

7. Forze

1. Forze in Natura

Tutte le forze che si manifestano in natura sono determinate da quattro interazioni fondamentali:

1. Interazione gravitazionale
2. Interazione elettromagnetica
3. Interazione nucleare forte
4. Interazione nucleare debole

Oggi i fisici stanno elaborando una grande teoria unificante che possa ricondurre tutte le forze che osserviamo ad un'unica forza fondamentale che ha dato origine all'Universo. I risultati conseguiti per le tre ultime interazioni sono soddisfacenti, tuttavia per includere nella teoria l'interazione gravitazionale è necessario ancora parecchio lavoro.

Nello studio della dinamica si prenderanno in considerazione le prime due. Per quanto riguarda l'interazione elettromagnetica si esamineranno semplici problemi di dinamica di particelle cariche soggette all'azione di campi elettrici e magnetici; ma anzitutto verranno descritte le forze che usualmente vengono chiamate di contatto, e cioè le forze esercitate mediante trazioni o compressioni, le forze di attrito, le forze vincolari, le forze esercitate da molle e fili, tutte complicate manifestazioni dell'interazione elettromagnetica fondamentale, naturalmente non dedotte da principi primi, ma accettate semplicemente come forze di natura meccanica.

Le forze fittizie, dipendenti dal moto del riferimento adottato, verranno descritte nel capitolo XI.

Una forza può essere funzione delle coordinate, della velocità e del tempo, cioè $\mathbf{F}(x, y, z; \mathbf{v}; t)$; pertanto l'equazione fondamentale della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(x, y, z; \mathbf{v}; t)$$

che si traduce nelle tre relazioni scalari

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m}F_x(x, y, z; v_x; t) \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m}F_y(x, y, z; v_y; t) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m}F_z(x, y, z; v_z; t).\end{aligned}\tag{1}$$

Queste relazioni, assegnate le forze che agiscono sul punto e le condizioni iniziali, costituiscono un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine che, integrate, permettono di ricavare le equazioni del moto: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Se, in particolare, la forza dipende solo dalle coordinate si dice *posizionale*. Ovviamente $\mathbf{F}$, per il principio di sovrapposizione, rappresenta la risultante di tutte le forze agenti sul punto. In generale, il problema matematico risulta piuttosto complesso e non sempre risolvibile per via analitica.

2. Forza gravitazionale

La forza di gravitazione universale tra due corpi di massa (gravitazionale) m_1 ed m_2 , scoperta da Newton, è data dalla relazione:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}},\tag{2}$$

dove r è la distanza tra le masse ed $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore del vettore $\mathbf{r}$ che fissa la posizione della massa m_2 rispetto a m_1 e viceversa; il segno negativo indica il carattere attrattivo della forza. G è una costante universale che caratterizza la forza gravitazionale per tutti i corpi; essa è stata determinata nel 1798, con un esperimento molto famoso, da Cavendish il quale trovò il valore $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$. Misure recenti hanno permesso di stabilire il valore, oggi universalmente accettato, $G = (6,672 \pm 0,004) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$.

La forza gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i corpi che si attraggono, perciò decresce rapidamente al crescere della loro distanza; però è proporzionale al prodotto tra le masse. Per questo motivo l'attrazione esercitata da un corpo molto grande, come la Terra o le stelle, è notevole anche se il valore di G è molto piccolo, mentre l'attrazione gravitazionale tra corpi di dimensioni ordinarie è osservabile solo con esperienze molto delicate.

La (2) risulta abbastanza accurata se le dimensioni delle masse sono piccole rispetto alla distanza che le separa; è esatta, come si dimostrerà in seguito, per corpi perfettamente sferici; in tal caso r misura la distanza tra i centri delle sfere. Si osservi che la (2) è simmetrica, nel senso che esprime l'attrazione che subisce

la massa m_1 nel campo gravitazionale generato dalla massa m_2 e viceversa; la forza ha lo stesso modulo ma orientazione opposta ($\hat{\mathbf{r}}$ cambia verso). In altri termini è verificata la legge di azione e reazione. La forza gravitazionale è una forza posizionale poiché dipende dalla distanza tra le masse interagenti e fissato il centro di attrazione, m_1 o m_2 , è anche una forza centrale.

Newton giunse alla formulazione della (2) studiando, in particolare, il moto della Luna intorno alla Terra, convinto che per la validità della seconda legge della dinamica, da egli stesso verificata per una grande varietà di fenomeni fisici, si dovesse ricercare l'espressione di una forza appropriata agente sulla Luna, che ne determinasse il moto.

La legge di gravitazione universale è stata la sintesi mirabile di circa un secolo e mezzo di studi sul moto degli astri. Nel 1543 l'astronomo e matematico polacco Nikolaj Kopernik (Copernico), (1473-1543), pochi mesi prima della sua morte, pubblicò la sua teoria eliocentrica nel "De revolutionibus orbium coelestium", in completa contrapposizione con la cosmologia aristotelica. Successivamente l'astronomo danese Tycho Brahe, (1546-1601), condusse accurate e lunghe osservazioni astronomiche che lo indussero ad una formulazione di sistema planetario in parte eliocentrico ed in parte geocentrico. Si noti che il cannocchiale fu inventato nel 1608 dall'occhialaio fiammingo Lippershey e fu usato per la prima volta per studi astronomici da Galilei, il quale nel 1609 scoprì i satelliti medicei di Giove. Infine l'astronomo tedesco Johannes Kepler (Keplero), (1571-1630), assistente di Tycho Brahe a Praga, dove questi passò gli ultimi anni della sua vita, utilizzando le osservazioni del maestro e perfezionando la teoria copernicana, riuscì a formulare le tre leggi empiriche che portano il suo nome:

- 1) *Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*
- 2) *La velocità areolare dei pianeti è costante; cioè, le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il Sole ad un pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.*
- 3) *I quadrati dei periodi di rivoluzione dei vari pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.*

Le prime due leggi furono enunciate nel 1609 e si fondano sui dati di Tycho Brahe relativi al moto di Marte; successivamente, pur senza una precisa dimostrazione, Keplero ne propose l'estensione a tutti i pianeti allora noti; al moto della Luna attorno alla Terra e ai satelliti di Giove scoperti da Galilei.

La terza legge, nota come legge armonica, venne enunciata dieci anni dopo e precisa la relazione esistente tra il periodo di rivoluzione T e le dimensioni delle orbite dei pianeti attorno al Sole o di quelle dei satelliti attorno al pianeta. Tale legge infatti

afferma che il rapporto

$$\frac{T^2}{a^3} = C, \quad (3)$$

dove a è la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita ellittica e C una costante che ha un valore unico per ogni famiglia di astri; cioè un valore per i pianeti che ruotano attorno al Sole, un altro valore per i satelliti di Giove e così via.

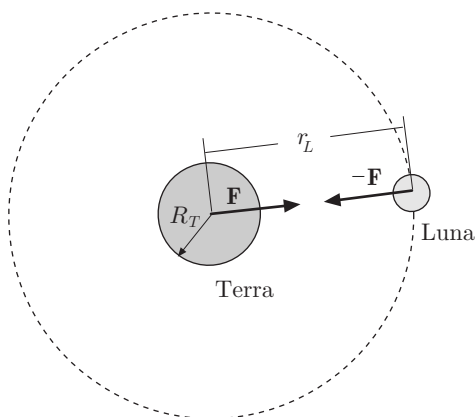


Fig. 7.1

Ritorniamo ora al problema di Newton e consideriamo il calcolo nei particolari. Era noto che il moto della Luna attorno alla Terra fosse pressoché circolare ed uniforme, con raggio dell'orbita uguale a circa 60 volte il raggio R_T della terra e periodo T circa uguale a 27,32 giorni; pertanto l'accelerazione alla quale è soggetta la Luna è puramente centripeta. Detta r_L la distanza tra i centri della Terra e della Luna, figura 1, l'accelerazione centripeta è v^2/r_L ; ma $v = 2\pi r_L/T$, pertanto si ha

$$a_L = \frac{v^2}{r_L} = \frac{4\pi^2 r_L}{T^2} = 2,71 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2,$$

essendo $r = 60R_T$, $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ e $T = 27,3 \text{ d} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ s}$.

D'altra parte era noto che ogni corpo in prossimità della superficie terrestre è soggetto all'accelerazione di gravità, e poiché il rapporto tra g ed a_L risulta

$$\frac{g}{a_L} \approx 3600,$$

che è uguale al rapporto tra i quadrati della distanza Terra Luna e il raggio della Terra,

$$\frac{g}{a_L} = \left(\frac{r_L}{R_T} \right)^2 = \left(\frac{60R_T}{R_T} \right)^2 = 3600,$$

Newton dedusse che l'accelerazione cui è soggetto un grave e l'accelerazione alla quale è soggetta la Luna sono inversamente proporzionali ai quadrati delle corrispondenti distanze dal centro della Terra.

A questo proposito, è famoso l'aneddoto secondo cui si vuole che Newton sia pervenuto a questo risultato, osservando casualmente la caduta di una mela. In effetti la Luna, come la mela o qualsiasi altro oggetto, tenderebbe a cadere sulla Terra se non fosse animata da una velocità iniziale diversa da zero. Pertanto la forza gravitazionale deve essere puramente radiale ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i due corpi. Con le sue parole:

Confrontai così la forza necessaria per mantenere la Luna nella sua orbita con la forza di gravità sulla superficie della Terra, e trovai che esse concordano abbastanza strettamente.

Questa conclusione indusse Newton a formulare la forza di gravitazione universale. La (2), frutto di una geniale intuizione, ha caratteristiche universali che non potevano essere manifeste soltanto nello studio del moto della Luna. Successivamente, Newton dimostrò la validità della legge dell'inverso del quadrato della distanza per le orbite ellittiche, di cui la circonferenza è un caso particolare. Dimostrò che il moto di una qualsiasi coppia di corpi celesti soggetti alla interazione gravitazionale, avviene intorno al comune centro di massa, che costituisce il vero centro di attrazione. Tuttavia se una delle masse è molto maggiore dell'altra, il centro di massa del sistema coincide praticamente col centro geometrico della massa più grande. Infine, facendo uso del calcolo infinitesimale di cui, contemporaneamente ma indipendentemente da Leibnitz, fu ideatore, dimostrò che una sfera uniforme o un guscio sferico uniforme attrae gravitazionalmente come se tutta la massa fosse concentrata nel suo centro geometrico. Sembra che per questa dimostrazione, Newton abbia impiegato venti anni; il tempo necessario per sviluppare i procedimenti del calcolo infinitesimale. Questi argomenti saranno trattati dettagliatamente in seguito.

La forza gravitazionale può essere dedotta dalla terza legge di Keplero la quale, come s'è visto, asserisce che per ogni sistema di pianeti o di satelliti ruotanti intorno ad un centro di attrazione, vale la relazione $T^2/a^3 = C$, con C costante. Supponendo, in prima approssimazione, che le orbite siano circolari, $a = r$ (raggio dell'orbita), l'accelerazione centripeta è

$$\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \frac{1}{r},$$

essendo $v = 2\pi r/T$.

Moltiplicando il secondo membro della precedente per r/r e tenendo conto della (3), si ottiene:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{C} \frac{1}{r^2}; \quad (4)$$

l'accelerazione centripeta è uguale ad un fattore costante moltiplicato per $1/r^2$.

Consideriamo la forza gravitazionale che il Sole esercita sulla Terra; per la (4) si ha

$$F = \frac{4\pi^2}{C} \frac{M_T}{r_{TS}^2},$$

con M_T massa della Terra ed r_{TS} distanza Terra Sole.

La forza di reazione che la Terra esercita sul Sole è uguale ma di verso opposto; indicando con M_S la massa del Sole e con a_S l'accelerazione subita dal Sole è

$$F = M_S a_S;$$

poiché,

$$a_S = \frac{F}{M_S} = \frac{4\pi^2}{C} \frac{M_T}{M_S} \frac{1}{r_{TS}^2},$$

moltiplicando ancora per M_S , si ha:

$$F = \frac{4\pi^2}{CM_S} \frac{M_T M_S}{r_{TS}^2}. \quad (5)$$

Ponendo

$$G = \frac{4\pi^2}{CM_S}, \quad (6)$$

costante gravitazionale, la (5) assume la forma

$$F = G \frac{M_T M_S}{r_{TS}^2}$$

che è il modulo della forza gravitazionale. Pertanto la costante gravitazionale G , può essere ottenuta dalla (6), una volta nota la massa del Sole e la costante C relativa alla famiglia di pianeti orbitanti attorno al Sole, o comunque considerando un qualsiasi sistema di pianeti ruotanti attorno ad un centro di attrazione.

In tabella sono riportati alcuni dati astronomici relativi al sistema solare per mezzo dei quali il lettore può verificare numericamente il valore di C e di G .

