

12. Dinamica dei sistemi

1. Sistemi di punti e seconda legge della dinamica

In cinematica si è introdotto il concetto di sistema di punti materiali; se ne è studiato l'atto di moto ponendo particolare attenzione sui sistemi rigidi. Quando un sistema di punti materiali è soggetto a forze, occorre distinguere tra queste le *forze interne* al sistema e le *forze esterne*, esercitate da altri punti o sistemi di punti esterni.

Per le forze interne vale la terza legge della dinamica, secondo cui tali forze si presentano a coppie e la loro risultante è nulla. Non si intende dire con ciò che per le forze esterne non valga tale legge, ma che essa risulta verificata quando si prendono in esame le interazioni tra sistemi esterni l'uno all'altro. Queste interazioni diventano interne in un sistema più esteso comprendente i sistemi considerati. Poiché la terza legge della dinamica è verificata solo in riferimenti inerziali e le forze fittizie presenti in riferimenti non inerziali non verificano tale legge, per il momento, limiteremo il nostro studio ai sistemi in riferimenti inerziali.

Consideriamo, per semplicità, un sistema costituito da due soli punti; l'estensione ad un sistema di n punti risulterà spontanea. Indichiamo con $\mathbf{f}$ le forze interne e con $\mathbf{F}$ le forze esterne, come mostrato in figura 1. Scrivendo la seconda legge della dinamica per i due punti:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{f} \\ m_2 \mathbf{a}_2 &= \mathbf{F}_2 - \mathbf{f}, \end{aligned}$$

e sommando, si ottiene

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}.$$

Per n punti materiali, si ha

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \quad (1)$$

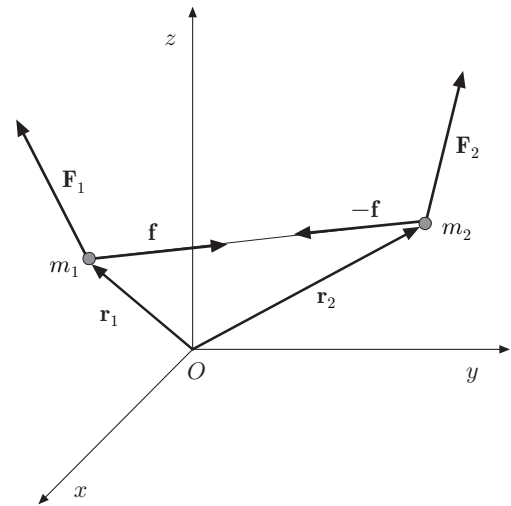


Fig. 12.1

con $\mathbf{F}$ risultante delle forze esterne.

La (1) costituisce l'estensione della seconda legge della dinamica ai sistemi; si osservi che in essa non compaiono le forze interne. Per dare alla (1) una forma più significativa occorre definire il centro di massa di un sistema.

2. Centro di massa

Si definisce centro di massa di un sistema, il punto che ha coordinate assegnate dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \\y_C &= \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \\z_C &= \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M},\end{aligned}\quad (2)$$

dove con M si è indicata la massa totale del sistema.

Le precedenti sono espresse in forma vettoriale dalla relazione

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (3)$$

dove $\mathbf{r}_C$ è il vettore che individua il centro di massa.

Esempio

1. Un sistema è costituito da particelle di masse

$$m_1 = 5 \text{ g}, \quad m_2 = 3 \text{ g}, \quad m_3 = 2 \text{ g}, \quad m_4 = 2 \text{ g},$$

che, in un riferimento cartesiano ortogonale, hanno coordinate:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \text{ cm}, & y_1 &= 0 \text{ cm}; & x_2 &= 10 \text{ cm}, & y_2 &= 30 \text{ cm}, \\x_3 &= 30 \text{ cm}, & y_3 &= 0 \text{ cm}; & x_4 &= -15 \text{ cm}, & y_4 &= 15 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Le coordinate del centro di massa risultano

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 5 \text{ cm} \\y_C &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 10 \text{ cm}.\end{aligned}$$

3. Teorema della quantità di moto

Si definisce quantità di moto di un sistema la somma delle quantità di moto dei singoli punti del sistema:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n = \sum_i \mathbf{p}_i.$$

Derivando le (2) rispetto al tempo, si ha

$$\dot{x}_C = \frac{\sum_i m_i \dot{x}_i}{\sum_i m_i}, \quad \dot{y}_C = \frac{\sum_i m_i \dot{y}_i}{\sum_i m_i}, \quad \dot{z}_C = \frac{\sum_i m_i \dot{z}_i}{\sum_i m_i}, \quad (5)$$

e moltiplicando per M , massa del sistema,

$$M\dot{x}_C = \sum_i m_i \dot{x}_i, \quad M\dot{y}_C = \sum_i m_i \dot{y}_i, \quad M\dot{z}_C = \sum_i m_i \dot{z}_i. \quad (6)$$

In forma vettoriale si ha

$$M\mathbf{v}_C = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}. \quad (7)$$

La quantità di moto di un sistema è uguale alla quantità di moto del centro di massa in cui si ritiene localizzata la massa del sistema.

4. Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Derivando le (6) rispetto al tempo, si ha

$$M\ddot{x}_C = \sum_i m_i \ddot{x}_i, \quad M\ddot{y}_C = \sum_i m_i \ddot{y}_i, \quad M\ddot{z}_C = \sum_i m_i \ddot{z}_i.$$

In forma vettoriale:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}, \quad (8)$$

in cui $\mathbf{r}_C$ e $\mathbf{r}_i$ rappresentano rispettivamente il vettore che individua la posizione del centro di massa ed i vettori che individuano la posizione dei punti. Confrontando la (8) con la (1) si ottiene

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2}.$$

Si deduce quindi che la risultante delle forze esterne è uguale alla massa del sistema per l'accelerazione del centro di massa. L'equazione precedente si scrive:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}. \quad (9)$$

Essa costituisce la *prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi*.

