

## *Il collasso per instabilità*

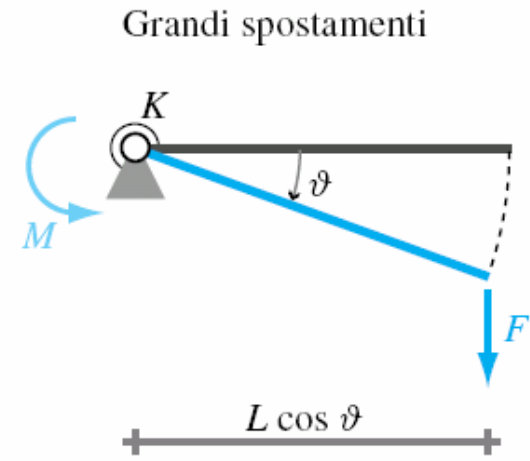
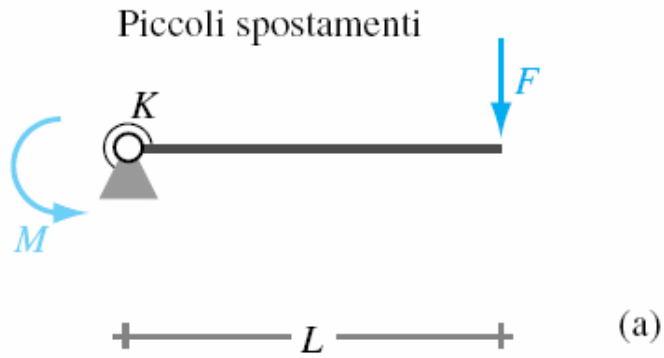
- Lo studio delle travi si è sviluppato facendo l'ipotesi di **piccoli spostamenti**:

(1) linearizzazione delle relazioni cinematiche (ad es. per  $\vartheta$  piccoli  $\cos \vartheta \simeq 1$  )

(2) equilibrio con riferimento alla configurazione indeformata

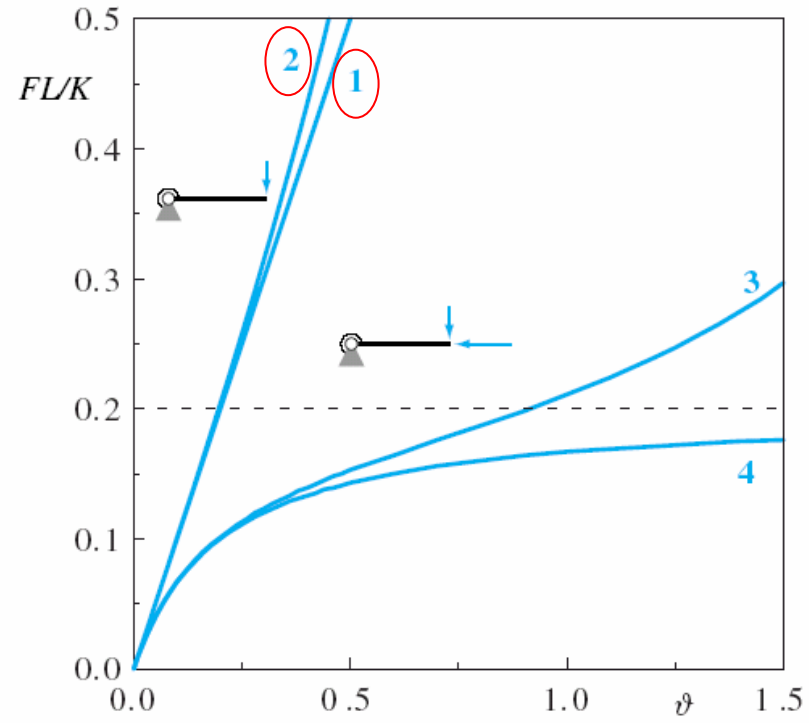
- Tale ipotesi, senz'altro accettabile per le travi soggette a carichi trasversali, non è più veritiera e deve essere rilasciata nel caso di carichi agenti lungo l'asse della trave, soprattutto se di compressione

# Il collasso per instabilità



$$M_e = M_i$$

$$M_i = K \vartheta$$



## Piccoli spostamenti (1)

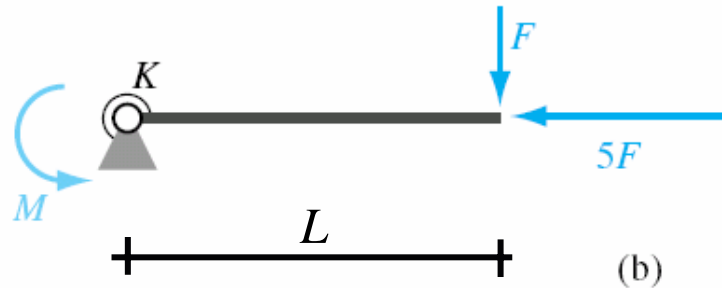
$$M_e = FL \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{FL}{K} = \vartheta}$$

## Eq. nella conf. deformata (2)

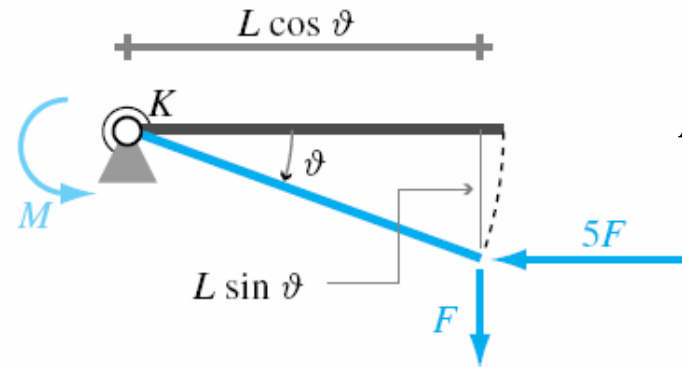
$$M_e = FL \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{FL}{K} = \frac{\vartheta}{\cos \vartheta}}$$