Pianeta	Semiasse maggiore (U.A.)*	Periodo di rotazione, (s)	Massa (kg)
Mercurio	0,3871	$7,60 \cdot 10^6$	$3,18 \cdot 10^{23}$
Venere	0,7223	$1,94 \cdot 10^7$	$4,88 \cdot 10^{24}$
Terra	1,0000	$3,16 \cdot 10^7$	$5,98 \cdot 10^{24}$
Giove	5,203	$3,74 \cdot 10^8$	$1,90 \cdot 10^{27}$
Plutone	39,44	$7,84 \cdot 10^9$	$1,08 \cdot 10^{24}$
Luna	0,00257	$2,34 \cdot 10^6$	$7,35 \cdot 10^{22}$

* 1 U. A. (unità astronomica) = $1,496 \cdot 10^{11}$ m

Massa del Sole, $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg

Nel caso dell'interazione Terra-Luna, con considerazioni analoghe, si ottiene

$$G = \frac{4\pi^2}{C' M_T},$$

essendo C' il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione della Luna ed il cubo del raggio dell'orbita e M_T la massa della Terra. Riscrivendo la precedente nella forma

$$GM_T = \frac{4\pi^2}{T_L^2} r_{TL}^3,$$

e sostituendo i valori numerici si ha

$$GM_T = 3.95 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2.$$

Si osservi che questo risultato è ottenuto con dati puramente cinematici; Newton avrebbe potuto ottenere la costante gravitazionale G se avesse conosciuto la massa della Terra. In ogni caso, perché sia valida la (2) per ogni coppia di corpi, occorre una misura indipendente di G , misura che descriveremo più oltre.

Assumendo dunque che G sia stata misurata in qualche modo e che la forza peso agente su un corpo di massa m , in prossimità della superficie terrestre, sia della stessa natura della forza gravitazionale e nell'ipotesi che la massa della Terra sia localizzata nel suo centro geometrico, si può scrivere

$$F = G \frac{mM_T}{R_T^2},$$

dove R_T è il raggio terrestre e, con buona approssimazione, la distanza del corpo dal centro della Terra. Allora si ha

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M_T}{R_T^2}. \quad (7)$$

Numericamente:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Si è verificato dunque che il moto della Luna attorno alla Terra e la caduta libera di un grave sono dovuti alla stessa forza fondamentale, cioè alla interazione gravitazionale.

Esempi

- ||| 1. Forza di attrazione gravitazionale tra due sfere di massa $m = 1 \text{ kg}$ i cui centri si trovano alla distanza di 1 m . Si ha

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}.$$

Ciò dimostra che la forza gravitazionale tra due corpi di dimensioni ordinarie è estremamente piccola; dunque tale forza può essere trascurata rispetto ad altre forze agenti.

- ||| 2. Variazione dell'accelerazione di gravità con l'altezza dalla superficie terrestre.

Secondo la (2) la forza gravitazionale decresce con l'inverso del quadrato della distanza; detta $r = R_T + h$ la distanza di un grave dal centro della Terra si ha

$$g(r) = \frac{F}{m} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2};$$

Se h è piccola rispetto a R_T , la quantità $(R_T + h)^{-2}$ si può sviluppare in serie di potenze:

$$(R_T + h)^{-2} = R_T^{-2} \left(1 - 2 \frac{h}{R_T} + \dots \right);$$

pertanto, trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ha:

$$g(r) \approx G \frac{M_T}{R_T^2} \left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right) = g \left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right),$$

dove $g = GM_T/R_T^2$. La variazione di g è:

$$\Delta g = g(r) - g = -2g \frac{h}{R_T}. \quad (8)$$

Il segno negativo indica che g decresce al crescere di h . Tipicamente alla quota di $10^5 m$ il valore di g si riduce del 3%.

Si deve osservare che, oltre alla variazione di g con la quota, si ha anche una variazione con la latitudine. Infatti la Terra non è perfettamente sferica ma ha la forma di un ellissoide schiacciato ai poli, perciò il suo raggio varia con la latitudine; inoltre si è supposto che la Terra sia costituita da materiale omogeneo. La presenza di zone di diversa densità influenza localmente il valore di g e le variazioni che ne conseguono, dell'ordine di qualche unità per mille, possono essere sfruttate per la prospezione geologica del suolo anche al fine di rilevare giacimenti di minerali o petrolio. La variazione di g con la latitudine è dovuta anche alla forza centrifuga che ha origine dalla rotazione della Terra intorno al proprio asse. A causa di tutti questi fattori, è conveniente fissare un valore medio o standard ($g = 9,807 m/s^2$) in base al quale è possibile stabilire una diretta proporzionalità tra massa e peso.

- ||| **3.** Ricavare il periodo di rivoluzione di un satellite artificiale che percorre un'orbita circolare attorno alla Terra alla quota $h = 35 \cdot 10^3 km$, essendo noti il raggio della Terra $R_T = 6370 km$, il raggio dell'orbita lunare $r_L = 382 \cdot 10^3 km$ ed il periodo di rivoluzione della luna, $T_L = 27,3 d$.

Indicando con l'indice s le grandezze relative al satellite, per la terza legge di Keplero, si ha

$$\frac{T_s^2}{r_s^3} = \frac{T_L^2}{r_L^3},$$

poiché $r_s = R_T + h$, si ottiene:

$$T_s = T_L \left(\frac{R_T + h}{r_L} \right)^{3/2} \approx 1 d.$$

- ||| **4.** Determinare il raggio dell'orbita circolare che la Terra descrive attorno al centro di massa Terra-Luna, a causa dell'attrazione gravitazionale che la Luna esercita sulla Terra.

Poiché il centro di massa del sistema è sempre allineato con i centri della Luna e della Terra, la velocità angolare ω , e quindi il periodo di rotazione, dei due corpi è la stessa. Dette m_T , m_L le masse della Terra e della Luna ed R la distanza tra i rispettivi centri, dalla forza gravitazionale,

$$F = G \frac{m_T m_L}{R^2},$$

si ricava l'accelerazione della Terra:

$$a_T = \frac{F}{m_T} = G \frac{m_L}{R^2}.$$

Se la Terra percorre un'orbita circolare di raggio r_T , si ha:

$$a_T = \omega^2 r_T = G \frac{m_L}{R^2}, \quad \Rightarrow \quad r_T = G \frac{1}{\omega^2} \frac{m_L}{R^2}.$$

Analogamente per la Luna:

$$a_L = \frac{F}{m_L} = G \frac{m_T}{R^2},$$

e

$$a_L = \omega^2 r_L = G \frac{m_T}{R^2}, \quad \Rightarrow \quad r_L = G \frac{1}{\omega^2} \frac{m_T}{R^2}.$$

Poiché $r_L \approx R$, si ottiene

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{R^3}{Gm_T};$$

pertanto:

$$r_T = R \frac{m_L}{m_T}.$$

Essendo $m_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $m_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R = 60R_T$ e $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, si ottiene:

$$r_T = 4,67 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Il raggio di tale orbita risulta minore del raggio della Terra. La Terra si può considerare praticamente fissa; dunque, nel caso in cui una delle masse che si attraggono è molto maggiore dell'altra, è possibile trascurare il moto intorno al centro di massa della massa più grande.

- ||| 5. La cometa di Halley raggiunge il sistema solare ogni 76 anni e passa a una distanza minima dal Sole (perielio) trascurabile rispetto alla massima distanza dal Sole (afelio), figura 2. Chiamando d la massima distanza dal Sole raggiunta dalla cometa, si ha $d \approx 2a$, dove a è il semiasse maggiore della sua orbita ellittica. Si calcoli d sapendo che l'orbita della Terra intorno al Sole è con buona approssimazione circolare di raggio $R = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Anche in questo problema si applica la terza legge di Keplero. Indicando con T_T il periodo di rivoluzione della Terra e con T_C quello della cometa (76 anni), si ha

$$\frac{T_T^2}{R^3} = \frac{T_C^2}{a^3}.$$

Poiché $a \approx d/2$:

$$\frac{T_T^2}{R^3} = 8 \frac{T_C^2}{d^3}, \quad \Rightarrow \quad d = 2R \left(\frac{T_C}{T_T} \right)^{2/3} = 5,38 \cdot 10^9 \text{ km}.$$

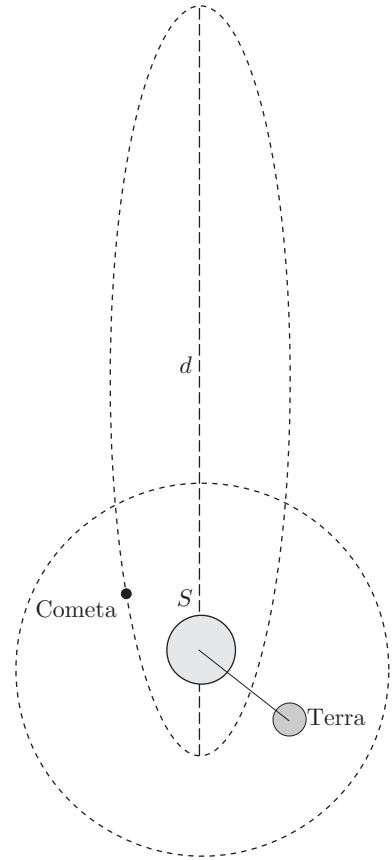


Fig. 7.2

|| 2.1. Esperienza di Cavendish

L'esperienza di Cavendish ha una importanza storica perché la determinazione numerica di G permette di "pesare" la Terra, come Cavendish stesso ebbe a dire intitolando *Weighing the Earth* l'articolo con cui presentò il risultato.

Si è visto nell'esempio 1 che la forza gravitazionale tra due masse di dimensioni ordinarie è estremamente piccola perciò la sua misura richiede accorgimenti particolari. Cavendish usò una versione perfezionata della bilancia di torsione, già inventata da J. Michell per rivelare forze molto deboli ed usata da Coulomb per la misura delle forze che si esercitano tra cariche puntiformi. Il dispositivo è schematizzato in figura 3. Due piccole sfere di uguale massa m sono disposte agli estremi di una sbarretta, sospesa per il centro ad un sottile filo di quarzo. Se due forze opposte agiscono sulle masse, si determina un momento che viene equilibrato dal momento di torsione elastica del filo, proporzionale all'angolo di torsione. Per evidenziare questo angolo, al filo è fissato uno specchietto su cui incide un raggio di luce, poi riflesso su una scala graduata, (leva ottica). In assenza di forze il filo non subisce torsione

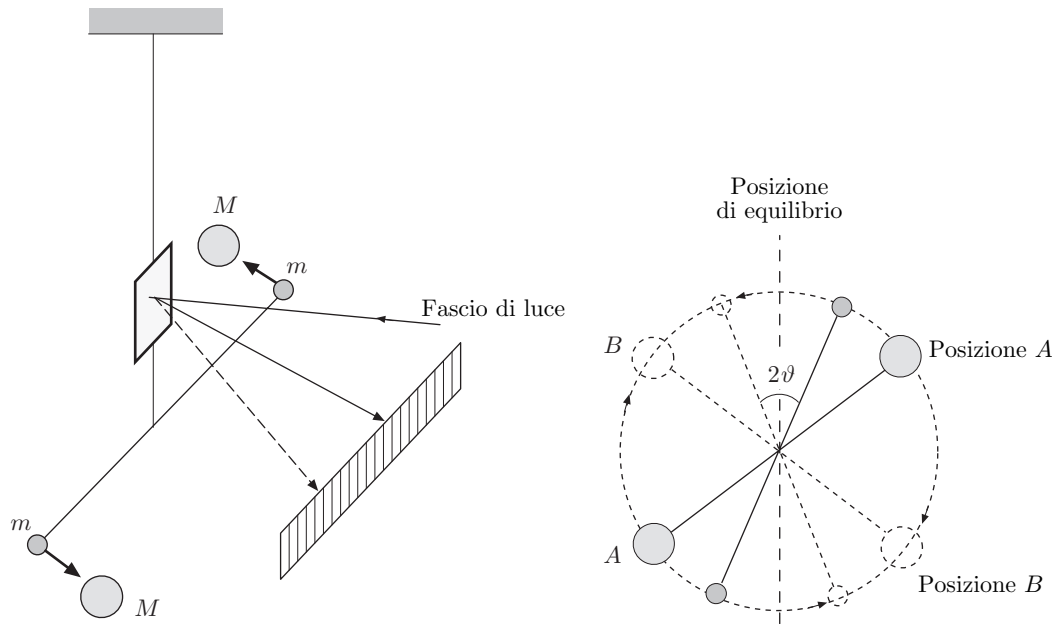


Fig. 7.3

e il sistema si trova in una certa situazione di equilibrio iniziale. Due grosse masse sferiche M uguali, i cui centri, come quelli delle masse m , giacciono sulla stessa circonferenza orizzontale, sono poste in prossimità delle masse m nella posizione A della figura. Una volta raggiunto l'equilibrio, e ciò richiede diverse ore essendo la forza molto debole e il sistema molto sensibile, viene misurato l'angolo θ di torsione. Infine le masse M vengono poste nella posizione simmetrica B , come indicato a tratteggio in figura, e si misura l'angolo corrispondente al nuovo equilibrio; ovviamente l'angolo di torsione complessivo è 2θ . Da questi dati, note le masse e le distanze tra i centri delle sfere, si ricava la costante di gravitazione G .