Diremo dunque: *in un sistema sottoposto a forze esterne, il centro di massa si muove come un punto dotato della massa totale del sistema e sollecitato dalla risultante di tutte le forze esterne agenti sul sistema* (Newton). Si deduce che le forze interne, che non compaiono nella (9), non influenzano il moto del centro di massa. Discende inoltre, che con forze interne non si riesce ad alterare il moto del centro di massa. Se un proiettile che percorre, come noto, una traiettoria parabolica, esplode in volo e i suoi frammenti vengono proiettati in varie direzioni per effetto di forze interne dovute all'esplosione, il centro di massa dei frammenti (sistema) continua a percorrere indisturbato la sua traiettoria parabolica.

5. Conservazione della quantità di moto

Se la risultante delle forze esterne è nulla, dalla (9) discende

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = 0,$$

che comporta

$$M\mathbf{v}_C = \mathbf{p} = \text{cost.} \quad (10)$$

La quantità di moto del sistema si conserva.

Tipico esempio di conservazione della quantità di moto è il sistema cannone proiettile prima e dopo lo sparo. La quantità di moto del sistema si conserva solo in direzione orizzontale, poiché lungo la verticale agisce la forza esterna di gravità. Essendo nulla la componente orizzontale della quantità di moto iniziale, tale si manterrà dopo lo sparo; dunque si deve avere

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0,$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono al proiettile ed al cannone. Naturalmente il cannone rincula con una velocità $v_2 = m_1 v_1 / m_2$, molto minore di quella del proiettile.

Se si considerano due particelle che interagiscono per effetto di forze interne, la conservazione della quantità di moto è espressa dalla relazione:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2,$$

dove con gli apici sono state indicate le quantità di moto dopo l'interazione, paragrafo 4-VI. La precedente si può scrivere:

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2), \quad \Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2.$$

La variazione della quantità di moto di una particella, in un certo intervallo di tempo Δt , è uguale ed opposta alla variazione della quantità di moto dell'altra particella, durante lo stesso intervallo di tempo. Tale interazione determina uno scambio di quantità di moto; la quantità di moto perduta da una particella è uguale a quella guadagnata dall'altra particella. Ciò è evidentemente in accordo con la terza legge della dinamica. Infatti dividendo la relazione precedente per l'intervallo di tempo Δt , e facendo tendere a zero tale intervallo, si ha

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}, \quad \mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2,$$

e viceversa.

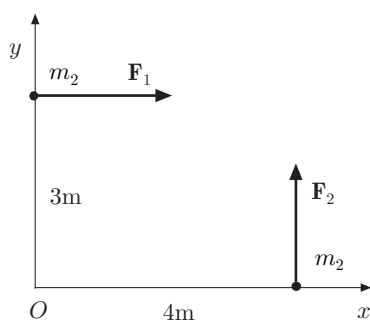


Fig. 12.2

Esempi

2. Due masse $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 0,6 \text{ kg}$, inizialmente in quiete, sono disposte in un piano $x-y$ privo di attrito, come in figura 2. Le coordinate di m_1 siano $(0; 3 \text{ m})$, quelle di m_2 $(4; 0 \text{ m})$. Si applichino ad esse le forze $\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{i} \text{ N}$, $\mathbf{F}_2 =$

3j N ; trovare le equazioni del moto del centro di massa e la quantità di moto del sistema.

Le coordinate iniziali del centro di massa sono

$$x_{0C} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 1,5 \text{ m}$$

$$y_{0C} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = 1,87 \text{ m}.$$

Dalla prima equazione della dinamica dei sistemi:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{a}_C,$$

si ricava il moto del centro di massa. Si ha

$$x_C(t) = x_{0C} + \frac{1}{2} \frac{F_1}{m_1 + m_2} t^2 = 1,5 + 1,25t^2$$

$$y_C(t) = y_{0C} + \frac{1}{2} \frac{F_2}{m_1 + m_2} t^2 = 1,87 + 0,94t^2.$$

La quantità di moto del sistema, quantità di moto del centro di massa, è

$$\mathbf{p} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_C = (m_1 + m_2)(\dot{x}_C \mathbf{i} + \dot{y}_C \mathbf{j})$$

$$= (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j})t = 4t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j}.$$

- ||| 3. Due blocchi di massa m_1 , m_2 , collegati mediante una molla di costante elastica k e di massa trascurabile, poggiano su un piano orizzontale privo di attrito, figura 3. Alla massa m_2 è applicata una forza orizzontale $\mathbf{F}$ costante; determinare l'allungamento della molla.

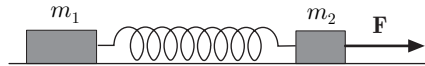


Fig. 12.3

La forza elastica è una forza interna, dunque non influisce sull'accelerazione del centro di massa, che è data da

$$a_C = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Ma, se non si sono instaurate oscillazioni, questa è anche l'accelerazione di ciascun blocco. Detto x l'allungamento della molla, per il blocco m_2 è $F - kx = m_2 a_C$; per il blocco m_1 , $kx = m_1 a_C$. Pertanto

$$x = \frac{m_1}{k} \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

- ||| 4. Un proiettile, lanciato verticalmente con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$, esplode in due frammenti di ugual massa. Dopo t_1 secondi dall'esplosione, uno dei frammenti raggiunge la quota h_1 . Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.

Le forze interne, causate dall'esplosione non influiscono sul moto del centro di massa; poiché la gravità è l'unica forza esterna, il centro di massa si muove di moto uniformemente ritardato e all'istante t_1 raggiunge la quota

$$y_C = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2,$$

avendo fissato come riferimento un asse verticale volto verso l'alto e con origine nel punto di lancio. Poiché

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},$$

$m_1 = m_2$ e $y_1 = h_1$, si ottiene

$$y_2 = h_2 = 2y_C - h_1.$$

Si osservi che la coordinata x dei frammenti non risulta determinata perché dipende dalle velocità vettoriali acquistate all'istante dell'esplosione. Tuttavia va tenuto presente che i frammenti devono essere allineati col centro di massa. Nel caso in esame deve essere soddisfatta la condizione

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

5. Un uomo di massa m si trova all'estremo di un carrello di massa M e lunghezza l , in quiete, libero di muoversi su un binario orizzontale. Trascurando ogni forma di attrito, determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto.

Il sistema, uomo più carrello, non è soggetto a forze esterne, a parte la gravità equilibrata dalla reazione vincolare; dunque il suo centro di massa, inizialmente in quiete, resta tale dopo lo spostamento dell'uomo.