# Il collasso per instabilità

Piccoli spostamenti

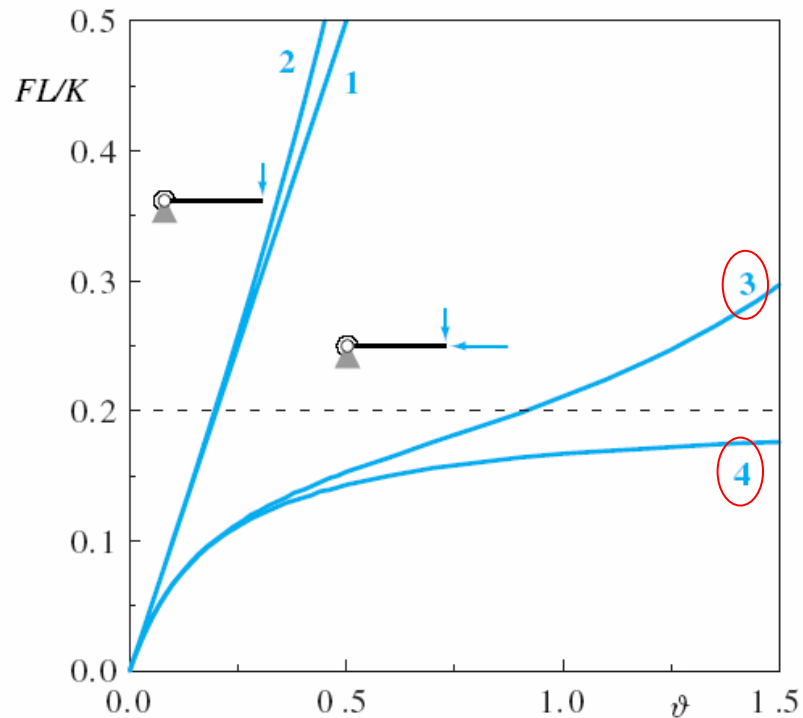


Grandi spostamenti



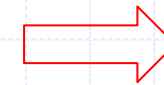
$$M_e = M_i$$

$$M_i = K\vartheta$$



Piccoli spostamenti (2)

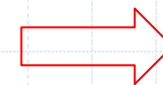
$$M_e = FL$$



$$\frac{FL}{K} = \vartheta$$

Eq. nella conf. deformata (3)

$$M_e = FL \cos \vartheta + 5FL \sin \vartheta$$



$$\frac{FL}{K} = \frac{\vartheta}{\cos \vartheta + 5 \sin \vartheta}$$

Cinematica linearizzata (4)

$$\frac{FL}{K} = \frac{\vartheta}{1 + 5\vartheta}$$

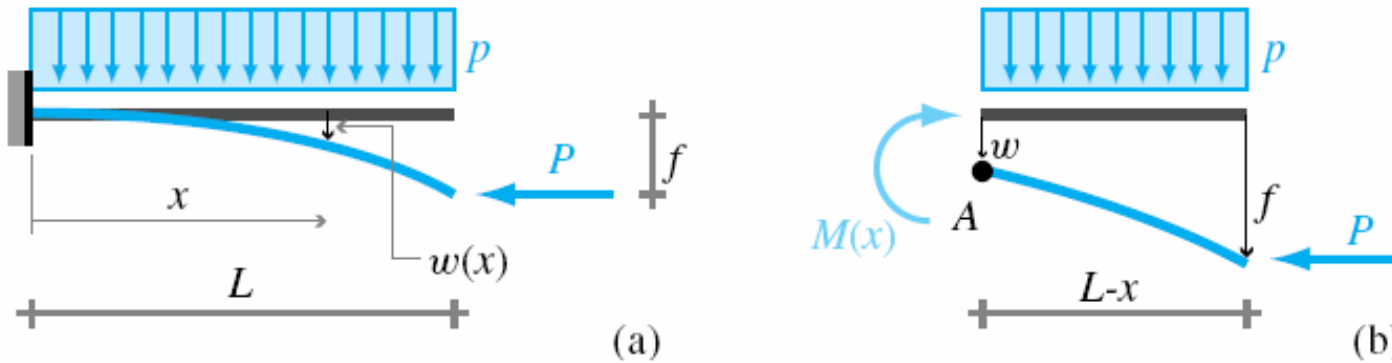
## *Comportamento di travi presso-inflesse*

- Ai fini dell'analisi del collasso per instabilità è quindi lecito linearizzare le relazioni cinematiche, ma occorre tenere conto dell'influenza che hanno gli spostamenti sull'equilibrio
- E' quindi lecito considerare gli spostamenti piccoli, ma solo dal punto di vista geometrico e non ai fini dell'equilibrio
- Per travi presso-inflesse il legame  $\chi = -w''$  è ancora valido e tenendo conto quindi delle deformazioni elastiche flessionali vale la seguente relazione

$$EIw'' = -M$$

- Il momento flettente  $M$  deve però essere calcolato tenendo conto della effettiva configurazione deformata della trave

## Comportamento di travi presso-inflesse



$$M(x) = -\frac{P}{2}(L-x)^2 - P[f - w(x)]$$

- **Equazione della linea elastica**

$$EIw''(x) + Pw(x) = Pf + \frac{P}{2}(L-x)^2$$

- **Condizioni al contorno**

$$w(0) = 0 \quad w'(0) = 0 \quad w(L) = f$$

## Comportamento di travi presso-inflesse

- Equazione della linea elastica

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = \alpha^2 f + \frac{p}{2EI} (L-x)^2$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

- Integrale generale

$$w(x) = \underbrace{A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + f}_{w_0(x)} + \underbrace{\frac{pL^2}{2EI} \frac{1}{(\alpha L)^2} (L-x)^2 - \frac{pL^4}{EI} \frac{1}{(\alpha L)^4}}_{w_p(x)}$$

$$w'(x) = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x - \frac{pL^2}{EI} \frac{1}{(\alpha L)^2} (L-x)$$