III 3. Forze elettromagnetiche

Le forze elettromagnetiche verranno studiate in dettaglio in Elettromagnetismo; ora ci limiteremo a descrivere alcuni casi in cui l'interazione di cariche o correnti con campi elettrici e magnetici dà luogo a forze che ne causano il moto. Accettata dunque l'espressione della forza, il movimento verrà determinato con l'equazione fondamentale della dinamica. Ne citiamo alcune.

La forza che si esercita su una carica q in presenza di un campo elettrico $\mathbf{E}$, creato da un'altra carica o comunque da una distribuzione di cariche, è:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (9)$$

La forza che viene esercitata su una carica animata di velocità $\mathbf{v}$ in un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$, è espressa dalla forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (10)$$

Se è presente, oltre al campo magnetico, un campo elettrico si ha

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (11)$$

La forza per unità di lunghezza tra due fili paralleli, posti a distanza r , percorsi da correnti I e I' è data, in modulo, da

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'}{r},$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto; la forza è attrattiva o repulsiva se le correnti sono concordi o discordi.

|| 3.1. Moto di un elettrone in un campo elettrico uniforme

Un campo elettrico uniforme è realizzato all'interno di due elettrodi piani, carichi uniformemente di segno opposto, figura 4. Detta l la lunghezza degli elettrodi e $2d$ la loro distanza, fissiamo un riferimento x, y con origine O in d . Supponiamo che in corrispondenza all'origine un elettrone di massa m entri, con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ diretta come l'asse x , nella regione in cui è presente il campo elettrico. La seconda equazione della dinamica si scrive:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -e\mathbf{E},$$

che va integrata con le condizioni iniziali

$$t = 0; \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0; \quad y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0.$$

La situazione è analoga a quella di un corpo soggetto all'azione della gravità, animato di velocità iniziale orizzontale. Proiettando sugli assi si ha

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = \frac{eE}{m},$$

che integrate successivamente, tenuto conto delle condizioni iniziali, danno:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2.$$

I moti componenti sono: un moto uniforme secondo l'asse x e un moto con accelerazione costante secondo l'asse y . La traiettoria, nello spazio in cui è presente il campo elettrico, è un arco di parabola con vertice nell'origine e concavità volta verso l'alto:

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}.$$

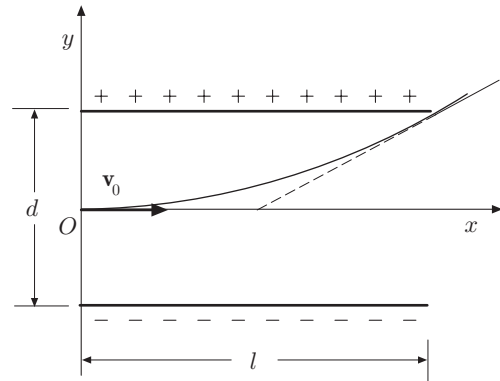


Fig. 7.4

Affinché l'elettrone fuoriesca dagli elettrodi, fissata la velocità iniziale, il valore E_0 del campo elettrico deve essere tale che

$$d = \frac{1}{2} \frac{eE_0}{m} \frac{l^2}{v_0^2}.$$

La traiettoria dell'elettrone fuori dagli elettrodi sarà una retta tangente alla parabola nel punto $x = l$. Il coefficiente angolare di tale retta è

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{eE_0}{m} \frac{l}{v_0^2},$$

e la sua equazione:

$$\frac{y - d}{x - l} = \frac{eE_0}{m} \frac{l}{v_0^2},$$

cioè

$$y = \frac{eE_0}{m} \frac{l}{v_0^2} (x - l) + d,$$

le cui intercette con gli assi, tenendo conto dell'espressione di d , sono

$$x = \frac{l}{2}, \quad y = -\frac{1}{2} \frac{eE_0}{m} \frac{l^2}{v_0^2}.$$

|| 3.2. Moto di una carica q in un campo di induzione magnetica uniforme

Sia $\mathbf{B}$ il campo volto secondo l'asse z di una terna cartesiana di origine O ; poiché

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

la forza è sempre ortogonale al piano di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$. Consideriamo l'accelerazione:

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

le cui componenti cartesiane, secondo le regole del prodotto vettoriale, sono

$$\ddot{x} = \frac{q}{m} B \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{q}{m} B \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (12)$$

La componente della velocità lungo z è costante o nulla.

Le soluzioni delle (12) verranno studiate in dettaglio nel seguito; per ora, osservando che la forza è sempre ortogonale alla velocità, quindi alla traiettoria, possiamo tentare soluzioni del tipo:

$$\dot{x} = v \cos \omega t, \quad \dot{y} = -v \sin \omega t, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \quad (13)$$

Le prime due sono le componenti della velocità di un moto circolare uniforme che, in particolare, avviene in senso orario. Poiché:

$$\ddot{x} = -\omega v \sin \omega t, \quad \ddot{y} = -\omega v \cos \omega t,$$

sostituendo nelle (12), si ottiene

$$\begin{aligned} -\omega v \sin \omega t &= -\frac{qB}{m} v \sin \omega t, \\ -\omega v \cos \omega t &= -\frac{qB}{m} v \cos \omega t, \end{aligned}$$

che sono soddisfatte se si pone

$$\omega = \frac{qB}{m} = \omega_c.$$

Questa relazione definisce la *pulsazione o frequenza di ciclotrone* ed ha effettivamente le dimensioni dell'inverso di un tempo, come si può verificare osservando che le dimensioni del prodotto qB sono $[qB] = [F]/[v]$.

Integrando le (13) si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v}{\omega_c} \sin \omega_c t + x_0 \\ y &= \frac{v}{\omega_c} \cos \omega_c t + y_0 \\ z &= \dot{z}_0 t + z_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Eliminando il tempo tra le prime due, come proiezione della traiettoria sul piano $x-y$, si ottiene una circonferenza con centro in x_0, y_0 e raggio

$$R = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv}{qB},$$

che si chiama raggio di ciclotrone. La terza rappresenta un moto uniforme lungo z ; pertanto la traiettoria sarà un'elica cilindrica con asse parallelo a z , figura 5. Se $\dot{z}_0 = z_0 = 0$, la traiettoria si riduce a una circonferenza nel piano $x-y$.

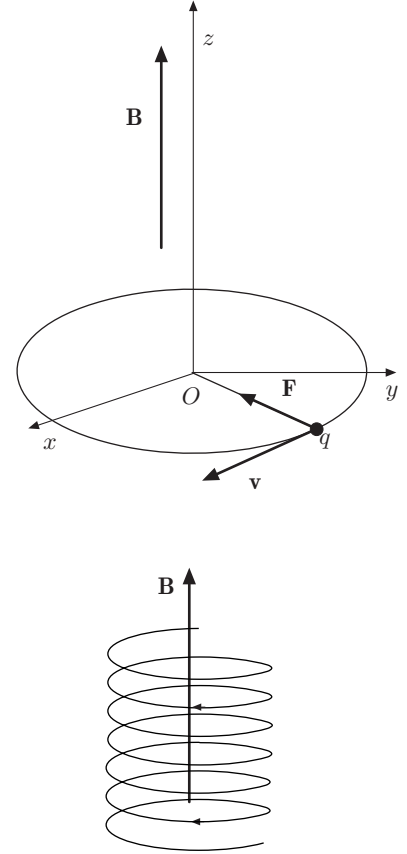


Fig. 7.5

4. Forze elastiche (forze esercitate da molle)

Una forza elastica è esprimibile mediante la relazione

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}, \quad (15)$$

dove k è la costante elastica ed $\mathbf{r}$ il vettore che stabilisce la posizione del punto materiale rispetto ad un determinato punto fisso; si noti che la forza è sempre opposta ad $\mathbf{r}$, il segno negativo quindi indica che si tratta di una forza elastica di richiamo. La forza elastica è manifestamente una forza posizionale.

Se una molla ideale, perfettamente elastica e di massa trascurabile, fissata ad un suo estremo, viene allungata o compressa, esercita su un punto materiale posto all'altro estremo, una forza diretta lungo il suo asse il cui modulo è proporzionale alla deformazione $\mathbf{r}$. In figura 6 è mostrata una molla su una superficie

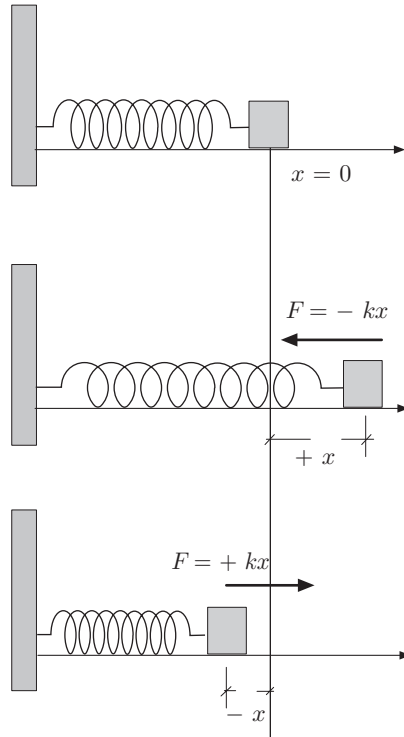


Fig. 7.6

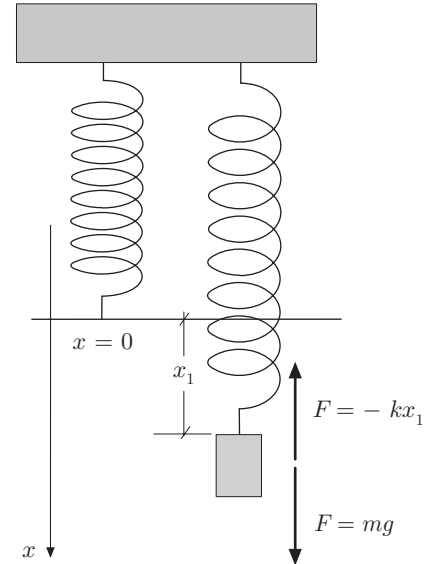


Fig. 7.7

orizzontale priva di attrito con un estremo fisso. Poniamo l'origine O delle coordinate x nell'estremo libero della molla in posizione di riposo, dove è collegata con una massa. Se la molla viene allungata, sulla massa si destina una forza diretta verso l'origine la cui intensità è proporzionale allo spostamento x ,

$$|F| = kx;$$

analogamente, se la molla viene compressa, la forza esercitata sulla massa è diretta ancora verso O e si ha

$$|F| = kx;$$

relazioni che si possono compendiare con

$$F = -kx.$$

La costante k , costante elastica della molla, rappresenta la *rigidità* della molla.

In figura 7 è mostrata una molla disposta verticalmente con un estremo fisso e, come prima, scegliamo l'asse x delle coordinate con origine nell'estremo libero e volto verso il basso. Sospendiamo in questo estremo una massa m ; la molla si allunga di una quantità x_1 e la forza di richiamo esercitata è $F = -kx_1$, uguale ed opposta alla forza peso $F_p = mg$. Avendo cura di porre la massa lentamente in modo da non imprimere oscillazioni, l'estremo della

molla risulta in equilibrio; perciò:

$$kx_1 = mg,$$

da cui si ricava la costante elastica della molla,

$$k = \frac{mg}{x_1}.$$

Se la massa viene in qualche modo sollecitata, il sistema oscilla attorno alla nuova posizione di equilibrio x_1 .

È altresì possibile verificare la (15), ponendo all'estremo della molla pesi via via crescenti e riportare in un grafico i pesi in funzione delle deformazioni (allungamenti) ottenute; tale grafico deve essere lineare, e il rapporto tra un peso qualsiasi e la corrispondente deformazione fornisce la costante k .