Fissato un asse x solidale col binario, con origine nel centro di massa C , prima e dopo lo spostamento dell'uomo, sarà:

$$x_C = 0 = \frac{mx_1 + Mx_2}{m + M} = \frac{mx'_1 + Mx'_2}{m + M},$$

dove x_1, x_2 sono le ascisse iniziali dei centri di massa dell'uomo e del carrello, e x'_1, x'_2 quelle finali.

Dalla relazione precedente si ottiene

$$M(x'_2 - x_2) = -m(x'_1 - x_1), \quad M\Delta x_2 = -m\Delta x_1,$$

essendo $\Delta x_2, \Delta x_1$ gli spostamenti del carrello e dell'uomo, rispetto al riferimento fisso. Chiamando con l la lunghezza del carrello, lo spostamento assoluto dell'uomo è somma dello spostamento relativo l e dello spostamento di trascinamento Δx_2 del carrello:

$$\Delta x_1 = l + \Delta x_2.$$

Pertanto

$$M\Delta x_2 = -m(l + \Delta x_2), \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = -\frac{m}{m + M}l,$$

in verso opposto allo spostamento relativo dell'uomo.

6. Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi, momento angolare

Si consideri un sistema di particelle, ciascuna soggetta a forze interne ed a forze esterne. Indichiamo con $\mathbf{f}_i$ la risultante delle forze interne e con $\mathbf{F}_i$ la risultante delle forze esterne agenti sulla singola particella; si rammenti la figura 1 in cui sono rappresentate due sole particelle. Per ogni particella si ha

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i.$$

Consideriamo i momenti di ambo i membri rispetto ad un polo O fisso, per esempio, rispetto all'origine del riferimento:

$$\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Sommando su tutte le particelle, si ottiene

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Il primo membro dà il risultante $\mathbf{M}$ dei momenti delle forze esterne. Si osservi che il risultante dei momenti delle forze interne è nullo qualunque sia il polo, perché ogni coppia di forze interne giace sulla stessa retta d'azione, perciò i momenti sono a due a due opposti. Pertanto si ha

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (11)$$

Ricordando che il momento angolare di una particella è

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

e derivando rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Ma, essendo $d\mathbf{r}_i/dt$ e $\mathbf{p}_i$ vettori paralleli,

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i = 0,$$

dunque:

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Allora la (11) diventa

$$\mathbf{M} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (12)$$

in cui $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ è il risultante dei momenti angolari, che chiamiamo *momento angolare del sistema*.

La (12) è la *seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi*; essa descrive il moto del sistema attorno al polo prescelto. Se il polo O non è fisso, con un ragionamento analogo a quello fatto per il singolo punto, paragrafo 3.1-IX, si ottiene una equazione più generale della (12).

Nel riferimento inerziale di figura 4 si scelga un punto Q comunque mobile e si considerino i momenti angolari delle singole particelle rispetto a Q . Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{iQ} &= \mathbf{r}_{iQ} \times \mathbf{p}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{p}_i \\ \mathbf{L}_Q &= \sum_i \mathbf{L}_{iQ} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{p}_i. \end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} &= \sum_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \right) \times \mathbf{p}_i + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\ &= - \sum_i \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \mathbf{p}_i + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\ &= -\mathbf{v}_Q \times \sum_i \mathbf{p}_i + \mathbf{M}_Q = -\mathbf{v}_Q \times \mathbf{p}_C + \mathbf{M}_Q, \end{aligned}$$

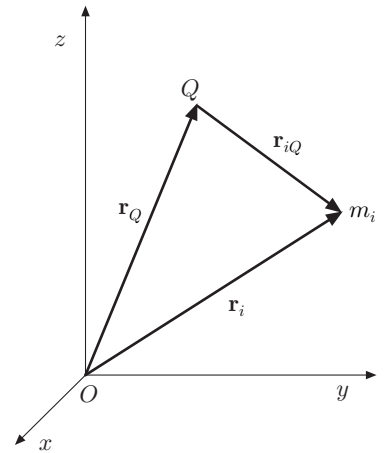


Fig. 12.4

da cui:

$$\mathbf{M}_Q = \frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} + \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p}_C. \quad (13)$$

Il secondo addendo del secondo termine è nullo se Q è fisso o coincide con il centro di massa, oppure se si muove parallelamente ad esso.

La (13) costituisce l'espressione più generale della seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi. *Il risultante dei momenti delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare, se i momenti sono valutati rispetto allo stesso polo che può essere fisso o coincidere col centro di massa (o con un punto che si muove parallelamente a quest'ultimo).* (Eulero, Bernoulli).

7. Conservazione del momento angolare

Se il sistema non è soggetto a forze esterne oppure il risultante dei momenti delle forze esterne è nullo si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0.$$

Ciò significa che il momento angolare del sistema è costante:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \text{cost.} \quad (14)$$

Questa equazione costituisce la legge di conservazione del momento angolare. In altri termini: *il momento angolare di un sistema isolato o di un sistema in cui è nullo il risultante dei momenti delle forze esterne, è costante.*

In un atomo, in cui elettroni e nucleo sono dotati di momento angolare (di spin ed orbitale), il momento angolare è costante perché le forze di attrazione coulombiana tra elettroni e nucleo e le forze di repulsione tra coppie di elettroni sono forze interne che agiscono lungo la congiungente coppie di particelle; il momento risultante di queste forze, qualunque sia il polo scelto è sempre nullo. Ancora: il Sistema Solare rispetto al centro di massa del sistema, praticamente rispetto al Sole, ha momento angolare costante, se trascuriamo l'interazione col resto della Galassia. Infatti i vari pianeti si mantengono in rotazione rispetto al proprio asse con momento angolare costante, poiché le forze di mutua interazione tra essi ed il Sole sono forze centrali che hanno tutto momento nullo rispetto al centro di massa del sistema (Sole).

