) | x \in \mathbb{R}\}$; i vettori $(-4, -12, 2), (-1, -3, \frac{1}{2})$ sono elementi di $U \cap W$. $U + W = \{(x - 2t, -3x + y, z + t) | x, y, z, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$