Consideriamo ora il sistema massa-molla, posto su un piano orizzontale senza attrito, figura 6; spostando la massa dalla posizione di riposo, il sistema oscilla intorno a tale posizione, realizzando materialmente un oscillatore armonico per il quale l'equazione fondamentale della dinamica è

$$ma = -kx. \quad (16)$$

Per trovare l'equazione del moto, $x(t)$, occorre integrare la precedente assumendo note certe condizioni iniziali; per esempio, per $t = 0$, sia $x(0) = A$ e $v(0) = 0$; ciò significa che la massa all'istante iniziale si trova nel punto di inversione del moto, dove la velocità è nulla e l'elongazione massima. Scriviamo la (16) come segue:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = -kx;$$

separando le variabili si ha

$$mv dv = -kx dx,$$

ed integrando

$$m \int v dv = -k \int x dx, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C_1,$$

con C_1 costante di integrazione che, per le condizioni iniziali assegnate, ha il valore $C_1 = kA^2/2$. Pertanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2).$$

Per ottenere l'equazione del moto $x(t)$, bisogna integrare ancora; dalla precedente si ha:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}.$$

Separando le variabili e ponendo $\omega^2 = k/m$, si ha

$$\frac{d(x/A)}{\sqrt{1 - (x/A)^2}} = \omega dt,$$

ed integrando:

$$\sin^{-1} \frac{x}{A} = \omega t + C_2,$$

con C_2 costante di integrazione che, per le condizioni iniziali, risulta $C_2 = \sin^{-1} A/A = \pi/2$. Pertanto:

$$x(t) = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

La massa esegue oscillazioni di frequenza

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (17)$$

In generale possiamo scrivere

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (18)$$

La costante φ dipende dalle condizioni iniziali ($t = 0$); infatti $x(0) = A \sin \varphi$ e $\dot{x}(0) = A\omega \cos \varphi = v(0)$. Prendiamo in esame il sistema molla massa di figura 7; le oscillazioni avvengono attorno ad una posizione di equilibrio diversa da quella assunta dalla molla a riposo, che dipende dalla massa sospesa. Le forze che agiscono sulla massa sono il peso $m\mathbf{g}$ e la forza elastica; l'equazione fondamentale della dinamica è:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kx. \quad (19)$$

L'equilibrio si ha per $x_1 = mg/k$, posizione in cui peso e forza elastica hanno risultante nulla. Indicando con x' una nuova coordinata con origine in questa posizione, $x' = x - mg/k$, la (19) diventa

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = mg - k \left(x' + \frac{mg}{k} \right) = -kx'.$$

Ciò è lecito poiché sia velocità che accelerazione non cambiano; quindi la soluzione della precedente è

$$x'(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Pertanto:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k}. \quad (20)$$

La massa esegue oscillazioni armoniche attorno al nuovo centro di oscillazione x_1 .

Si osservi che questo risultato è valido anche quando si considera il sistema molla massa posto su un piano orizzontale e soggetto oltre che alla forza elastica, ad una forza $\mathbf{F}$ costante. Un

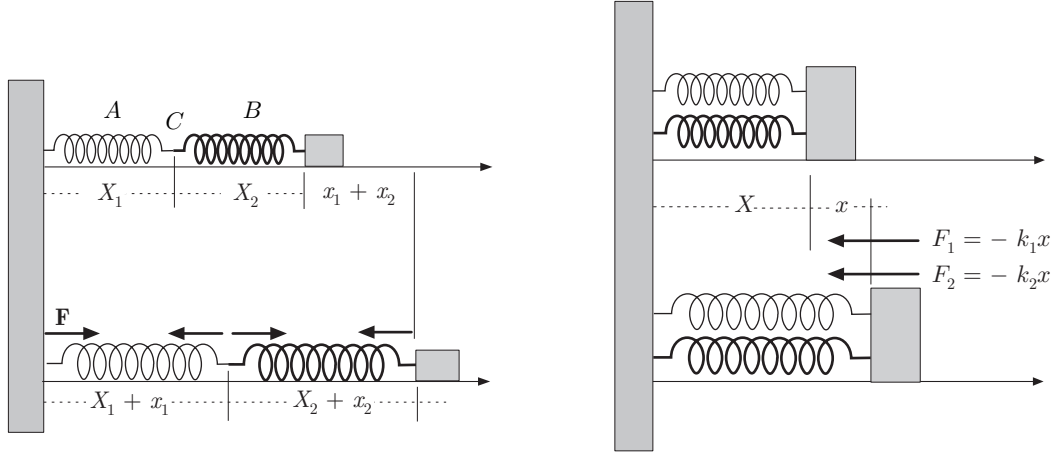


Fig. 7.8

problema importante è quello di studiare il moto di una massa collegata a due molle A e B in serie o in parallelo di costanti elastiche diverse, figura 8.

Nel primo caso siano X_1 e X_2 le lunghezze delle molle a riposo; indicando con k_1 e k_2 le rispettive costanti elastiche e con x_1 e x_2 le deformazioni provocate, la deformazione totale è

$$x = x_1 + x_2.$$

Sia F la forza esercitata dalla molla B sulla massa m ; per la terza legge della dinamica, una forza di reazione opposta è applicata nel punto C di collegamento delle molle. La molla A , a sua volta, esercita in C una forza elastica opposta alla forza di reazione; dunque si ha

$$x_1 = -\frac{F}{k_1}, \quad x_2 = -\frac{F}{k_2},$$

da cui:

$$x = x_1 + x_2 = -F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = -\frac{F}{k},$$

dove

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}. \quad (21)$$

La frequenza delle oscillazioni è dunque:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}, \quad (22)$$

ed il periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

Se $k_1 = k_2$, cioè le molle hanno la stessa rigidità, per un certo spostamento della massa, ogni molla verrà deformata della metà;

la forza di richiamo sarà metà di quella esercitata dalla singola molla.

Nel caso delle molle in parallelo, indichiamo con X la posizione di equilibrio; se la massa viene spostata in $X + x$, le molle si deformano della stessa quantità ed esercitano le forze:

$$F_1 = -k_1 x, \quad F_2 = -k_2 x.$$

La forza agente sulla massa è

$$F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)x = -kx;$$

la costante elastica complessiva è la somma delle costanti elastiche; se $k_1 = k_2$ le molle si comportano come una singola molla, di rigidità doppia. La frequenza delle oscillazioni risulta

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (23)$$

Esempi

- ||| 6. La massa puntiforme m di figura 9 è vincolata a due molle ideali di costanti elastiche k_1 e k_2 . Determinare la frequenza delle oscillazioni quando il sistema viene perturbato.

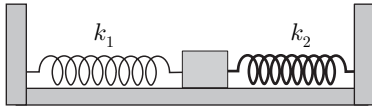


Fig. 7.9

Si tratta di una massa collegata a due molle in parallelo; la frequenza di oscillazione è:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

- ||| 7. Una particella di massa $m = 1 \text{ kg}$ è soggetta ad una forza elastica di richiamo $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, con $k = 1 \text{ N/m}$. Si determini la traiettoria della particella assumendo che per $t = 0$, posizione e velocità iniziali sono: $x_0 = 0$, $y_0 = 0,5 \text{ m}$, $z_0 = 0$ e $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0,25 \text{ m/s}$.

Assumendo un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e proiettando la forza sui tre assi, si ha

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{y} = -ky, \quad m\ddot{z} = -kz,$$

che hanno soluzioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \sin(\omega t + \varphi_x) \\ y(t) &= A_y \sin(\omega t + \varphi_y) \\ z(t) &= A_z \sin(\omega t + \varphi_z), \end{aligned} \quad (24)$$

con $\omega = \sqrt{k/m} = 1 \text{ rad/s}$. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_x \omega \cos(\omega t + \varphi_x) \\ \dot{y}(t) &= A_y \omega \cos(\omega t + \varphi_y) \\ \dot{z}(t) &= A_z \omega \cos(\omega t + \varphi_z). \end{aligned} \quad (25)$$

Le ampiezze e le fasi vanno determinate per mezzo delle condizioni iniziali. Dalle (24) e (25) si ottiene

$$0 = A_x \sin \varphi_x, \quad 0 = A_x \omega \cos \varphi_x;$$

e poiché $\sin \varphi_x$ e $\cos \varphi_x$ non sono mai contemporaneamente nulli, dev'essere $A_x = 0$. Dalle seconde delle (24) e (25) si ottiene:

$$0,5 = A_y \sin \varphi_y, \quad 0 = A_y \omega \cos \varphi_y;$$

da cui si deduce che A_y è diversa da zero e che $\cos \varphi_y = 0$; perciò $\varphi_y = \pi/2$ e $A_y = 0,5 m$. Infine, dalle terze delle (24) e (25) si ha:

$$0 = A_z \sin \varphi_z, \quad 0,25 = A_z \omega \cos \varphi_z;$$

dalle quali si deduce che $A_z \neq 0$; dunque deve essere $\sin \varphi_z = 0$, cioè $\varphi_z = 0$; pertanto $A_z = 0,25/\omega = 0,25 m$. Le equazioni del moto diventano:

$$y(t) = 0,5 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 0,5 \cos \omega t,$$

$$z(t) = \frac{0,25}{\omega} \sin \omega t.$$

Il moto si svolge nel piano y - z e l'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo nelle precedenti:

$$\frac{y^2}{(0,5)^2} + \frac{z^2}{(0,25/\omega)^2} = 1.$$

Si tratta di una ellisse con centro nell'origine.

.....

III 5. Forze vincolari

Nel capitolo III-1 si è visto che i vincoli riducono i gradi di libertà di un punto materiale. Verranno presi in considerazione vincoli bilateri. Per esempio, il punto può essere soggetto alla condizione di appartenere ad una superficie fissa di equazione $f(x, y, z) = 0$; in tal caso ha due soli gradi di libertà, perché assegnate due sue coordinate, la terza risulta determinata una volta nota l'equazione della superficie. Il punto materiale può essere vincolato ad una linea fissa di equazione

$$f_1(x, y, z) = 0,$$

$$f_2(x, y, z) = 0;$$

con un ragionamento analogo, si riconosce che il punto ha un solo grado di libertà.

Si capisce che in queste condizioni il movimento di un punto soggetto a forze, che se necessario preciseremo come *attive*, subisce limitazioni sia nello spostamento che nella velocità; ne segue che il vincolo, assumendo che sia rigido e quindi indeformabile, deve esercitare sul punto materiale una forza, in genere, a priori incognita. Questa forza è chiamata *forza vincolare* e si indica con $\mathbf{F}^{(v)}$ o, se non ci sono ambiguità, con $\mathbf{R}$. Poiché inoltre, per la terza legge della dinamica, l'azione che il punto materiale esercita sul vincolo è opposta alla reazione che il vincolo esercita sul punto, la forza vincolare si chiama abitualmente *reazione vincolare*.

Non si prenderà in esame il problema generale del moto del punto soggetto a vincoli mobili, che verrà considerato in Meccanica Razionale. Va sottolineato che le forze vincolari costituiscono un elemento molto importante anche in problemi molto comuni; infatti, in generale, il moto di un punto materiale o di un sistema privo di vincoli non è frequente.

Prenderemo in esame dapprima i vincoli *privi di attrito o lisci*. In tal caso la reazione vincolare non si oppone al moto del punto; si deduce immediatamente che essa è *ortogonale* alla velocità e quindi al vincolo, pur essendo la sua intensità a priori incognita.

Esempi

- ||| 8. Moto di un grave lungo un piano inclinato, privo di attrito, che forma un angolo θ con la superficie orizzontale, figura 10.

Le forze che agiscono sul grave sono il peso e la forza vincolare; quest'ultima, essendo il vincolo privo di attrito, è ortogonale al piano. Indicando con $\mathbf{R}$ la forza o reazione vincolare, l'equazione della dinamica è

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

Proiettiamo lungo il piano inclinato, assumendo come positiva la direzione discendente, e lungo la normale al piano, assumendo come positiva la direzione uscente:

$$ma_t = mg \sin \theta$$

$$ma_n = -mg \cos \theta + R.$$

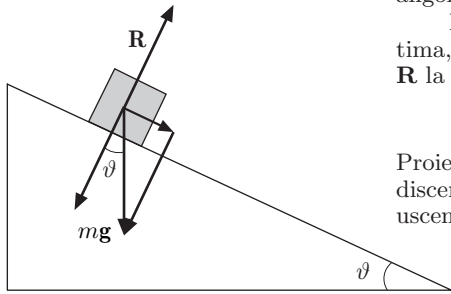


Fig. 7.10

Dalla prima si ottiene

$$a_t = g \sin \theta;$$

il grave, una volta fissato l'angolo θ , scende lungo il piano inclinato con accelerazione costante. Al variare dell'angolo si ottengono tutte le possibili frazioni dell'accelerazione di gravità per lo studio del moto dei gravi (Galilei). Dalla seconda, essendo $a_n = 0$, si ottiene il valore della reazione vincolare:

$$R = mg \cos \theta.$$

- ||| 9. Pendolo semplice

Un pendolo semplice è realizzato da un punto materiale, soggetto all'azione della gravità, che si muove lungo un arco di circonferenza posta in un piano verticale. Esso può essere realizzato sospendendo una massa m puntiforme ad un estremo di un filo, inestendibile e di massa trascurabile, libero di ruotare attorno all'altro estremo fisso in O , figura 11. In alternativa si può considerare una massa vincolata ad una guida circolare, priva di attrito, posta in un piano verticale.

Se la massa viene spostata dalla posizione di equilibrio, che si trova lungo la verticale passante per O , inizia a oscillare ed il moto sarà quello di un punto vincolato, con un solo grado di libertà. Pertanto come unica coordinata possiamo adottare la lunghezza dell'arco s oppure l'angolo θ che il filo forma rispetto alla verticale, assumendo come positivo il verso degli archi crescenti.

