

1) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy$$

nel punto $(0, -1, 0)$.

Ris.: $z + 2x = 0$.

2) Calcolare, dove esistono le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x \log(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, \log 2)$.

determinare la direzione di massima pendenza nel punto $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ris.: $f_x(x, y) = \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}$, $f_y(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ in $(x, y) \neq (0, 0)$.
 $f_y(0, 0) = 0$, f non è derivabile parzialmente rispetto ad x in $(0, 0)$.
L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, \log 2)$ è
 $z = (\log 2 + 1)x + y + \log 2 - 2$.

La direzione di massima pendenza nel punto $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ è $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

3) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$$

Ris.: Il punto $(0, 1)$ è un punto di sella.

4) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 + (x - y)^2$$

Ris.: Il punto $(0, 0)$ è un punto di sella.

5) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = (x - 1)^2(x^2 - y^2)$$

Ris.: Il punto $(0, 0)$ é un punto di sella, il punto $(1/2, 0)$ é un punto di massimo relativo, i punti $(1, \pm 1)$ sono punti di sella, i punti $(1, k)$, $k < -1$ o $k > 1$ sono punti di massimo relativo, i punti $(1, k)$, $-1 < k < 1$ sono punti di minimo relativo.

6) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = \sin(x + y)$$

Ris.: I punti delle rette $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo relativo anche assoluto, I punti delle rette $y = -x + \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo relativo anche assoluto.

7) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 - \sin y$$

Ris.: I punti $(0, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo relativo, i punti $(0, \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di sella.

8) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$

e determinare il minimo e il massimo di f nel triangolo

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Ris.: Il punto $(0, 0)$ è un punto di sella, il punto $(-4, -2)$ è un punto di massimo relativo.

$$\min_T f(x, y) = -\frac{2}{e} = f(0, 1), \quad \max_T f(x, y) = e = f(1, 0).$$

9) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$$

e determinare il minimo e il massimo di f nel quadrato

$$Q = \{(x, y) \in R^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

Ris.: Il punto $(1/2, 1/2)$ è un punto di minimo relativo.

$$\min_Q f(x, y) = -\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \max_Q f(x, y) = 4 = f(-1, -1).$$

10) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 32(x^2 + y^2)$$

e determinare il minimo e il massimo di f nel cerchio

$$C = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Suggerimento (tenere conto della simmetria della funzione)

Ris.: Il punto $(0, 0)$ è un punto di massimo relativo, i punti $(0, \pm 4)$, $(\pm 4, 0)$ sono punti di minimo relativo, i punti $(\pm 2, \pm 2)$ sono punti di sella.

$$\min_C f(x, y) = -207 = f(\pm 3, 0) = f(0, \pm 3), \quad \max_C f(x, y) = -126 = f(0, 0).$$

11) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 \log(1 + y) + x^2 y^2$$

e stabilire se esistono il minimo e il massimo di f .

Ris.: I punti $(0, k), k > 0$ sono punti di minimo relativo, i punti $(0, k)$,

$-1 < k < 0$ sono punti di massimo relativo, il punto $(0, 0)$ è un punto di sella.

La funzione non è limitata inferiormente e non è limitata superiormente.

12) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

e stabilire se esistono il minimo e il massimo di f .

Ris.: Il punto $(0, 0)$ è un punto di sella, i punti $(\pm 1, \pm 1)$ sono punti di massimo relativo, i punti $(\pm 1, \mp 1)$ sono punti di minimo relativo.

$$\min_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = -\frac{1}{e} = f(1, -1) = f(-1, 1),$$
$$\max_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = \frac{1}{e} = f(1, 1) = f(-1, -1).$$

13) Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = e^{(x+1)^2+k(y-1)^2}$$

e determinare il minimo e il massimo di f nel quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

Ris.: Se $k > 0$, il punto $(-1, 1)$ è un punto di minimo relativo,
se $k < 0$, il punto $(-1, 1)$ è un punto di sella
se $k = 0$ i punti $(-1, y)$, $y \in \mathbb{R}$ sono punti di minimo relativo.

$$\text{Se } k > 0, \quad \min_Q f(x, y) = e = f(0, 1), \quad \max_Q f(x, y) = e^{4+k} = f(1, 0)$$

$$\text{Se } k < 0, \quad \min_Q f(x, y) = e^{1+k} = f(0, 0), \quad \max_Q f(x, y) = e^4 = f(1, 1).$$

$$\text{Se } k = 0, \quad \min_Q f(x, y) = e = f(0, y), \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\max_Q f(x, y) = e^4 = f(1, y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

14) Determinare il massimo e il minimo nel cerchio C di centro l'origine e raggio 2 della funzione

$$f(x, y) = 10\sqrt{x^2 + y^2} - 6x - 5y^2$$

Ris.:

$$\min_C f(x, y) = -\frac{9}{5} = f\left(\frac{3}{5}, \pm\frac{\sqrt{91}}{5}\right), \quad \max_C f(x, y) = 32 = f(-2, 0).$$