La legge di conservazione del momento angolare ha validità universale, sia a livello microscopico che a livello macroscopico. Se, infatti, il momento angolare di una parte del sistema varia, si deve presupporre che si sia verificata una variazione opposta nel resto del sistema, in modo che in totale valga la legge di conservazione. Tale legge si verifica, per esempio, nelle reazioni nucleari;

se un nucleo si disintegra, e ciò accade a causa di forze interne, il suo momento angolare varia esattamente di una quantità opposta a quello delle particelle emesse, le quali, per così dire, hanno sottratto momento angolare. Lo stesso processo si verifica quando un nucleo, un atomo o una molecola emettono radiazione elettromagnetica.

In generale, se si considerano due sistemi S_1 ed S_2 interagenti, ma nel loro insieme isolati, si deve avere

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \text{cost.}$$

Per effetto dell'interazione, $\mathbf{L}_1$ varierà di una quantità $\Delta\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ di una quantità $\Delta\mathbf{L}_2$. Ovviamente le due variazioni devono essere tali che

$$\Delta\mathbf{L}_1 + \Delta\mathbf{L}_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{L}_1 = -\Delta\mathbf{L}_2.$$

I due sistemi hanno scambiato tra loro momento angolare.

Allo scopo di chiarire ancora la legge di conservazione del momento angolare, insistiamo sul fatto che esso si conserva anche quando il sistema non è isolato, purché il risultante dei momenti delle forze esterne sia nullo. Per esempio se un corpo rigido, posto in rotazione attorno ad un suo asse spontaneo di rotazione, (vedi dinamica dei corpi rigidi), con velocità angolare costante e quindi con momento angolare costante, viene fatto cadere nel vuoto, il moto del centro di massa del corpo è sempre traslatorio con accelerazione costante. Infatti la forza esterna (peso) è applicata al centro di massa rispetto al quale il suo momento è nullo; $\mathbf{L}$ è costante e tale si mantiene lungo tutta la caduta. Lo stesso naturalmente accade se il corpo rigido cade senza ruotare; in questo caso il momento angolare è nullo e tale si mantiene durante la caduta. Queste conclusioni, valide per un corpo rigido, sono verificate anche per un sistema articolato, oppure elastico, in caduta libera. Infatti accade che forze interne determinino un movimento di una parte del sistema rispetto ad un'altra ed imprimano rotazioni per conservare costante il valore di $\mathbf{L}$. Per esempio, un gatto, lasciato cadere di schiena, riesce sempre con contorsioni opportune a volgere le zampe verso il suolo in modo da rendere inoffensiva la caduta.

Come altro esempio si consideri il sistema mostrato in figura 5. Due masse m uguali, possono scorrere senza attrito lungo una guida l orizzontale e sono tenute ferme alla stessa distanza x_1 dal centro O della guida mediante un filo. Il sistema ruota con velocità angolare ω attorno all'asse verticale passante per O . Il momento angolare del sistema, supponendo trascurabile la massa della guida, è

$$L_1 = 2mx_1^2\omega_1.$$

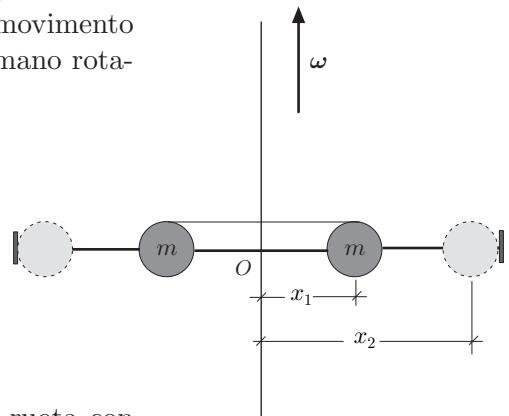


Fig. 12.5

Se il filo viene bruciato, le due masse si disporranno all'estremità della guida, dove sono predisposti due fermi; il nuovo momento angolare sarà

$$L_2 = 2mx_2^2 \omega_2.$$

Poiché il momento delle forze esterne, peso e reazione vincolare, rispetto all'asse è nullo, il momento angolare si conserva:

$$L_1 = L_2, \quad \Rightarrow \quad 2mx_1^2 \omega_1 = 2mx_2^2 \omega_2.$$

Chiamando momento d'inerzia I delle masse, rispetto all'asse, la quantità $I = 2mx^2$, si ha

$$L = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2.$$

Dunque, in corrispondenza alla posizione finale delle masse, la velocità angolare assume il valore

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = \frac{x_1^2}{x_2^2} \omega_1,$$

inferiore a quella iniziale.

È molto importante esaminare l'energia cinetica del sistema nelle due configurazioni:

$$T_1 = 2 \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} 2mx_1^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2.$$

Dalle relazioni precedenti si deduce che le energie cinetiche stanno nel rapporto

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{I_1 \omega_1^2}{I_2 \omega_2^2} = \frac{x_2^2}{x_1^2}. \quad T_1 = T_2 \frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

L'energia cinetica iniziale è maggiore di quella finale. Il risultato indicherebbe una violazione della conservazione dell'energia. Tuttavia occorre tener presente che nel riferimento ruotante le masse sono soggette alla forza centrifuga, e per spostare le masse dalla posizione x_2 alla posizione x_1 , minore, occorre compiere un lavoro $\mathcal{L}$ contro tale forza; perciò

$$\mathcal{L} = -2m \int_{x_2}^{x_1} x \omega^2(x) dx.$$

Tenuto conto che ω è funzione di x , mentre il momento angolare L è costante, conviene scrivere

$$L = 2mx^2 \omega(x), \quad \omega(x) = \frac{L}{2mx^2}.$$

Sostituendo nell'integrale precedente, si ha

$$\mathcal{L} = -\frac{L^2}{2m} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x^3} = \frac{L^2}{4m} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right) > 0.$$

D'altra parte, per mezzo delle relazioni ottenute, si verifica facilmente che la differenza tra le energie cinetiche iniziale e finale è proprio

$$T_1 - T_2 = \frac{L^2}{4m} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right);$$

dunque il bilancio energetico è soddisfatto.

È importante sottolineare due aspetti caratteristici del principio di conservazione della quantità di moto e del principio di conservazione del momento angolare. Nel primo, non è possibile far variare la velocità del centro di massa senza l'intervento di forze esterne, anche se si verificano moti interni tra le parti del sistema; nel secondo è possibile far variare la velocità angolare del sistema perché le forze interne possono modificare la distribuzione delle masse e quindi il momento di inerzia.