Le forze che agiscono sul punto materiale sono il peso $m\mathbf{g}$ e la reazione vincolare, che indichiamo con $\mathbf{R}$. L'equazione fondamentale della dinamica è

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

Proiettando lungo la tangente alla traiettoria, orientata nel verso positivo stabilito e lungo la normale, assumendo su quest'ultima come verso positivo quello centripeto, si ha

$$ma_t = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$ma_n = m \frac{v^2}{l} = -mg \cos \theta + R.$$

Essendo l'arco $s = l\theta$, dove l è la lunghezza del filo, la prima diventa

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

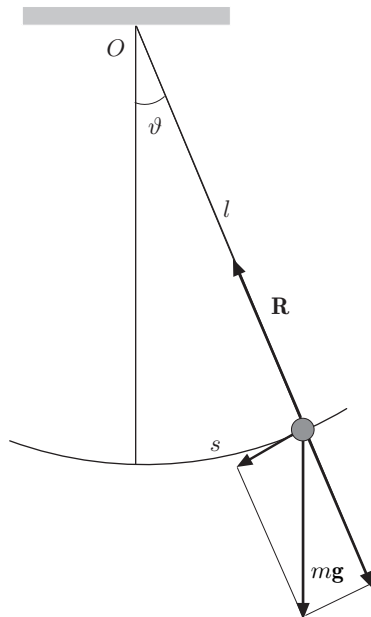


Fig. 7.11

L'equazione differenziale ottenuta non è risolvibile analiticamente; tuttavia limitandosi ad angoli piccoli, tali che $\sin \theta \approx \theta$, l'equazione diventa quella dell'oscillatore armonico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

con

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (26)$$

che dà il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo. Tale periodo dipende ovviamente dalla lunghezza l del pendolo.

La seconda equazione fornisce la reazione del vincolo:

$$R = m\frac{v^2}{l} + mg \cos \theta. \quad (27)$$

La reazione vincolare dipende dall'angolo; essa è minima nei punti di inversione del moto ($v = 0$) e massima quando il punto transita sulla verticale.

.....

6. Forze di attrito

Le forze di attrito hanno la caratteristica comune di opporsi al moto e di essere espresse essenzialmente da relazioni empiriche. Prenderemo in considerazione l'attrito statico, di scorrimento o cinetico, e l'attrito nel mezzo: viscoso, idraulico e balistico.

6.1. Attrito statico e cinetico

La principale causa di attrito tra due superfici solide è costituita da forze intermolecolari che si esercitano nei punti in cui le superfici sono in contatto molto stretto; in questi punti si manifesta in pratica una sorta di saldatura a freddo che si chiama *adesione superficiale* perché le molecole del materiale che si trovano in questi punti sono così vicine da esercitare forze intermolecolari molto intense. Si può quindi definire un'area di contatto effettiva, area microscopica, proporzionale alla forza normale, dove si verifica una deformazione plastica del materiale, sotto l'azione di sforzi molto grandi che si originano in quest'area. In figura 12 è mostrato esageratamente ingrandito l'aspetto di due superfici in contatto.

Quando un corpo scorre sopra un altro la resistenza di attrito si può associare alla rottura di queste numerosissime microsaldature che si riformano continuamente durante lo scorrimento del corpo. Si capisce dunque che la forza di attrito dipende da molte variabili: natura dei materiali, finitura delle superfici, ossidi presenti, impurezze, temperatura ed eventuali lubrificanti interposti. Quest'ultima condizione è molto importante per le parti di macchine in movimento; infatti si potrebbe pensare che solamente una lavorazione molto accurata dei pezzi possa far diminuire la resistenza di attrito; in effetti in queste condizioni i punti di contatto

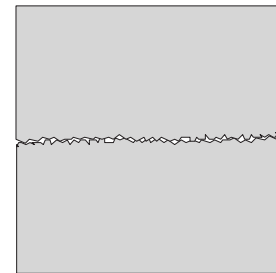


Fig. 7.12

sono molto più numerosi, aumentando così la resistenza di attrito; bisogna interporre un lubrificante che serva a tenere separate le superfici in moto. Se, ad esempio, due superfici accuratamente levigate vengono poste in contatto in alto vuoto, in modo che non si formino pellicole di ossido superficiali, l'attrito diventa molto grande e le superfici si comportano come se fossero effettivamente saldate; quando vengono riportate nell'atmosfera la formazione di ossido riduce l'attrito al suo valore normale.

Consideriamo un corpo poggiato su una superficie orizzontale; l'esperienza mostra che, se vengono applicate forze la cui risultante non ha una componente parallela alla superficie, il corpo non si muove purché la superficie sia in grado di esercitare una forza vincolare opposta alle forze applicate. Se la risultante presenta una componente orizzontale, si osserva che il corpo non si muove finché tale componente non ha intensità sufficientemente elevata. Si conclude che si è destata una forza che tende ad impedire il moto; tale forza, parallela alla superficie d'appoggio, è la forza di attrito.

Sperimentando con una forza orizzontale e aumentando l'intensità di tale forza, che possiamo misurare mediante un dinamometro, osserviamo che il corpo inizia appena a muoversi quando l'intensità della forza applicata raggiunge un ben determinato valore. Il moto, una volta iniziato, risulta accelerato. Se l'intensità della forza applicata viene ridotta opportunamente, si trova che è possibile mantenere il corpo in moto uniforme, ma la forza non è mai nulla, per quanto piccola possa essere. Si è realizzato, in queste condizioni, un equilibrio dinamico tra forza applicata e forza di attrito.

L'esperienza suggerisce due cose: esiste una forza di attrito statico che ha intensità uguale alla più piccola forza necessaria per determinare il moto incipiente; una volta iniziato il moto è necessaria una forza minore per mantenere il moto uniforme; tale forza, agente tra superfici in moto relativo, è detta forza di attrito dinamico.

La forza di attrito non dipende dall'estensione della superficie di contatto tra il piano ed il corpo, ma è proporzionale alla componente normale della forza agente sul corpo. Questa conclusione si può giustificare con le seguenti considerazioni qualitative. L'area di contatto effettiva, area microscopica, è una piccola parte della superficie di contatto del corpo; la forza di attrito è proporzionale all'area microscopica, S_m , per cui, indicando con F_A il modulo della forza di attrito, possiamo scrivere

$$F_A = \sigma S_m,$$

quindi σ deve rappresentare il rapporto tra la forza normale e la superficie di contatto S , tale rapporto si chiama sforzo. Si ha

dunque

$$F_A = \frac{F_n}{S} S_m.$$

Ma l'area microscopica è proporzionale alla superficie di contatto, $S_m = \mu S$, per cui, in definitiva, risulta

$$F_A = \mu F_n.$$

La forza d'attrito non dipende dalla superficie ma solo dalla forza normale. Il coefficiente di proporzionalità μ si chiama *coefficiente di attrito*; esso dipende dai materiali, dalla lavorazione delle superfici a contatto, dai lubrificanti eventualmente presenti ecc... Se, ad esempio, consideriamo un mattone e lo poggiamo una volta sulla faccia (a) e un'altra volta sulla faccia (b), figura 13, si ha:

$$F_A^{(1)} = \sigma_1 S_m^{(1)}, \quad F_A^{(2)} = \sigma_2 S_m^{(2)};$$

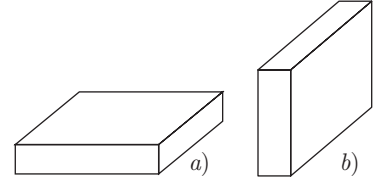


Fig. 7.13

ma

$$S_m^{(1)} = \mu S_1, \quad S_m^{(2)} = \mu S_2,$$

dunque:

$$F_A^{(1)} = \frac{F_n}{S_1} \mu S_1, \quad F_A^{(2)} = \frac{F_n}{S_2} \mu S_2, \quad \Rightarrow F_A^{(1)} = F_A^{(2)};$$

la forza di attrito è la stessa.

Leonardo da Vinci per primo comprese che la forza di attrito è indipendente dall'estensione della superfici in contatto e ce ne ha lasciato la descrizione in uno dei suoi taccuini.

Il coefficiente d'attrito μ è una quantità adimensionata e va distinto in coefficiente di attrito statico μ_s e coefficiente di attrito cinetico o dinamico μ_c . Per una certa coppia di superfici, il coefficiente di attrito statico è maggiore del coefficiente di attrito cinetico perché, come s'è detto, l'esperienza mostra che una volta posto in moto il corpo, la forza necessaria per determinare il suo moto uniforme è minore della forza necessaria per determinare il moto incipiente. Entro limiti abbastanza ampi, μ_c risulta indipendente dalla estensione delle superfici a contatto poiché la forza d'attrito non ne dipende e, per F_n non troppo elevata, non dipende dalla velocità. Il suo valore numerico è minore di uno; nelle condizioni di levigatezza ordinarie, tra due metalli è compreso tra 0,13 e 0,25, e può ridursi fino a 0,07 se fra le superfici è interposto un lubrificante; varia tra 0,4 e 0,6 nel contatto tra due mattoni e può raggiungere il valore 0,76 nel contatto tra pietre rugose.

Indicando con F_t l'intensità della forza necessaria per il moto incipiente, parallela alla superficie d'appoggio, è

$$|F_t| = |F_A| = \mu_s F_n.$$

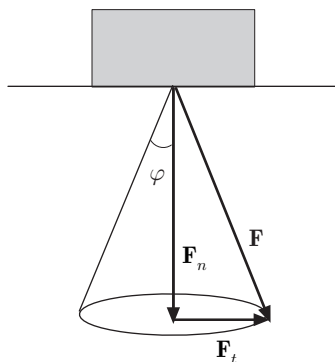


Fig. 7.14

Schematizzando la situazione come mostrato in figura 14, chiaramente si ha

$$F_A = F_n \tan \varphi = \mu_s F_n; \quad (28)$$

allora μ_s assume un significato geometrico preciso, essendo uguale alla tangente dell'angolo di semiapertura di un cono con vertice in P , che si chiama *cono di attrito*.

Se la risultante $\mathbf{F}$ delle forze applicate al corpo si trova all'interno della falda del cono di attrito, il corpo non riesce a muoversi; quando giace sulla falda, $F_t = \mu_s F_n$, si stabiliscono le condizioni di moto incipiente, allora F_t soddisfa la (28). Una volta iniziato il moto e stabilita la nuova forza necessaria per il moto uniforme, la semiapertura del cono diminuisce e la tangente del nuovo angolo è pari al valore del coefficiente di attrito cinetico μ_c .

Le forze di attrito sono molto importanti nella vita di tutti i giorni. Qualunque dispositivo in movimento sottoposto all'attrito finisce per fermarsi e per questo bisogna ridurne gli effetti mediante lubrificanti; d'altra parte, se non ci fosse l'attrito non potremmo esercitare le operazioni più banali: non potremmo camminare, non potremmo tenere in mano una penna e anche se lo potessimo, non riusciremmo a scrivere; i trasporti su ruote non sarebbero possibili.

6.2. Attrito nel mezzo

Forze di attrito si destano quando un corpo si muove in un fluido che oppone resistenza al moto; tali forze dipendono in maniera più o meno complicata dalla velocità del corpo, sono sempre opposte ad essa e si annullano per $v = 0$. Possiamo individuare tra queste forze:

la *resistenza viscosa*, proporzionale alla velocità,

$$\mathbf{F} = -\kappa_v v \hat{\mathbf{v}}, \quad (29)$$

la *resistenza idraulica* con modulo proporzionale al quadrato della velocità,

$$\mathbf{F} = -\kappa_i v^2 \hat{\mathbf{v}}, \quad (30)$$

la *resistenza balistica* con modulo dipendente da una funzione $f(v)$, che cresce più rapidamente di v^2 ,

$$\mathbf{F} = -\kappa_b f(v) \hat{\mathbf{v}}. \quad (31)$$

I coefficienti κ dipendono dalle caratteristiche del fluido che esercita la resistenza e dalla forma e dimensioni del corpo in moto.

Esempi

10. Un corpo di massa m è posto alla sommità di un piano inclinato scabro di altezza h , con velocità iniziale nulla. Noti i coefficienti di attrito statico, μ_s , e

dinamico, μ_c , determinare per quale valore dell'angolo di inclinazione il corpo inizia a scendere e il tempo di discesa. Confrontare quest'ultimo con quello che si ottiene in assenza di attrito.

Le forze agenti sul corpo sono il peso e la reazione vincolare, figura 15, quindi l'equazione della dinamica è

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

Si osservi che, essendo il vincolo scabro, la reazione vincolare $\mathbf{R}$ non è normale al piano, quindi proiettando la precedente nelle direzioni discendente del piano e uscente della normale, assunte come positive, si ha

$$ma_t = mg \sin \theta - R_t, \quad ma_n = -mg \cos \theta + R_n, \quad (32)$$

dove R_t non è altro che la forza di attrito che si oppone al moto:

$$F_A = R_t = \mu mg \cos \theta,$$

con μ coefficiente di attrito.

Poiché non si verifica moto lungo la normale, $a_n = 0$, la seconda delle (32) dà la reazione normale:

$$R_n = mg \cos \theta.$$

Regolando l'inclinazione del piano si può ottenere la condizione di moto incipiente, per il quale nella prima delle (32) è ancora $a_t = 0$. Sostituendo in questa l'espressione di R_t , si troverà un certo angolo θ_c , detto anche angolo critico, per il quale

$$\mu_s mg \cos \theta_c = mg \sin \theta_c, \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \tan \theta_c,$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico.