- Tenendo conto delle c.c.:

$$w(0) = A + f + \frac{pL^4}{2EI} \left[ \frac{1}{(\alpha L)^2} - \frac{2}{(\alpha L)^4} \right] = 0 \quad w'(0) = B\alpha - \frac{pL^3}{EI} \frac{1}{(\alpha L)^2} = 0$$

$$w(L) = A \cos \alpha L + B \sin \alpha L + f - \frac{pL^4}{EI} \frac{1}{(\alpha L)^4} = f$$

## Comportamento di travi presso-inflesse

- Risolvendo si ottiene:

$$A = \frac{pL^4}{EI} \frac{1}{(\alpha L)^4} \frac{1 - \alpha L \sin \alpha L}{\cos \alpha L} \qquad B = \frac{pL^4}{EI} \frac{1}{(\alpha L)^3}$$

$$f = \frac{pL^4}{2EI} \frac{1}{(\alpha L)^4} \frac{[2 - (\alpha L)^2] \cos \alpha L - 2(1 - \alpha L \sin \alpha L)}{\cos \alpha L}$$

- L'espressione della freccia di estremità è:

$$f = f_1 \psi(\alpha L)$$

$$f_1 = \frac{pL^4}{8EI} \qquad \psi(\alpha L) = \frac{4}{(\alpha L)^4} \frac{[2 - (\alpha L)^2] \cos \alpha L - 2(1 - \alpha L \sin \alpha L)}{\cos \alpha L}$$

$$\alpha L = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \quad \text{parametro adimensionale}$$

## Comportamento di travi presso-inflesse

- Condizioni ai limiti:

$$\lim_{\alpha L \rightarrow 0} \psi(\alpha L) = 1$$

$$\lim_{\alpha L \rightarrow \frac{\pi}{2}} \psi(\alpha L) = \infty$$

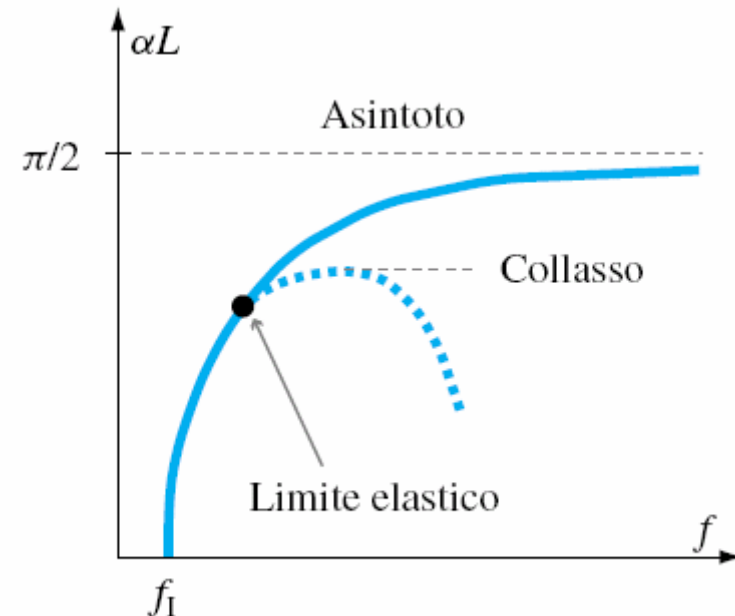
- La condizione critica si ha quando:

$$\alpha L = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{PL^2}{EI} = \frac{\pi^2}{4}$$

- Forza di compressione corrispondente alla situazione critica:

$$P_E = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2}$$

**Carico critico euleriano**

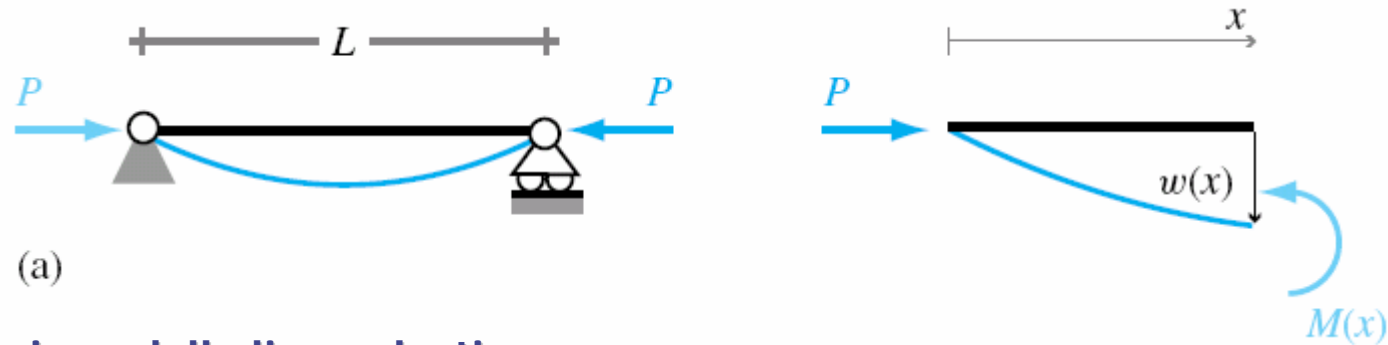


## *Aste compresse*

- **Il carico critico euleriano non dipende dai carichi trasversali agenti e può essere calcolato per travi solo soggette a compressione**
- **Una configurazione di equilibrio è quella rettilinea che può calcolarsi nella ipotesi di piccoli spostamenti (equilibrio nella configurazione indeformata)**
- **Rimuovendo tale ipotesi si constata che sono possibili altre configurazioni di equilibrio, corrispondenti ad una inflessione della trave, che si manifestano sotto particolari valori del carico**