Lo stesso accade se ci si siede su uno sgabello, ruotante con una certa velocità angolare, con le braccia aderenti al corpo; se allarghiamo le braccia, meglio reggendo in mano due grossi libri od altro, si noterà una diminuzione sensibile della velocità angolare. In questo modo il momento d'inerzia del corpo e dei libri rispetto all'asse di rotazione è aumentato, perché parte della massa, braccia più libri, si è distribuita a distanza maggiore dall'asse. Analogamente è il caso di una ballerina ruotante attorno al proprio asse, con le braccia allineate lungo il corpo; quando essa allarga le braccia, ottiene una diminuzione della velocità angolare iniziale. Si osservi che le forze esterne agenti, peso e reazione del piano di appoggio, hanno momento nullo rispetto all'asse di rotazione.

8. Dinamica relativa dei sistemi

La dinamica relativa dei sistemi si istituisce in maniera analoga a quella del punto materiale. Per un sistema in moto rispetto ad una terna non inerziale, la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi diventa

$$\frac{d\mathbf{p}_r}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c, \quad (15)$$

dove $\mathbf{p}_r$ è la quantità di moto relativa, $\mathbf{F}$ la risultante delle forze reali esterne, $\mathbf{F}_t$ e $\mathbf{F}_c$ le risultanti delle forze apparenti. Dalla (15) si deduce che, nel movimento relativo, il centro di massa si muove come un punto dotato della massa complessiva del sistema, e soggetto alla somma delle forze reali e delle forze apparenti.

Analogamente, la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi è espressa dalla relazione:

$$\frac{d\mathbf{L}_r}{dt} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_c, \quad (16)$$

dove $\mathbf{L}_r$ è il momento angolare relativo del sistema. Il risultante

dei momenti delle forze esterne $\mathbf{M}$ e delle forze apparenti $\mathbf{M}_t$ e $\mathbf{M}_c$, sono valutati rispetto allo stesso polo, solidale col riferimento, oppure rispetto al centro di massa. Particolare rilievo hanno le seguenti grandezze.

|| 8.1. Forza centrifuga

La somma delle forze centrifughe agenti sui punti del sistema, è uguale alla forza centrifuga del centro di massa, ritenuto come un punto dotato della massa dell'intero sistema.

Dette P_i le posizioni dei punti materiali e Q_i i piedi delle perpendicolari sull'asse di rotazione della terna mobile, figura 6, la risultante delle forze centrifughe è data da

$$\omega^2 \sum_i m_i (P_i - Q_i).$$

Se C è il centro di massa e Q è il piede della sua perpendicolare sull'asse, essendo

$$P_i - Q_i = (P_i - Q) + (Q - Q_i), \quad (C - Q) = \frac{\sum_i m_i (P_i - Q)}{M},$$

risulta

$$\begin{aligned} \omega^2 \sum_i m_i (P_i - Q_i) &= \omega^2 \sum_i m_i (P_i - Q) + \omega^2 \sum_i m_i (Q - Q_i) \\ &= M\omega^2 (C - Q) + \omega^2 \sum_i m_i (Q - Q_i). \end{aligned}$$

Il secondo termine del secondo membro è parallelo all'asse, perciò non dà alcun contributo, dunque

$$\omega^2 \sum_i m_i (P_i - Q_i) = M\omega^2 (C - Q). \quad (17)$$

|| 8.2. Risultante e momento delle forze esterne, momento angolare

La risultante e il momento risultante delle forze esterne sono somma delle forze reali e delle forze apparenti. Queste ultime, per quanto si è detto, devono essere annoverate tra le forze esterne al sistema.

Il momento angolare ha espressione analoga a quella stabilita nel riferimento inerziale, purché si sostituisca la velocità relativa a quella assoluta.

|| 8.3. Energia cinetica

L'energia cinetica merita qualche considerazione in più. Poiché essa è data da una forma quadratica della velocità, ed essendo

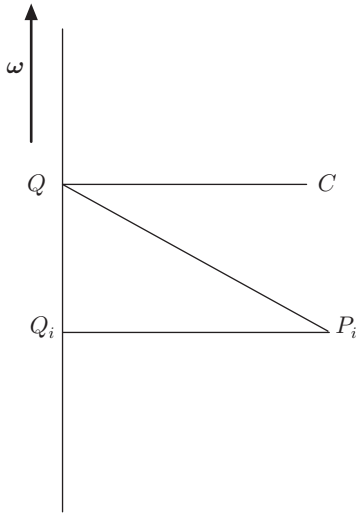


Fig. 12.6

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r$, per un punto materiale, nel riferimento assoluto, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 + m\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}_r,$$

e per il sistema:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{it}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ir}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}_{it} \cdot \mathbf{v}_{ir}, \quad (18)$$

9. Riferimento del centro di massa

Molte volte è particolarmente utile fissare una terna di riferimento con origine nel centro di massa; se in particolare, il sistema non è soggetto a forze esterne, tale terna è inerziale. Chiameremo questo riferimento: riferimento C , mentre chiameremo L il riferimento inerziale del laboratorio, rispetto al quale C si muove con velocità $\mathbf{v}_C$.

9.1. Quantità di moto

La quantità di moto di un sistema nel riferimento C è sempre nulla; ciò si può verificare agevolmente per un sistema costituito da due particelle. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ le velocità delle due particelle nel riferimento L ; la velocità del centro di massa è data da

$$\mathbf{v}_C = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Le velocità di ciascuna particella nel riferimento C sono

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1C} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{v}_{2C} &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_2 - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Con $\mathbf{v}_{12}$ si è indicata la velocità relativa delle due particelle. Per la quantità di moto si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{1C} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12} = \mu \mathbf{v}_{12} \\ \mathbf{p}_{2C} &= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12} = -\mu \mathbf{v}_{12}, \end{aligned} \quad (19)$$

la cui somma è nulla. Con μ si è indicata la massa ridotta del sistema, definita da

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

La massa ridotta è sempre inferiore sia a m_1 che a m_2 . Poiché si può scrivere

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} = m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1},$$

se $m_1 \ll m_2$, si ha

$$\mu \approx m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \approx m_1.$$