Ne segue che se $\theta > \theta_c$ il corpo può scivolare lungo il piano inclinato. Se θ_c è molto grande si può verificare una caduta precipitosa del corpo. Appena $\theta > \theta_c$, il corpo inizia a scivolare e il coefficiente di attrito diventa quello cinetico. Pertanto la forza di attrito diventa

$$F_A = \mu_c mg \cos \theta,$$

e l'accelerazione:

$$a_t = g \sin \theta - \mu_c g \cos \theta,$$

indipendente dalla massa del corpo. Il moto avviene con accelerazione costante e poiché per $t = 0$ si è assunto che posizione e velocità iniziali siano nulle; si ha:

$$s = \frac{1}{2} a_t t^2, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a_t}}.$$

Per un piano inclinato di lunghezza l è

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \theta - \mu_c \cos \theta)}},$$

maggiore del tempo impiegato dal corpo in assenza di attrito:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \theta}} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

dove h è l'altezza del piano inclinato.

Le stesse conclusioni valgono per un punto vincolato alla falda di un cono, le cui generatrici formano un angolo θ con il piano orizzontale. Si comprende inoltre come, ammassando sabbia, per effetto del peso e dell'attrito, si formi un cono le cui generatrici formano con la verticale, un angolo la cui tangente uguaglia il coefficiente d'attrito tra i grani di sabbia.

11. Determinare il moto di una particella di massa m e velocità iniziale $\mathbf{v}_0$, soggetta all'azione di una forza viscosa del tipo $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$.

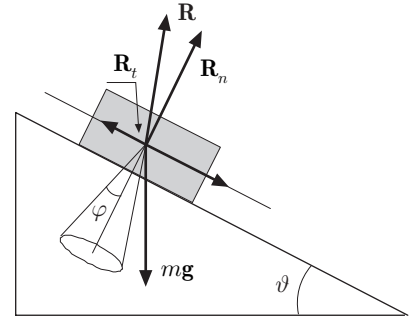


Fig. 7.15

La forza è parallela alla velocità, dunque il problema è unidimensionale. Proiettando su un asse che indichiamo con x , si ha l'equazione differenziale

$$m \frac{dv}{dt} = -bv,$$

che va integrata separando le variabili; si ha:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt.$$

Integrando

$$\ln v = -\frac{b}{m} t + C_1.$$

Poiché per $t = 0$, $v = v_0$, la costante di integrazione risulta $C_1 = \ln v_0$, pertanto

$$\ln v = -\frac{b}{m} t + \ln v_0;$$

si deduce

$$v = v_0 e^{-(b/m)t}. \quad (33)$$

L'andamento della (33) in funzione del tempo è mostrato qualitativamente in figura 16. Si osserva che per il valore del tempo $t^* = m/b$ dipendente dalla massa e dalle caratteristiche viscosi del mezzo, la velocità si riduce al valore $v^* = v_0/e$, tanto più rapidamente quanto più elevato è b .

Dalla (33) si ottiene:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-(b/m)t}, \quad \Rightarrow \quad dx = v_0 e^{-(b/m)t} dt,$$

che integrata dà

$$x = -\frac{v_0 m}{b} v_0 e^{-(b/m)t} + C_2.$$

Se per $t = 0$ assumiamo che la particella si trovi nell'origine $x = 0$, la costante di integrazione risulta $C_2 = (v_0 m)/b$. Pertanto l'equazione oraria del moto è

$$x(t) = \frac{v_0 m}{b} (1 - v_0 e^{-(b/m)t}),$$

il cui andamento è mostrato in figura 17. Il punto raggiunge asintoticamente la posizione $(v_0 m)/b$.

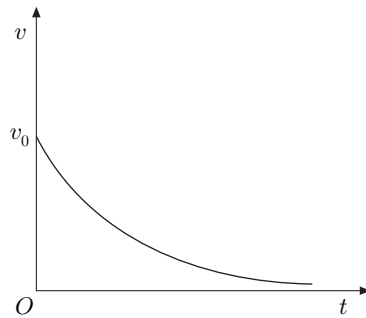


Fig. 7.16

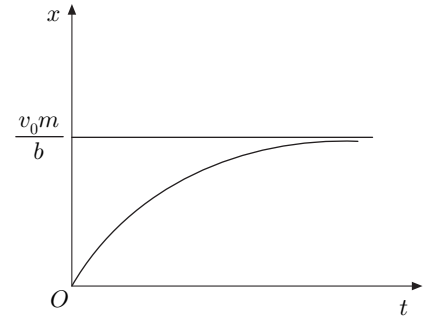


Fig. 7.17

7. Equilibrio del punto materiale

Nel caso di un punto materiale lo studio dell'equilibrio è particolarmente semplice. Condizione necessaria perché un punto materiale sia in equilibrio è che tutte le forze agenti, ivi comprese le reazioni vincolari, abbiano risultate nulla:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum_i \mathbf{F}_i = 0,$$

che, in un riferimento cartesiano si traduce nelle:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0.$$

Ciò significa che il poligono avente come lati le forze deve essere chiuso.

Si noti che la condizione è anche sufficiente se inizialmente il punto è in equilibrio nel riferimento adottato; infatti, per la legge di inerzia, la quantità di moto iniziale può essere diversa da zero, e tale permane se non agiscono forze.

È utile fare ancora qualche considerazione sull'equilibrio del punto materiale vincolato. Indicando con $\mathbf{F}$ la risultante delle forze attive e con $\mathbf{R}$ la reazione vincolare, per l'equilibrio si deve avere

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0. \quad (34)$$

Se il vincolo è privo d'attrito la reazione, come s'è visto, è normale ad esso; pertanto per l'equilibrio del punto è necessario e sufficiente che la risultante delle forze attive non abbia componente tangenziale al vincolo. Se il vincolo è scabro dette rispettivamente R_t , R_n le componenti tangenziale e normale della reazione vincolare, la condizione di equilibrio è anche data dalla relazione

$$R_t \leq \mu R_n.$$

La reazione vincolare, come $\mathbf{F}$, si trova all'interno o al massimo sulla falda del cono di attrito, figura 18.

Esempi

12. Equilibrio di un punto materiale soggetto a tre forze. Si ha

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0.$$

Le tre forze costituiscono i lati di un triangolo, perciò devono essere complanari, figura 19. Applicando il teorema dei seni a questo triangolo si ottiene

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma},$$

che è una relazione utile per correlare i moduli delle forze con gli angoli compresi tra le loro direzioni.

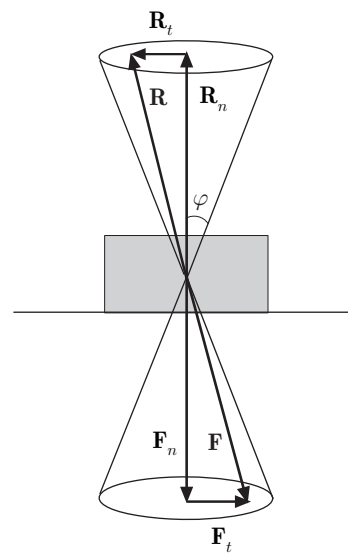


Fig. 7.18

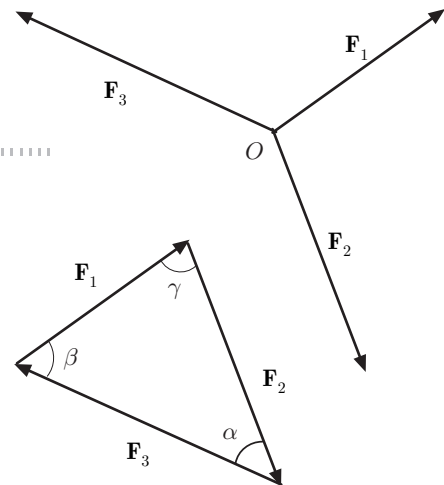


Fig. 7.19

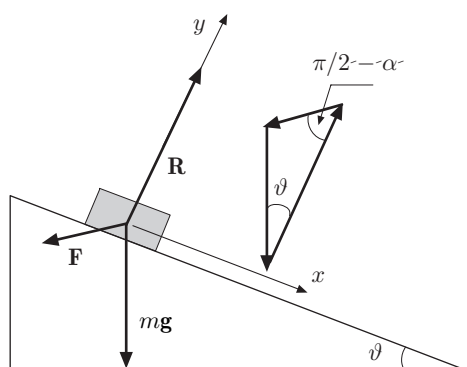


Fig. 7.20

13. Equilibrio di un punto materiale di massa m su un piano inclinato liscio.

Sul punto agiscono il peso mg , la reazione del vincolo $\mathbf{R}$, normale al piano, e una forza $\mathbf{F}$, figura 20. Assegnati l'angolo di inclinazione θ del piano e l'angolo α che $\mathbf{F}$ forma con esso, determinare il suo modulo e la reazione vincolare. Per il teorema dei seni:

$$\frac{F}{\sin \theta} = \frac{mg}{\sin(\pi/2 - \alpha)} = \frac{R}{\sin[\pi/2 - (\theta - \alpha)]},$$

ovvero

$$\frac{F}{\sin \theta} = \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

Si ottiene

$$F = \frac{mg \sin \theta}{\cos \alpha}, \quad R = \frac{mg \cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

In alternativa, possiamo introdurre un riferimento di assi $x-y$ ortogonali, volti nella direzione discendente del piano e nella direzione uscente, e proiettare sugli assi le forze; si ha

$$\begin{aligned} \sum F_x &= mg \sin \theta - F \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y &= R - F \sin \alpha - mg \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si trovano facilmente le espressioni di F ed R ottenute prima.

8. Tensioni nei fili

Definiamo *filo* un sistema materiale perfettamente flessibile e rappresentato geometricamente da una linea; esso inoltre è inestendibile se l'arco di linea delimitato da due suoi punti generici ha sempre la stessa lunghezza, qualunque sia la configurazione del filo.

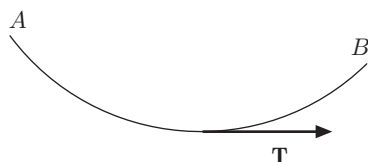


Fig. 7.21

Consideriamo un filo di lunghezza l fissato agli estremi A e B , in equilibrio sotto l'azione di forze esterne assegnate. Immaginiamo di tagliare il filo in P , figura 21; affinché il tratto AP sia in equilibrio, basta aggiungere alle forze esterne agenti su AP , quelle che rappresentano l'azione che PB esercita su AP . Poiché la sezione trasversale del filo è necessariamente finita, si può ritenere che tali forze, ortogonali alla sezione, siano distribuite in ogni punto della sezione stessa; esse, in generale, capitolo XIII, possono essere ridotte ad un sistema equivalente, costituito dalla forza risultante, applicata all'asse del filo, e da una coppia. Tuttavia, nell'ipotesi di perfetta flessibilità del filo, essendo le forze distribuite uniformemente in ogni sezione, la coppia risulterà nulla. Dunque il sistema di forze equivale ad una unica forza che chiamiamo *tensione* $\mathbf{T}$, funzione dell'arco s , tangente al filo e volta verso B . Viceversa l'azione che AP esercita su PB è rappresentata dalla tensione $-\mathbf{T}$.

Consideriamo un filo, agli estremi del quale agiscono le forze $\mathbf{F}_A$ e $\mathbf{F}_B$ e forze esterne distribuite con continuità sul filo stesso,

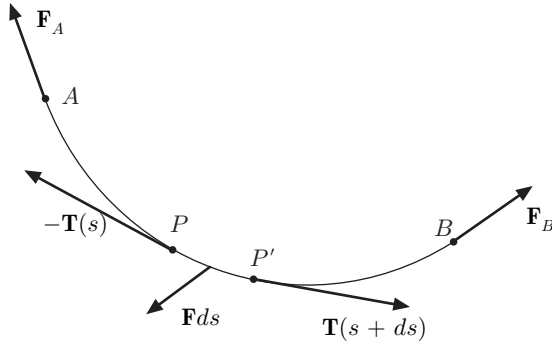


Fig. 7.22

per esempio il suo peso, figura 22. Prendiamo in esame l'equilibrio dell'elemento $PP' = ds$ di filo. È opportuno rappresentare le forze esterne mediante la forza per unità di lunghezza, $\mathbf{F}$, cosicché la forza che agisce sull'elemento ds , è rappresentata dal vettore $\mathbf{F}ds$. Per esempio, nel caso di un filo pesante, la forza agente sarà $\mathbf{F}_p ds$, essendo $\mathbf{F}_p$ il peso per unità di lunghezza. La configurazione di equilibrio di un filo soggetto a sollecitazione continua, è una linea chiamata *linea funicolare*.