## Calcolo del carico critico

### Trave appoggiata



- Equazione della linea elastica:

$$EIw''(x) + Pw(x) = 0$$

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

- Condizioni al contorno:

$$w(0) = 0$$

$$w(L) = 0$$

- Integrale generale:

$$w(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

## Calcolo del carico critico

- Imponendo le c.c. si ottiene:

$$w(0) = A = 0$$

$$w(L) = A \cos \alpha L + B \sin \alpha L = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha L & \sin \alpha L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Il precedente costituisce un sistema lineare omogeneo che per ammettere soluzione diversa dall'identica deve avere il determinante nullo, quando cioè il carico  $P$  assume valori tali che

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha L & \sin \alpha L \end{bmatrix} = \sin \alpha L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha L = n\pi \\ (n = 1, 2, 3, \dots) \end{matrix}$$

- Per tali valori sarà  $\cos \alpha L = \pm 1$  e il sistema diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A = 0 \\ B = \text{qualsunque} \end{matrix}$$

## Calcolo del carico critico

- Si ottengono le configurazioni di equilibrio deformate:

$$w(x) = B \sin \alpha x \qquad \alpha = \frac{n\pi}{L}, \qquad P = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 EI$$

- In particolare, per  $n = 1, 2, 3$  si ha:

$$n = 1 \qquad \alpha = \frac{\pi}{L}$$

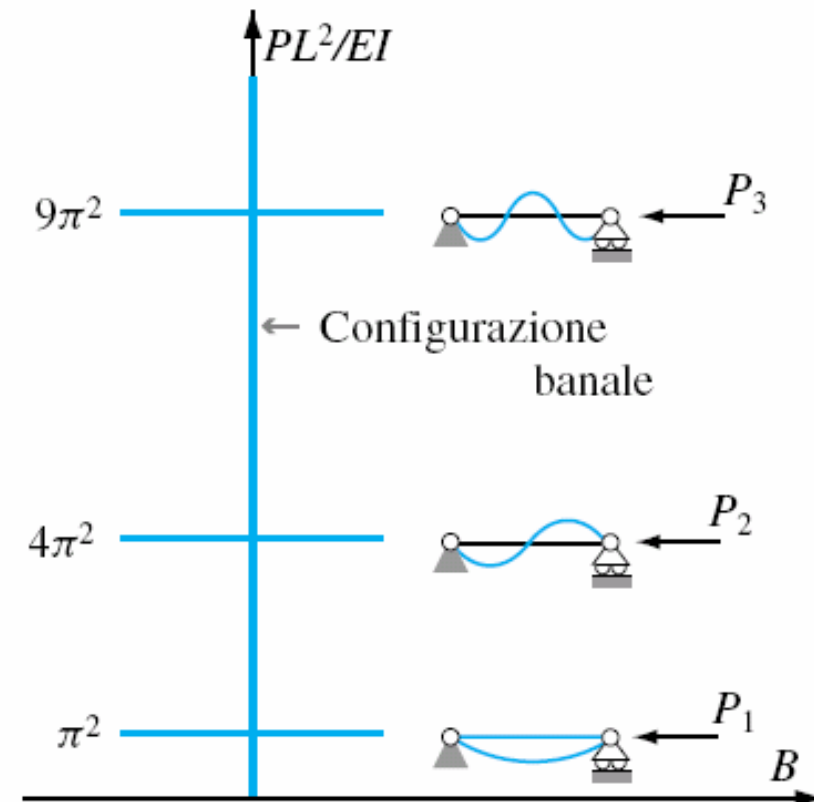
$$P_1 = \pi^2 \frac{EI}{L^2}, \qquad w(x) = B \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$n = 2 \qquad \alpha = 2 \frac{\pi}{L}$$

$$P_2 = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2}, \qquad w(x) = B \sin \frac{2\pi x}{L}$$

$$n = 3 \qquad \alpha = 3 \frac{\pi}{L}$$

$$P_3 = 9\pi^2 \frac{EI}{L^2}, \qquad w(x) = B \sin \frac{3\pi x}{L}$$



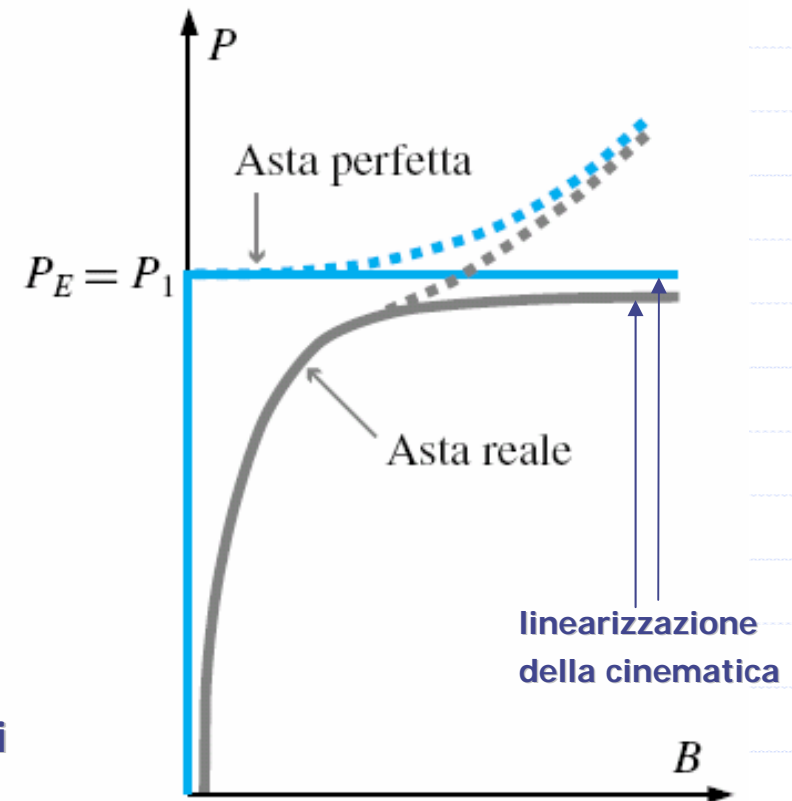
## Calcolo del carico critico

- In corrispondenza dei carichi  $P_n$  si hanno dei punti di biforcazione nei percorsi di equilibrio: accanto alla configurazione banale (rettilenea) compaiono configurazioni di equilibrio deformate, inflesse secondo sinusoidi con  $n$  semionde, la cui ampiezza  $B$  è arbitraria
- Il **carico critico euleriano** corrisponde al più piccolo dei  $P_n$  e la deformata corrispondente è la **deformata critica**