9.2. Momento angolare

Consideriamo un sistema di particelle in un riferimento inerziale la cui origine O coincida con il polo, figura 7. Il momento angolare della generica particella è

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Indichiamo con $\mathbf{r}_C$, $\mathbf{v}_C$, posizione e velocità del centro di massa e con $\mathbf{r}_{iC}$, $\mathbf{v}_{iC}$, posizione e velocità della particella di indice i rispetto al centro di massa. Poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{iC} \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}, \end{aligned}$$

il momento angolare della particella si scrive

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i &= (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{iC}) \times m_i(\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}) \\ &= \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_{iC} + \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_{iC}. \end{aligned}$$

Il momento angolare del sistema risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C + \sum_i \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_{iC} \\ &\quad + \sum_i \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_C + \sum_i \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_{iC}. \end{aligned}$$

La prima somma è uguale a $\mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C$, dove M è la massa totale del sistema, la seconda somma è nulla perché è il prodotto vettoriale tra $\mathbf{r}_C$ e la quantità di moto del sistema nel riferimento del centro di massa, riferimento a quantità di moto nulla. Infine, la terza somma è uguale a zero in quanto $\sum_i m_i \mathbf{r}_{iC} = 0$, per analogo motivo.

In definitiva si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C + \mathbf{L}_C, \quad (20)$$

avendo indicato con

$$\mathbf{L}_C = \sum_i \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_{iC},$$

il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa.

Si conclude che il momento angolare di un sistema rispetto ad un polo fisso O , descrive il moto del centro di massa intorno ad O ed il moto del sistema intorno al centro di massa. Derivando

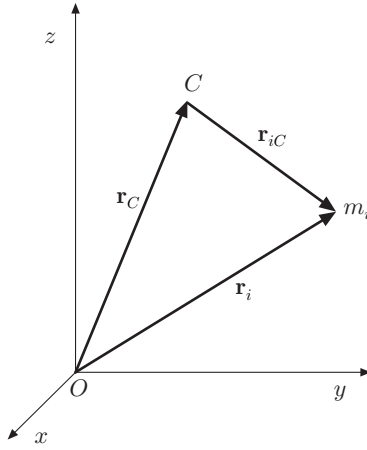


Fig. 12.7

la (20) rispetto al tempo si ha

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \times M\mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \\ &= \mathbf{r}_C \times M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_C}{dt},\end{aligned}$$

essendo nullo il primo termine del secondo membro. La precedente si può anche scrivere:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_C, \quad (21)$$

essendo $\mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$ e $\mathbf{M}_C$, rispettivamente il momento della risultante delle forze esterne rispetto ad O ed il risultante dei momenti delle forze esterne rispetto al centro di massa.

Se i momenti vengono presi rispetto al centro di massa ovviamente si ha

$$\mathbf{M}_C = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt}. \quad (22)$$

Si noti che la (22) è formalmente analoga alla (12), ma ne differisce perché il centro di massa è mobile.

|| 9.3. Energia cinetica di un sistema

L'energia cinetica di un sistema, in un riferimento comunque mobile rispetto a quello assoluto, è espressa dalla (18). Se il riferimento mobile è solidale col centro di massa, si può stabilire il seguente teorema di König.

L'energia cinetica di un sistema nel riferimento L è pari alla somma dell'energia cinetica del centro di massa, dove si ritiene localizzata l'intera massa del sistema, e dell'energia cinetica del sistema nel riferimento C .

L'energia cinetica del sistema nel riferimento del laboratorio è data da

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2.$$

Ma la velocità della generica particella è $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}$, pertanto si può scrivere

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}) \cdot (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_C^2 + \mathbf{v}_C \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_{iC} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{iC}^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{iC}^2,\end{aligned}$$

essendo $\sum_i m_i \mathbf{v}_{iC} = 0$, poiché il riferimento C è un riferimento a quantità di moto nulla. Infine:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_C. \quad (23)$$

Consideriamo, nel riferimento L , due particelle con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. L'energia cinetica del sistema è $(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)/2$. Nel riferimento C si ha

$$\begin{aligned} T_C &= T - \frac{1}{2} M v_C^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^2 + v_2^2 - 2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

L'energia cinetica delle particelle, nel riferimento C , è uguale all'energia cinetica di una particella di massa ridotta μ e velocità uguale alla velocità relativa.

Complementi ed esempi

- ||| 6. *Momento angolare di due particelle rispetto al loro centro di massa.*
Il momento angolare delle particelle rispetto al centro di massa è

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_{1C} \times \mathbf{p}_{1C} + \mathbf{r}_{2C} \times \mathbf{p}_{2C}.$$

Poiché

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

le posizioni delle particelle rispetto al centro di massa sono

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1C} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r}_{2C} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Ricordando le equazioni (19),

$$\mathbf{p}_{1C} = \mu \mathbf{v}_{12}, \quad \mathbf{p}_{2C} = -\mu \mathbf{v}_{12},$$

si ottiene:

$$\mathbf{L}_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12} = \mu \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}. \quad (23)$$

Il momento angolare di due particelle rispetto al centro di massa si può esprimere come il momento angolare di una particella di massa ridotta μ , quantità di moto $\mu \mathbf{v}_{12}$ e vettore posizione $\mathbf{r}_{12}$. Viceversa si può anche esprimere come il momento angolare di una particella con quantità di moto $\mu \mathbf{v}_{21}$ e vettore posizione $\mathbf{r}_{21}$. La verifica di quest'ultimo asserto è immediata. Questo risultato è molto importante perché mostra che il momento angolare rispetto al centro di massa è indipendente dalla posizione di quest'ultimo. Però il vero centro di rotazione è il centro di massa. A riprova si può verificare che la (23) coincide effettivamente con quella di definizione; infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_C &= \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}_{1C} \times \mu \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{v}_{1C} \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}_{1C} \times m_1 \mathbf{v}_{1C} = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \mathbf{r}_{1C} \times m_1 \mathbf{v}_{1C} \\ &= \frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}_{1C} \times m_1 \mathbf{v}_{1C} + \mathbf{r}_{1C} \times m_1 \mathbf{v}_{1C}; \end{aligned}$$

ma nel riferimento del centro di massa è

$$m_1 \mathbf{r}_{1C} + m_2 \mathbf{r}_{2C} = 0, \quad m_1 \mathbf{v}_{1C} + m_2 \mathbf{v}_{2C} = 0;$$

da cui

$$\mathbf{r}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_{2C}, \quad \mathbf{v}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_{2C};$$

sostituendo si ha:

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_{1C} \times m_1\mathbf{v}_{1C} + \mathbf{r}_{2C} \times m_2\mathbf{v}_{2C}.$$

Se il sistema è isolato, derivando la (23) rispetto al tempo, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mu \frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} \times \mathbf{v}_{12} + \mu \mathbf{r}_{12} \times \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = 0; \quad (26)$$

infatti i due termini esprimono prodotti vettoriali tra vettori paralleli. Il momento angolare si conserva.