Assumendo che la tensione sia funzione della lunghezza dell'arco s e stabilendo come positivo il verso che va da A a B , sull'elemento ds agiscono: la forza $\mathbf{F}ds$, la tensione $-\mathbf{T}(s)$ applicata in P , che rappresenta l'azione di AP su PP' , la tensione $\mathbf{T}(s+ds)$ applicata in P' , che rappresenta l'azione di $P'B$ su PP' . Allora, per l'ipotesi di perfetta flessibilità, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del generico elemento di filo, è data dalla relazione:

$$\mathbf{F}ds + \mathbf{T}(s+ds) - \mathbf{T}(s) = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}ds + d\mathbf{T} = 0,$$

che scriviamo

$$\mathbf{F} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0. \quad (35)$$

Se ci si riferisce all'arco s , indicando con $\boldsymbol{\tau}$ il versore della tangente, la (35) diventa:

$$\mathbf{F} + \frac{dT}{ds} \boldsymbol{\tau} + T \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0. \quad (36)$$

Ma, per la (32)-III, il modulo del vettore $d\boldsymbol{\tau}/ds$ è uguale alla prima curvatura $1/R$ della linea funicolare, in corrispondenza all'elemento ds . Pertanto la forza $T d\boldsymbol{\tau}/ds$ è volta secondo la normale principale. Indicando con F_t e F_n le componenti tangenziale e normale di $\mathbf{F}$, la (36) equivale alle seguenti relazioni scalari:

$$F_t + \frac{dT}{ds} = 0, \quad F_n + \frac{T}{R} = 0. \quad (37)$$

La (35) può essere proiettata sugli assi di un riferimento cartesiano ortogonale, dando luogo alle relazioni:

$$F_x + \frac{dT_x}{ds} = 0 \quad F_y + \frac{dT_y}{ds} = 0, \quad F_z + \frac{dT_z}{ds} = 0.$$

Tenendo presente che $\mathbf{T}$ è tangente in ogni punto al filo e che i coseni direttori della tangente sono dx/ds , dy/ds , dz/ds , si può scrivere:

$$F_x + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad F_y + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad F_z + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = 0. \quad (38)$$

Questo sistema di equazioni differenziali, nota $\mathbf{F}$ e tenendo presente la ben nota relazione

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1,$$

permette di ricavare l'intensità della tensione $T = T(s)$, funzione della lunghezza di arco s , in ogni punto del filo, e le equazioni parametriche $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ della linea funicolare, assegnante certe condizioni al contorno, ossia le forze agenti agli estremi del filo.

Riferendoci alla figura 22, per l'equilibrio nell'estremo A , assunto come origine della linea funicolare, si ha la condizione al contorno

$$\mathbf{T}(0) + \mathbf{F}_A = 0;$$

analogamente per l'equilibrio nell'estremo B :

$$-\mathbf{T}(l) + \mathbf{F}_B = 0,$$

dove l è la lunghezza del filo.

Ma, dalla (35) si ha

$$d\mathbf{T} = -\mathbf{F}ds;$$

integrando, si ottiene

$$\mathbf{T}(s) = - \int_0^s \mathbf{F}ds + \mathbf{T}(0) = - \int_0^s \mathbf{F}ds - \mathbf{F}_A, \quad (39)$$

dove si è tenuto conto della condizione al contorno in A . La tensione in un punto P , corrispondente alla lunghezza di arco s , è opposta alla risultante delle forze esterne, agenti a sinistra di P .

Ponendo come limite superiore dell'integrale la lunghezza l del filo, tenuto conto della condizione al contorno assegnata nell'estremo B , per la (39), si ottiene:

$$\mathbf{T}(l) = - \int_0^l \mathbf{F}ds - \mathbf{F}_A, \quad \Rightarrow \quad \int_0^l \mathbf{F}ds + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 0. \quad (40)$$

La risultante di tutte le forze esterne è nulla, come imposto dall'equilibrio.

Prendiamo ora in esame fili che, oltre ad essere flessibili ed inestendibili, hanno massa trascurabile e consideriamo un filo con tali caratteristiche, in equilibrio, sul quale agiscono le sole forze esterne $\mathbf{F}_A$ e $\mathbf{F}_B$, opposte, applicate agli estremi A e B , figura 23. Poiché il filo ha massa trascurabile, la forza per unità di lunghezza $\mathbf{F} = 0$, quindi dalla (35) si ha $d\mathbf{T}/ds = 0$. Si deduce che la tensione è costante in tutti i punti del filo. Inoltre per la (39), si ricava $\mathbf{T} = -\mathbf{F}_A$, oppure dalla (40), $\mathbf{T} = \mathbf{F}_B$. Si comprende come un filo siffatto possa servire a trasmettere una forza $\mathbf{F}_A$ da A a B e viceversa.

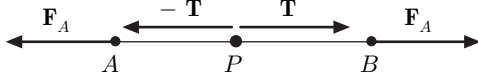


Fig. 7.23

Poiché inoltre i moduli delle forze esterne considerate sono uguali, si deduce che il modulo della tensione è costante lungo tutto il filo. Esso si mantiene tale anche quando il filo assume una direzione diversa da quella rettilinea.

Consideriamo infatti un filo, di massa trascurabile, poggiato su una superficie priva di attrito e sia AB l'arco di filo in contatto con essa, figura 24. Supponendo ancora $\mathbf{F} = 0$, ed essendo la reazione vincolare ortogonale alla superficie, dalla prima delle (37) si deduce $dT/ds = 0$. Il modulo della tensione è lo stesso lungo l'arco AB . Questa conclusione è vera anche in condizioni dinamiche, allorché un filo perfettamente teso realizza una connessione tra due parti di un sistema in moto. Si consideri, figura 25, il sistema costituito da un blocco M , appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito, collegato per mezzo di un filo inestendibile e di massa trascurabile ad una massa m , soggetta all'azione della gravità. Il filo scorrendo su un supporto anch'esso privo di attrito, assume la direzione verticale ed esercita su M una tensione costante; pertanto il sistema, costituito dal blocco, dal filo e da m , si muove con accelerazione costante.

Supponiamo, per semplicità, che il supporto abbia forma circolare e che l'arco di filo AB a contatto con esso sottenda un angolo $\Delta\theta$, figura 26. Le forze agenti sull'arco di filo AB sono le tensioni, applicate

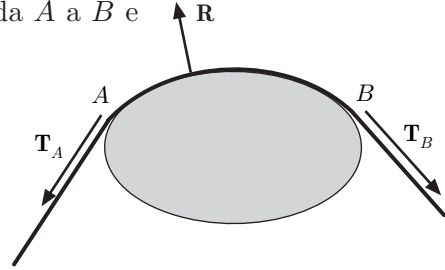


Fig. 7.24

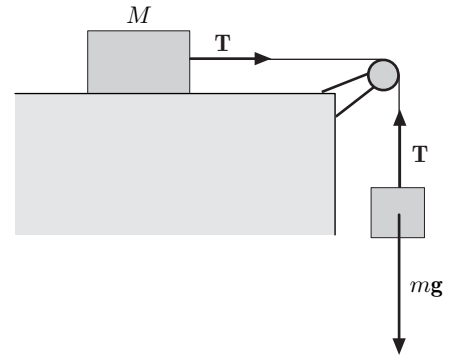


Fig. 7.25

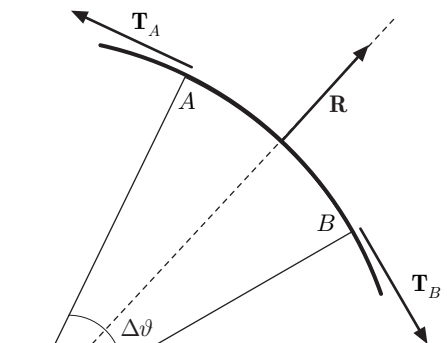


Fig. 7.26

ai suoi estremi e la reazione vincolare $\mathbf{R}$, ortogonale al supporto. Queste forze, poiché è trascurabile la massa del filo e, a maggior ragione, quella della porzione di filo considerata, danno luogo alla relazione:

$$\mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B + \mathbf{R} = 0,$$

perciò non influiscono sul movimento del sistema. Proiettando sulla tangente in P , orientata verso B , si ha:

$$T_B \cos \Delta\theta/2 - T_A \cos \Delta\theta/2 = 0,$$

da cui

$$T_A = T_B.$$

Il modulo della tensione è costante in ogni punto del filo.

Proiettando sulla normale orientata verso l'esterno, si ottiene la reazione vincolare,

$$R - T_A \sin \Delta\theta/2 - T_B \sin \Delta\theta/2 = 0, \quad \Rightarrow \quad R = 2T \sin \Delta\theta/2.$$

Si osservi che i supporti non sono mai privi di attrito perciò, durante il moto, le tensioni in A e B risultano diverse; tuttavia questo effetto può essere in gran parte eliminato impiegando una carrucola costituita da un disco che può ruotare liberamente attorno al suo asse O che, a sua volta, è fissato ad una staffa di sostegno (carrucola fissa). Sul bordo esterno del disco è praticata una gola in cui passa il filo. Poiché l'attrito dell'asse può essere reso trascurabile, si può ritenere che il filo non riesca a slittare sulla gola e quindi venga trascinato nella rotazione. La carrucola deve avere massa trascurabile; il motivo di questa ipotesi sarà chiarito in dinamica dei corpi rigidi. Al sistema formato dalla carrucola e dal tratto di filo AB , figura 27, sono applicate le tensioni $\mathbf{T}_A$, $\mathbf{T}_B$ e la reazione vincolare $\mathbf{R}$ dell'asse di rotazione. Poiché queste forze non influenzano il moto del sistema, con un ragionamento analogo al precedente, si trova che il modulo della tensione si trasmette inalterato lungo il filo e che il modulo della reazione è $R = 2T \sin \Delta\theta/2$.

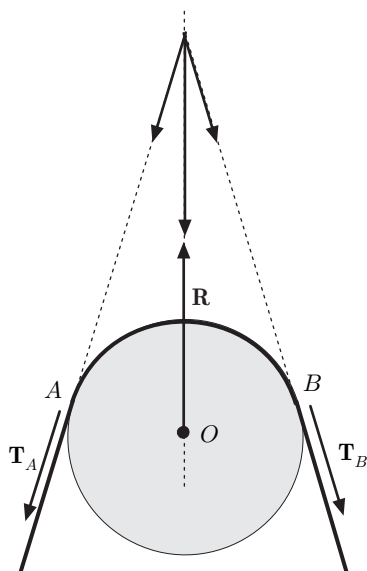


Fig. 7.27

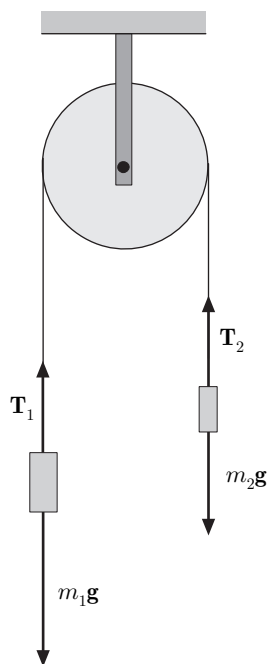


Fig. 7.28

Esempi

14. Macchina di Atwood

La macchina consiste in una carrucola fissa, lungo la quale passa un filo disposto verticalmente ai cui estremi sono sospese due masse m_1 ed m_2 , figura 28. Sia la carrucola che il filo hanno i requisiti illustrati in precedenza (massa trascurabile, flessibilità ecc...). Se $m_1 > m_2$ la massa m_1 scende mentre l'altra sale e poiché il filo rimane sempre teso sia la velocità che l'accelerazione del sistema masse filo sono costanti in modulo. Si determini l'accelerazione del sistema e la tensione del filo.

Le forze che agiscono sulla massa m_1 sono il peso $m_1 \mathbf{g}$ e la tensione $\mathbf{T}_1$ esercitata dal filo; sulla massa m_2 agiscono il peso $m_2 \mathbf{g}$ e la tensione $\mathbf{T}_2$. Il modulo delle tensioni, come si è dimostrato, è costante lungo il filo. La

reazione vincolare è applicata sull'asse della carrucola. Assumendo un asse di riferimento orientato verso l'alto, per le due masse si ha

$$\begin{aligned} -m_1 a &= T - m_1 g \\ m_2 a &= T - m_2 g. \end{aligned}$$

Risolvendo si ottiene

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Il sistema si comporta come se sulla massa totale $m_1 + m_2$ agisse una forza $F = (m_1 - m_2)g$; l'accelerazione che ne segue è una frazione dell'accelerazione di gravità. La macchina, scegliendo convenientemente le masse, può essere usata, come il piano inclinato, per studiare il moto di corpi soggetti ad accelerazione costante.