$$P_E = P_1 = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

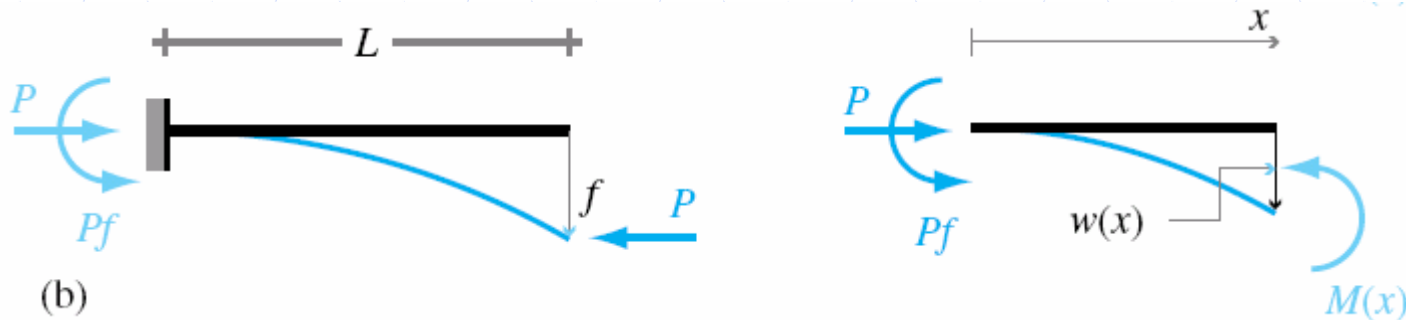
$$w_E(x) = w_1(x) = B \sin \frac{\pi x}{L}$$

- I percorsi di equilibrio di una trave reale (con imperfezioni) si discostano da quelli di una trave ideale (a tratteggio se si rimuove completamente l'ipotesi di piccoli spostamenti)



## Calcolo del carico critico

### Trave a mensola



- Equazione della linea elastica:

$$EIw''(x) + Pw(x) = 0$$

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

- Condizioni al contorno:

$$w(0) = 0$$

$$w'(0) = 0$$

$$w(L) = f$$

- Integrale generale:

$$w(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + f$$

$$w'(x) = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x$$

## Calcolo del carico critico

- Imponendo le c.c. si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \cos \alpha L & \sin \alpha L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Imponendo che il determinante sia nullo perché si abbia una soluzione diversa dalla banale, per  $\alpha \neq 0$  si ottiene:

$$\alpha \cos \alpha L = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha L &= n \frac{\pi}{2} \\ n &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

- In tal caso  $\sin \alpha L = \pm 1$  e il sistema omogeneo ammette la soluzione  $A = -f$  (qualunque) e  $B = 0$ . Si ha per  $n = 1, 3, 5, \dots$  dispari:

$$P_n = n^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2}$$

$$w_n(x) = f \left( 1 - \cos \frac{n\pi x}{L} \right)$$

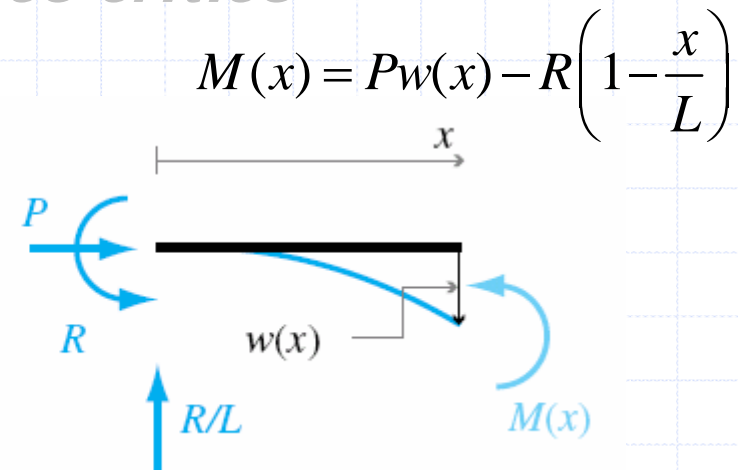
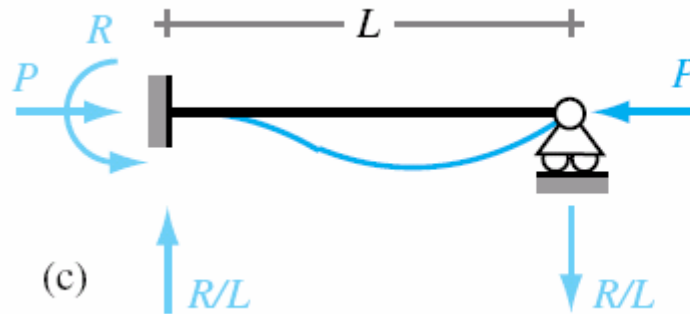
$$n = 1$$

$$P_E = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2}$$

$$w_E(x) = f \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right)$$

## Calcolo del carico critico

### Trave incastrata-appoggiata



- Equazione della linea elastica:

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = \frac{Y}{L^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

$$Y = \frac{RL^2}{EI}$$

- Integrale generale:

$$w(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{Y}{(\alpha L)^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$w'(x) = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x - \frac{1}{L} \frac{Y}{(\alpha L)^2}$$