III 7. *Problema dei due corpi; particelle soggette a mutua interazione.*

Le forze di interazione sono forze interne opposte, $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$. Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi suggeriscono:

- a) il centro di massa del sistema sta fermo oppure si muove di moto rettilineo uniforme;
- b) il momento angolare del sistema è costante.

Le equazioni della dinamica rispetto ad un osservatore assoluto sono

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{f}_{12}, \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{f}_{21}.$$

Sommando si ha

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} = 0.$$

Questa relazione esprime la conservazione della quantità di moto. Inoltre si può scrivere

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{f}_{12}}{m_1}, \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{f}_{21}}{m_2};$$

sottraendo si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \frac{\mathbf{f}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{f}_{21}}{m_2}, \\ \frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{f}_{12}, \end{aligned}$$

ovvero:

$$\frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \frac{1}{\mu} \mathbf{f}_{12}, \quad \mathbf{f}_{12} = \mu \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \mu \mathbf{a}_{12}, \quad (27)$$

in cui $\mathbf{v}_{12}$, μ , $\mathbf{a}_{12}$ sono rispettivamente, la velocità relativa, la massa ridotta e l'accelerazione relativa.

Si può dunque concludere che la (27) esprime la seconda equazione della dinamica relativa per due particelle. Discende che il moto di una particella rispetto all'altra, e viceversa, è equivalente al moto di una particella di massa ridotta, accelerazione uguale all'accelerazione relativa e soggetta alla forza di mutua interazione.

La (27) esprime anche la seconda equazione della dinamica nel riferimento del centro di massa. Infatti si è trovato che la velocità $\mathbf{v}_{12}$ è legata alla velocità relativa al centro di massa, dalla relazione

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{m_1}{\mu} \mathbf{v}_{1C};$$

sostituendo nella (27) si ottiene

$$\mathbf{f}_{12} = m_1 \frac{d\mathbf{v}_{1C}}{dt} = m_1 \mathbf{a}_{1C}, \quad (28)$$

dove $\mathbf{a}_{1C}$ è l'accelerazione rispetto al centro di massa. Lo stesso ragionamento vale per la seconda particella.

||| 8. *Vibrazione di una molecola biatomica.*

Una molecola biatomica è costituita da due atomi di masse m_1, m_2 , la cui energia potenziale di interazione $U(r)$, può essere descritta con buona approssimazione, in funzione della mutua distanza r , dal potenziale di Lennard-Jones, paragrafo 7.1-VII. Gli atomi possono vibrare attorno alla posizione di equilibrio, coincidente col minimo dell'energia potenziale e se le oscillazioni sono di piccola ampiezza, l'energia potenziale d'interazione è armonica. In tal caso la molecola può essere schematizzata da due masse collegate agli estremi di una molla di costante elastica k . Il moto degli atomi va studiato rispetto al centro di massa del sistema che, per semplicità, si suppone in quiete. Dette r_1 e r_2 le distanze degli atomi dal centro di massa ed r la loro distanza, si ha

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad r_1 + r_2 = r.$$

che combinate danno

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 = \frac{m_1 m_2}{M_1 + m_2} = \mu r,$$

dove μ è la massa ridotta. Pertanto le equazioni della dinamica degli atomi considerati:

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -\frac{dU}{dr}, \quad m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -\frac{dU}{dr},$$

vengono espresse dall'unica equazione

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU}{dr},$$

relativa ad una particella di massa μ e coordinata r . Sviluppando l'energia potenziale in serie di potenze intorno al minimo, si ha

$$U = -U_0 + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + \dots,$$

dove $k/2$ denota il coefficiente del termine quadratico. Se le oscillazioni sono di piccola ampiezza è lecito trascurare i termini di ordine superiore, quindi si può scrivere:

$$\mu \frac{d^2 (r - r_0)}{dt^2} = -k (r - r_0).$$

Le oscillazioni sono armoniche, con frequenza

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

||| 9. *Interazione gravitazionale; moto di una stella doppia.*

Una stella doppia è costituita da due stelle di masse confrontabili che ruotano attorno al loro centro di massa. Evidentemente la velocità angolare delle stelle è la stessa. In figura 8 è mostrato il moto rispetto al centro di massa della stella Sirio, che ha come compagna una stella nana bianca, e il moto apparente della nana bianca rispetto a Sirio. L'equazione della dinamica del sistema è la (27),

$$\mathbf{f}_{12} = \mu \mathbf{a}_{12}.$$

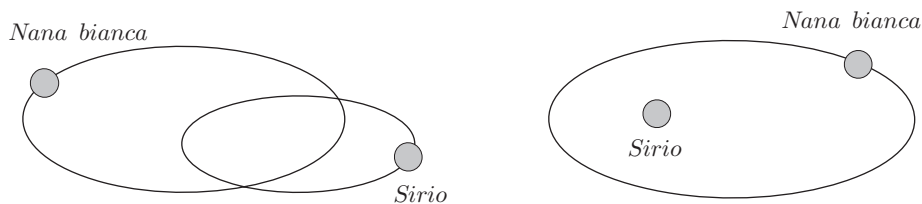


Fig. 12.8

Assumendo l'origine del riferimento in m_2 , come se fosse l'origine fissa di un riferimento assoluto, si ha

$$f_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} = \mu a_{12},$$

da cui

$$a_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^2}. \quad (29)$$

Il problema gravitazionale va risolto esattamente come esposto al paragrafo 2-X.