15. Carrucola mobile

Nella carrucola mobile A un capo del filo è fissato a un supporto rigido, figura 29; all'altro capo, che passa attraverso una carrucola fissa B , è sospesa una massa m_1 ; alla staffa della carrucola mobile è sospesa una massa m_2 . Sulla carrucola mobile dunque agiscono tre forze: le tensioni $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ e $\mathbf{F} = m_2 \mathbf{g}$. All'equilibrio, le tre forze devono essere complanari e passare per uno stesso punto P ; essendo il modulo delle tensioni $T_1 = T_2 = m_1 g$ costante lungo il filo, si ha

$$F = m_2 g = 2T \cos \frac{\theta}{2} = 2m_1 g \cos \frac{\theta}{2}.$$

Se, in particolare, $\theta = 0$ è $m_1 = m_2/2$; la massa m_2 è sostenuta da una massa di grandezza metà.

16. Equilibrio di un filo pesante e omogeneo soggetto all'azione della gravità. Catenaria

Consideriamo un filo sospeso ai suoi estremi A e B come in figura 30; supponendo che il filo sia flessibile, l'arco di filo giace nel piano verticale passante per A e B . Sull'elemento di filo $PP' = ds$ agiscono le tensioni ai suoi estremi e il peso $\mathbf{F}_p ds$, essendo $\mathbf{F}_p$ il peso per unità di lunghezza.

Per trovare la configurazione di equilibrio, dalla prima delle (38), essendo nulla la proiezione di $\mathbf{F}_p ds$ sull'asse x , si ha

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0,$$

dove dx/ds è il coseno direttore dell'elemento di filo. Pertanto

$$T \frac{dx}{ds} = C, \quad (41)$$

dove C la proiezione costante della tensione.

Consideriamo la seconda delle (38); si ha

$$-F_p + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = F_p, \quad (42)$$

essendo dy/ds il coseno direttore dell'elemento di filo. Ma, per la (41), $T = C ds/dx$, dunque la (42) diventa

$$\frac{C}{F_p} d \left(\frac{dy}{dx} \right) = ds, \quad \text{ad} \left(\frac{dy}{dx} \right) = ds, \quad (43)$$

con $a = C/F_p$, costante che ha le dimensioni di una lunghezza.

Essendo

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2},$$

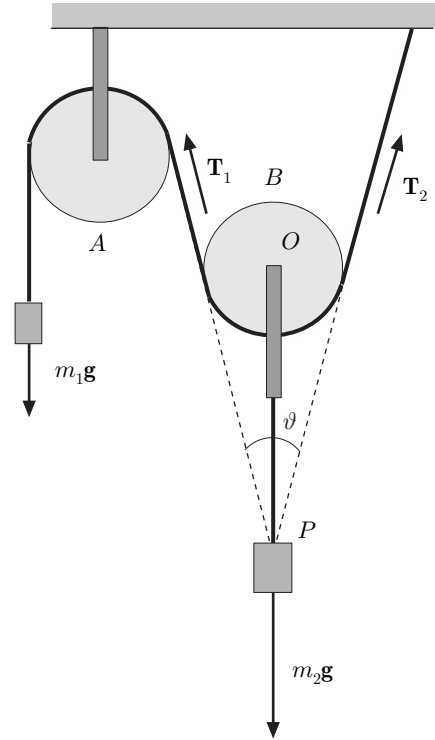


Fig. 7.29

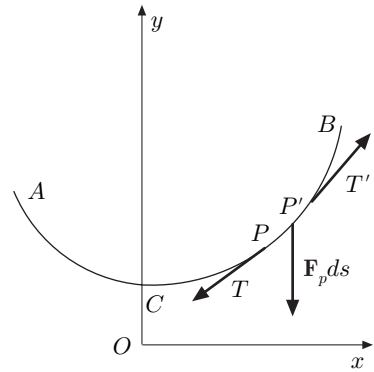


Fig. 7.30

e indicando con $y' = dy/dx$ la (42) si scrive

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a}. \quad (44)$$

Scegliendo l'origine O delle coordinate in modo che per $x = 0$ sia $y = \cosh^{-1} a$ ed integrando, si ha

$$\sinh^{-1} y' = \frac{x}{a}, \quad \Rightarrow \quad y' = \sinh \frac{x}{a};$$

integrando ancora, si ottiene

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}. \quad (45)$$

Questa curva si chiama *catenaria*, avente per base l'asse x ; essa rappresenta la configurazione che assume un cavo sospeso ai suoi estremi. La (45) permette di calcolare la lunghezza dell'arco CP , figura 30, e la tensione in P in funzione dell'ascissa x . Dalla (43) si ha

$$ds = a dy' = a \cosh \frac{x}{a} dx, \quad \Rightarrow \quad s = a \sinh \frac{x}{a}. \quad (46)$$

Tenuto conto delle (41), (45) e della relazione precedente:

$$T = C \frac{ds}{dx} = a F_p \frac{ds}{dx} = a F_p \cosh \frac{x}{a} = F_p y. \quad (47)$$

In particolare la tensione nel punto C della catenaria è $T_C = y_C F_p = a F_p$. Dalla (47) segue che la differenza tra le tensioni in due punti del filo è uguale al peso di una lunghezza di filo uguale alla distanza verticale tra tali punti:

$$T_2 - T_1 = (y_2 - y_1) F_p.$$

Supponiamo che i punti A e B di sospensione siano alla stessa altezza, figura 31. Indichiamo con $2l$ la lunghezza del filo e chiamiamo con h la *freccia*, cioè la distanza verticale dei punti da C ; quest'ultimo abbia coordinate $(0; a)$ e B coordinate $(x_0; a + h)$. Dalle (45) e (46) si ha

$$a + h = a \cosh \frac{x_0}{a}, \quad l = a \sinh \frac{x_0}{a}.$$

Ricordando che

$$\cosh^2 \frac{x}{a} - \sinh^2 \frac{x}{a} = 1,$$

quadrando e sommando le precedenti, si ottiene

$$(a + h)^2 - l^2 = a^2,$$

da cui:

$$a = \frac{l^2 - h^2}{2h}.$$

Le tensioni T in C e in B sono:

$$T_C = a F_p = \frac{l^2 - h^2}{2h} F_p, \quad T_B = T_C + F_p h = \frac{l^2 + h^2}{2h} F_p.$$

Poiché, in genere, h è piccolo rispetto a $2l$ si può assumere che la tensione è circa costante lungo tutto il filo, cioè

$$T = F_p \frac{l^2}{2h}.$$

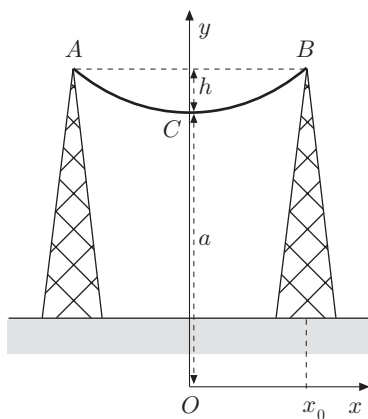


Fig. 7.31

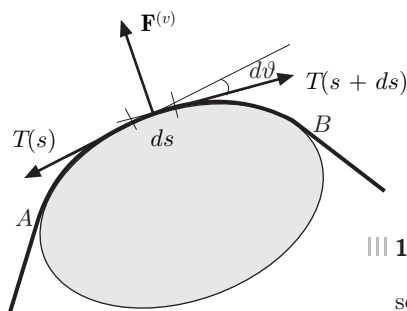


Fig. 7.32

16. Equilibrio di un cavo teso su una superficie scabra

Consideriamo una porzione AB di cavo flessibile teso su una superficie scabra fissa, figura 32; supponiamo che si realizzi la condizione di moto incipiente da A verso B e che il coefficiente di attrito sia μ_s . Un elemento di cavo ds , le cui tangenti negli estremi formano un angolo $d\theta = ds/R$, con R raggio

di curvatura, è soggetto alle tensioni $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{T}(s + ds)$ e alla reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$. A causa dell'attrito la reazione vincolare ha componenti $F_t^{(v)} = \mu_s F_n^{(v)}$, tangente, e $F_n^{(v)}$ normale alla superficie. Fissato come positivo il verso che va da A a B , le equazioni di equilibrio (37) si scrivono

$$\frac{dT}{ds} = -\mu_s F_n^{(v)}, \quad T \frac{d\theta}{ds} = -F_n^{(v)},$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico. Dividendo membro a membro, si ha

$$\frac{dT}{T} = \mu_s d\theta,$$

che integrata fornisce il rapporto tra le tensioni in due punti qualsiasi del cavo, in funzione dell'angolo formato dalle tangenti in questi punti. Nel caso della figura, si ha

$$\ln \frac{T_B}{T_A} = \mu_s \theta, \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A e^{\mu_s \theta}.$$

Si consideri ancora un cavo di ormeggio che si avvolge su un supporto fisso al molo (bitta), come in figura 33; assumendo $\mu_s = 0,5$ e $\theta = 2\pi$ si ha $e^\pi = 23$. È sufficiente, per equilibrare una certa trazione su BB' , esercitare su AA' una forza 23 volte minore. Se il cavo viene avvolto al supporto 2, 3, ... n volte, si capisce che un uomo può equilibrare trazioni esercitate da navi molto grandi.

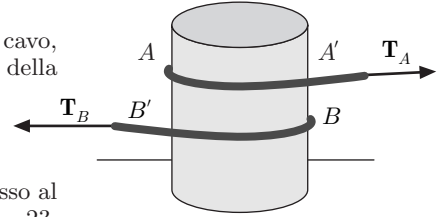


Fig. 7.33

9. Analisi delle forze agenti su un corpo

Una analisi delle forze agenti su un corpo non è sempre immediata e, per evitare errori grossolani, richiede una certa accuratezza, in particolare, quando più corpi sono presenti. Un modo semplice è quello di considerare il corpo come isolato ed eseguire il cosiddetto *diagramma di corpo libero*. Per esemplificare prendiamo in esame due blocchi, di masse m_1 e m_2 , che poggiano su una superficie liscia orizzontale, collegati da un filo, flessibile inestendibile e di massa trascurabile, e trascinati con una forza $\mathbf{F}$ costante parallela alla superficie, figura 34. È noto, in generale, che le forze agenti possono essere classificate in forze di contatto e forze a distanza; nel nostro caso, tra le prime abbiamo le tensioni esercitate dai fili e le reazioni vincolari, tra le seconde la forza peso. Rappresentiamo i diagrammi di corpo libero relativi ai due blocchi mostrati in figura 35.

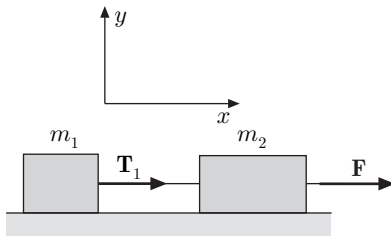


Fig. 7.34

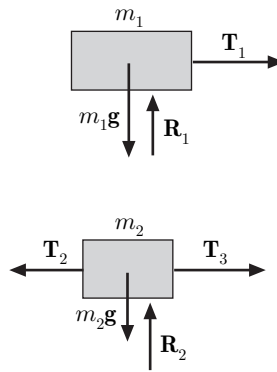


Fig. 7.35

Sulla massa m_1 agiscono la tensione $\mathbf{T}_1$ esercitata dal filo, il peso $m_1\mathbf{g}$ e la forza vincolare del piano $\mathbf{R}_1$; le ultime due si equilibrano, quindi l'unica forza che determina il moto, lungo la direzione x di trascinamento, è la tensione. Per la seconda legge della dinamica si ha

$$T_1 = m_1 a_1.$$

Sulla massa m_2 agiscono le tensioni $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, esercitate dai fili di collegamento, il peso $m_2\mathbf{g}$ e la forza vincolare $\mathbf{R}_2$ del piano; queste due ultime hanno risultante nulla, dunque le forze che determinano il moto, nella direzione x , sono le tensioni. Per la seconda legge della dinamica:

$$T_3 - T_2 = m_2 a_2.$$

Se il filo di collegamento resta sempre teso, l'accelerazione di ogni punto del sistema è la stessa, $a_1 = a_2 = a$. Inoltre il modulo della tensione è lo stesso lungo ciascun filo; pertanto $T_1 = T_2 = T$ e $T_3 = F$. Le equazioni precedenti diventano:

$$T = m_1 a, \quad F - T = m_2 a,$$

da cui, nota la forza F , si ricavano accelerazione e tensione.

Occorre comunque tener presente che, per la terza legge della dinamica, le forze agiscono sempre a coppie, azione e reazione; queste ultime, per il blocco m_1 sono: la reazione $\mathbf{R}'$ esercitata sul piano, la forza gravitazionale $\mathbf{p}'$ esercitata sulla Terra e la tensione $\mathbf{T}'$ esercitata sul filo, figura 36. Tutte queste forze non sono applicate al blocco, pertanto ai fini dello studio del moto devono essere omesse.

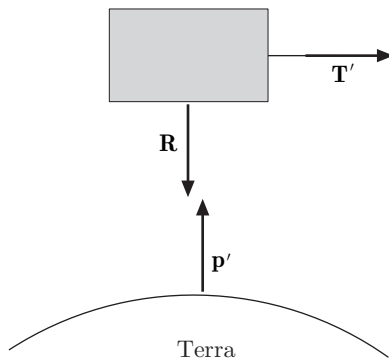


Fig. 7.36