- Condizioni al contorno:

$$w(0) = 0$$

$$w'(0) = 0$$

$$w(L) = 0$$

## Calcolo del carico critico

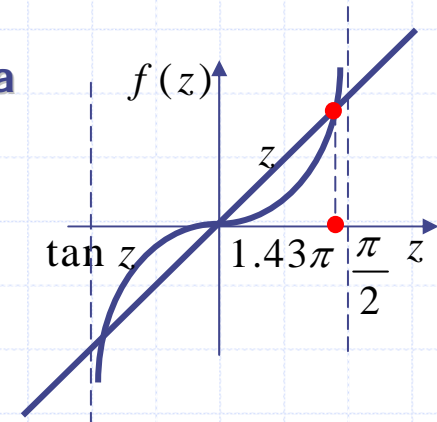
- Imponendo le c.c. si ottiene (anche in forma matriciale):

$$A + \frac{Y}{(\alpha L)^2} = 0 \quad \frac{1}{L} \left[ (\alpha L)B - \frac{Y}{(\alpha L)^2} \right] = 0 \quad A \cos \alpha L + B \sin \alpha L = 0$$

$$\begin{bmatrix} (\alpha L)^2 & 0 & 1 \\ 0 & (\alpha L)^3 & -1 \\ \cos \alpha L & \sin \alpha L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Imponendo che il determinante sia nullo perché si abbia una soluzione diversa dalla banale, per  $\alpha \neq 0$  si ottiene:

$$\tan \alpha L = \alpha L \quad \Rightarrow \quad (\alpha L)_1 = 4.493 = 1.430\pi$$



- Il carico critico e la deformata critica saranno:

$$P_E = 2.046\pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

$$w_E(x) = A \left( \cos 4.493 \frac{x}{L} - \frac{1}{4.493} \sin 4.493 \frac{x}{L} + \frac{x}{L} - 1 \right)$$

## Lunghezza libera di inflessione

- Gli esempi hanno mostrato che il carico critico può esprimersi:

$$P_E = \kappa \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

- $\kappa$  è un coefficiente adimensionale che riflette l'influenza dei vincoli; per i tre casi considerati  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 0.25$  e  $\kappa = 2.046$ .
- Infatti, l'equazione differenziale della linea elastica assume la forma generale (con secondo membro legge lineare che dipende dalla legge del momento)

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = K_1 x + K_2$$

- L'integrale generale è del tipo:

$$w(x) = A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x + A_3 x + A_4$$

- Le configurazioni di equilibrio inflesse (deformate critiche) sono allora costituite da una porzione di senoide eventualmente traslata e/o ruotata

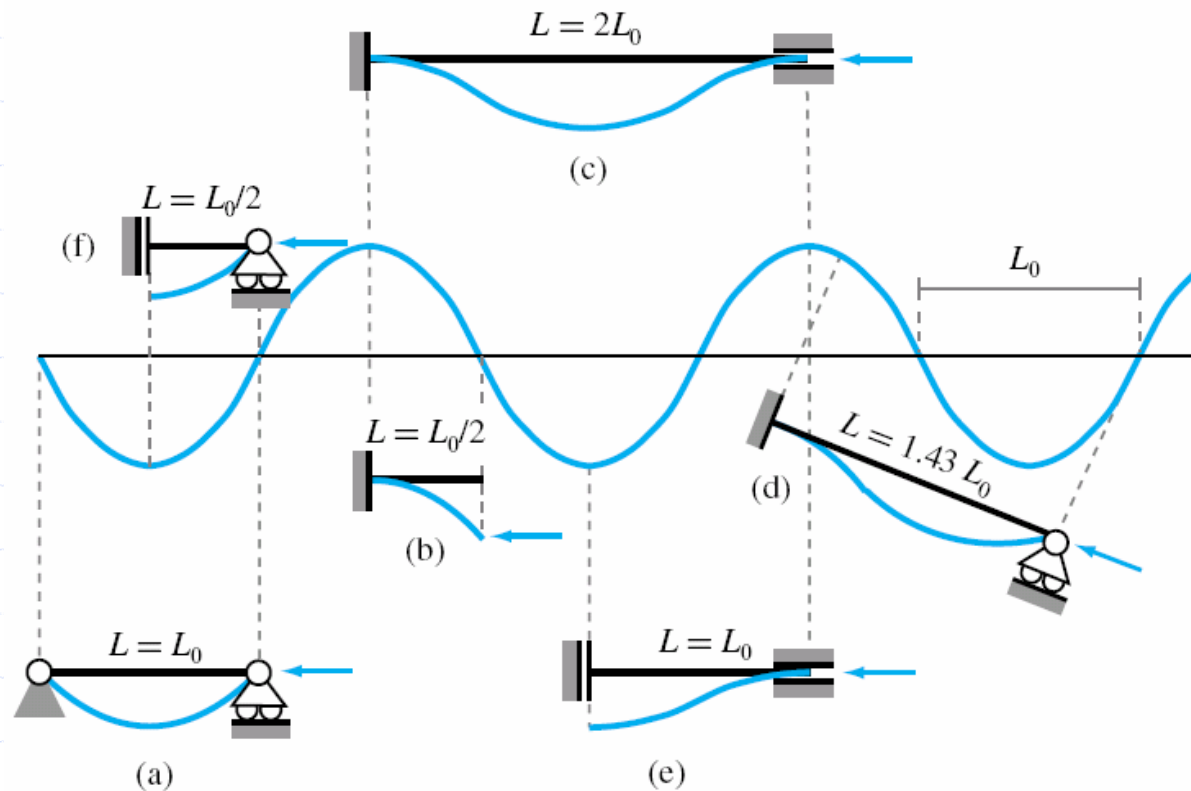
## Lunghezza libera di inflessione

- Le diverse condizioni di vincolo possono essere tutte ricondotte ad un unico caso (caso (a)), la cosiddetta asta di Eulero: la sua deformata critica copre una semionda della sinusoide e la lunghezza  $L$  dell'asta corrisponde alla distanza  $L_0$  tra due successivi punti di flesso (**lunghezza libera di inflessione**)

$$P_E = \pi^2 \frac{EI}{L_0^2}$$

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{\kappa}}$$

Caso	$\kappa$	$L_0/L$
(a)	1.0	1.0
(b)	0.25	2.0
(c)	4.0	0.5
(d)	2.046	0.699
(e)	1.0	1.0
(f)	0.25	2.0



## Snellezza

- E' conveniente riferire il carico critico all'unità di sezione trasversale, ponendo

$\sigma_E = P_E / A$  . Si scrive allora:

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \pi^2 E \frac{\kappa}{L^2} \frac{I}{A} = \pi^2 E \frac{\rho^2}{L_0^2}$$

- Raggio d'inerzia della sezione

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

- Si introduce la **snellezza**, che raccoglie tutte le caratteristiche geometriche dell'asta (sezione, lunghezza, condizioni di vincolo)

$$\lambda = \frac{L_0}{\rho} = \frac{L}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{I}{A}}$$

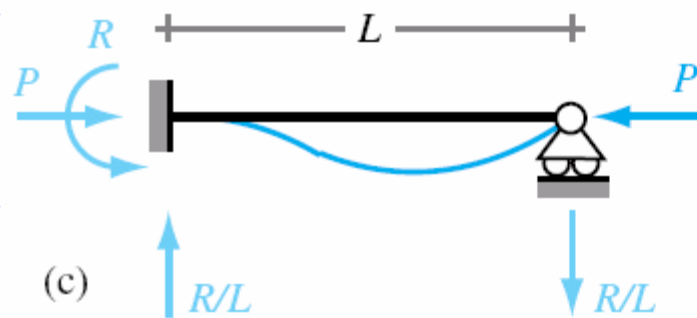
- La tensione critica di Eulero risulta inversamente proporzionale a  $\lambda^2$

$$\sigma_E = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

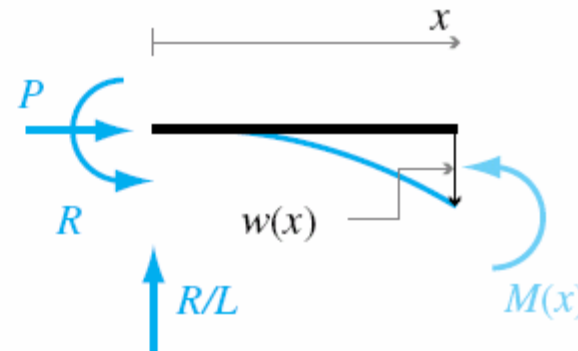
- Lo sbandamento avviene nel piano in cui l'asta oppone minore rigidità all'inflessione, per cui:

$$\rho = \rho_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

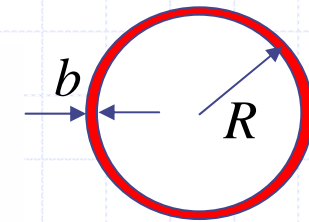
## Esempio 1



$$I = \pi R^3 b$$



$$A = 2\pi R b$$



$$L = 5m$$

$$R = 45mm$$

$$b = 5mm$$

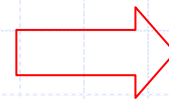
- Raggio d'inerzia della sezione
- Lunghezza libera di inflessione
- Snellezza
- Carico critico

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^3 b}{2\pi R b}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = 31.82mm$$

$$L_0 = 0.699L = 3.495m$$

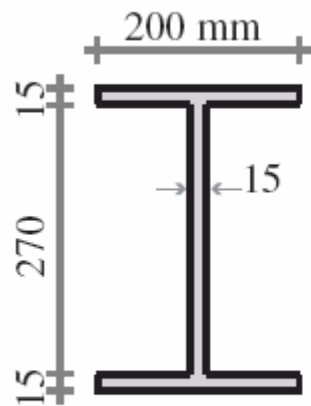
$$\lambda = \frac{L_0}{\rho} = \frac{3495}{31.82} = 109.8$$

$$\sigma_E = \pi^2 \frac{206000}{(109.8)^2} = 168.5MPa$$

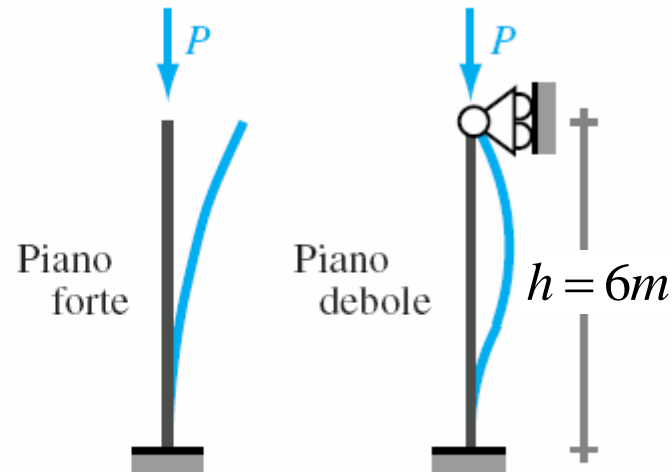


$$P_E = A\sigma_E = 238kN$$

## Esempio 2



(a)



(b)

$$A = 10.05 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$I_f = 146.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_d = 20.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

- **Raggi d'inerzia**

$$\rho_f = \sqrt{\frac{I_f}{A}} = 120.8 \text{ mm}$$

$$\rho_d = \sqrt{\frac{I_d}{A}} = 44.7 \text{ mm}$$

- **Lunghezze libera di inflessione e snellezze**

$$L_{0f} = 2h = 12 \times 10^3 \text{ mm}$$

$$L_{0d} = 0.699h = 4.194 \times 10^3 \text{ mm}$$

$$\lambda_f = \frac{L_{0f}}{\rho_f} = 99.3$$

$$\lambda_d = \frac{L_{0d}}{\rho_d} = 93.8$$

$$\lambda_f > \lambda_d$$

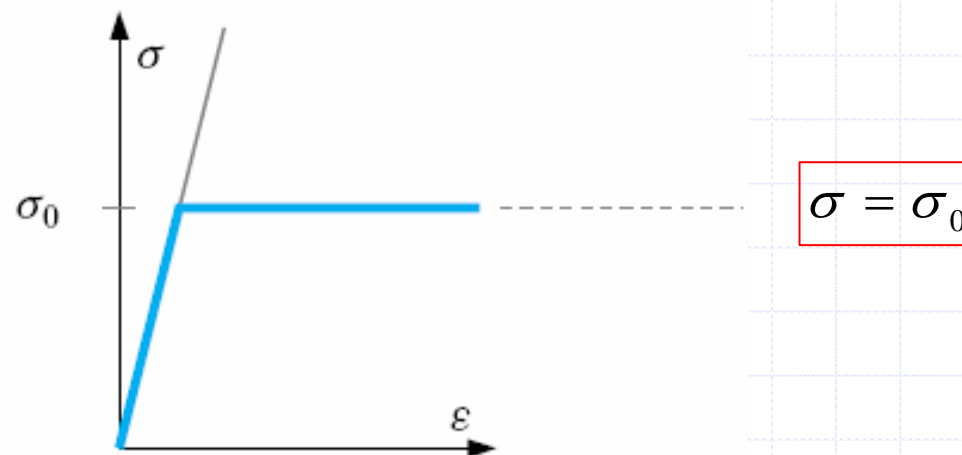
- **Il pilastro si instabilizza nel piano forte**

$$(P_{Ed} = 2.32 \text{ MN} > P_E)$$

$$P_E = A\sigma_E = \pi^2 \frac{EA}{\lambda_f^2} = 2.07 \text{ MN}$$

## Curve di stabilità

- La trattazione sin qui svolta sull'instabilità euleriana individua una soglia critica che dipende dalla rigidezza e dalle proprietà geometriche e di vincolo della trave, sottintendendo un comportamento elastico lineare del materiale
- Tuttavia tutti i materiali hanno un limite di resistenza e il collasso per raggiungimento di tale limite deve essere tenuto in conto
- Accade che per alti valori di snellezza la condizione critica è dettata dalla instabilità euleriana, mentre per bassi valori di snellezza il collasso avviene per raggiungimento della crisi del materiale



## Curve di stabilità

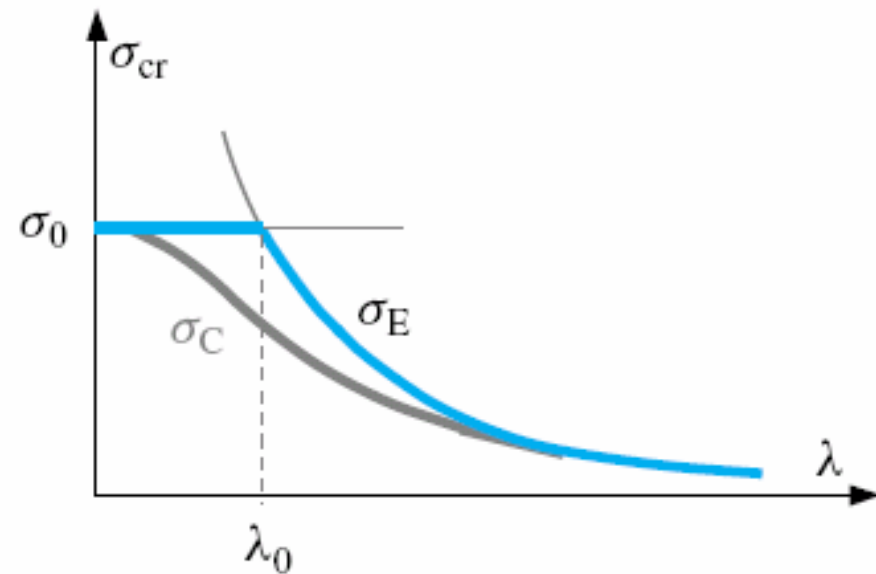
- Il valore della snellezza  $\lambda_0$  che individua la transizione tra queste due modalità di collasso si determina imponendo

$$\sigma_E = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = \pi^2 \frac{E}{\lambda_0^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}}$$

- Il carico critico teorico di un'asta compressa  $\sigma_{cr}$  corrisponde, per ogni snellezza dell'asta, al minimo tra i valori  $\sigma_0$  e  $\sigma_E$  :

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \sigma_E = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}, \quad \lambda \geq \lambda_0$$

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \sigma_0, \quad \lambda \leq \lambda_0$$



## Curve di stabilità

- Alla curva teorica occorre sostituire una curva che tenga conto delle inevitabili imperfezioni che fanno insorgere il fenomeno di instabilità per valori inferiori del carico

$\lambda/\lambda_0$	$c = \sigma_c/\sigma_0$			
	curva a	curva b	curva c	curva d
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	1.000	1.000	1.000	1.000
0.4	0.953	0.925	0.900	0.841
0.6	0.885	0.838	0.783	0.699
0.8	0.796	0.727	0.655	0.572
1.0	0.674	0.599	0.537	0.468
1.2	0.540	0.481	0.439	0.385
1.4	0.427	0.383	0.357	0.319
1.6	0.341	0.308	0.293	0.265
1.8	0.277	0.250	0.241	0.222
2.0	0.228	0.205	0.200	0.188
2.2	0.190	0.173	0.169	0.160
2.4	0.162	0.147	0.147	0.138
2.6	0.138	0.128	0.128	0.120
2.8	0.119	0.110	0.110	0.105
3.0	0.105	0.096	0.096	0.092

**Carico di collasso  
per aste compresse  
(norme CNR UNI)**