Possiamo usare l'equazione (28):

$$\mathbf{f}_{12} = m_1 \mathbf{a}_{1C},$$

dove

$$a_{1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a_{12}.$$

Pertanto

$$f_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_{12},$$

da cui si trae

$$a_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^2},$$

come prima.

Si ottengono inoltre le seguenti relazioni alternative. Nel riferimento del centro di massa è

$$m_1 \mathbf{r}_{1C} + m_2 \mathbf{r}_{2C} = 0, \quad \Rightarrow \quad m_1 r_{1C} = m_2 r_{2C},$$

ed essendo $r_{12} = r_{1C} + r_{2C}$, la (29) diventa

$$a_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{(r_{1C} + r_{2C})^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{(r_{1C} + r_{1C} m_1 / m_2)^2} = -G \frac{m_2^2}{r_{1C}^2 (m_1 + m_2)}.$$

Oppure,

$$a_{12} = -G \frac{m_1^2}{r_{2C}^2 (m_1 + m_2)}.$$

Supponendo che le orbite delle due stelle siano pressoché circolari e note le velocità orbitali, v_1, v_2 ; si possono ricavare le masse m_1, m_2 . Si ha

$$a_{1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a_{12} = -G \frac{m_2}{(r_{1C} + r_{2C})^2}.$$

Poiché le velocità areolari sono

$$\frac{\pi r_{1C}^2}{T} = \frac{1}{2} r_{1C} v_{1C}, \quad \frac{\pi r_{2C}^2}{T} = \frac{1}{2} r_{2C} v_{2C}, \quad (30)$$

sommando si ha

$$r_{1C} + r_{2C} = \frac{1}{\omega} (v_{1C} + v_{2C}).$$

Essendo le orbite circolari, l'accelerazione gravitazionale è uguale all'accelerazione centripeta:

$$a_{1C} = \omega^2 r_{1C}, \quad G \frac{m_2}{(r_{1C} + r_{2C})^2} = \omega^2 r_{1C}.$$

Tenendo conto delle (30), si ricava

$$m_2 = \frac{1}{\omega} \frac{v_{1C} (v_{1C} + v_{2C})^2}{G}.$$

Analogamente per l'altra massa.

.....

10. Lavoro ed energia cinetica

Consideriamo, per semplicità, un sistema costituito da due particelle, soggette a forze interne $\mathbf{f}_{12}$, $\mathbf{f}_{21}$, e a forze esterne $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$. Il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro di *tutte* le forze è uguale alla variazione dell'energia cinetica del sistema. Se per semplicità, poniamo l'energia cinetica iniziale pari a zero, si ha

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2.$$

L'energia cinetica è data dal contributo del lavoro delle forze interne e del lavoro delle forze esterne; possiamo dunque scrivere

$$T = \mathcal{L}^{(e)} + \mathcal{L}^{(i)},$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(e)} &= \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2) \\ \mathcal{L}^{(i)} &= \int_A^B (\mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2).\end{aligned}$$

Gli estremi d'integrazione A e B indicano le configurazioni iniziale e finale del sistema.

Essendo $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$, si ha

$$\mathcal{L}^{(i)} = \int_A^B \mathbf{f}_{12} \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int_A^B \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}.$$

Il lavoro delle forze interne dipende dallo spostamento relativo delle particelle; dunque è indipendente dal riferimento.

Inoltre, poiché le forze interne, in assenza di fenomeni dissipativi, sono conservative, si ha

$$\int_A^B \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = U_A^{(i)} - U_B^{(i)}.$$

Queste considerazioni si possono estendere facilmente ad un sistema di n particelle. Si ha

$$\mathcal{L}^{(i)} = \int_A^B \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij},$$

per $(i, j = 1, \dots, n)$ ed inoltre

$$\int_A^B \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = U_A^{(i)} - U_B^{(i)}.$$

Le relazioni precedenti mostrano ancora che la variazione di energia potenziale interna dipende dalla distanza relativa tra le particelle ed è quindi indipendente dal riferimento. Pertanto, essendo

$$T_B - T_A = \mathcal{L}^{(e)} + U_A^{(i)} - U_B^{(i)},$$

si ottiene

$$\mathcal{L}^{(e)} = (T_B + U_B^{(i)}) - (T_A + U_A^{(i)}). \quad (31)$$

La quantità

$$E_P = T + U^{(i)}, \quad (32)$$

è chiamata *energia propria* del sistema. Possiamo dunque scrivere

$$\mathcal{L}^{(e)} = \Delta E_P.$$

Il lavoro delle forze esterne è uguale alla variazione dell'energia propria del sistema.

Se il sistema è isolato, ossia non è soggetto a forze esterne, si ha

$$\Delta E_P = 0; \quad E_P = \text{cost.}$$

L'energia propria del sistema resta costante.

Nel caso in cui le forze esterne siano conservative, si ha

$$\mathcal{L}^{(e)} = U_A^{(e)} - U_B^{(e)},$$

pertanto:

$$T_A + U_A^{(i)} + U_A^{(e)} = T_B + U_B^{(i)} + U_B^{(e)},$$

che esprime la conservazione dell'energia meccanica totale.

Si osservi che, come le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi esprimono l'interazione del sistema con l'esterno, la (31) esprime la stessa interazione per mezzo della variazione dell'energia propria del sistema. Le forze interne non modificano tale energia anche se possono modificarne l'energia cinetica come conseguenza di una variazione dell'energia potenziale interna e viceversa. Se il sistema è isolato, come s'è visto, l'energia propria rimane costante. Questo costituisce il principio di conservazione dell'energia che ha validità generale, come il principio di conservazione della quantità di moto, di cui ne è conseguenza, e come il principio di conservazione del momento angolare. Tali principi regolano i fenomeni naturali nella loro totalità.

Se, per esempio, due sistemi S_1 ed S_2 , nel loro insieme isolati, interagiscono tra loro, tale interazione può essere espressa per mezzo del lavoro che ciascun sistema compie sull'altro, cioè mediante le variazioni dell'energia propria ΔE_{P_1} e ΔE_{P_2} . Poichè l'insieme dei due sistemi è isolato, la conservazione dell'energia richiede che $E_{P_1} + E_{P_2}$ risulti costante, dunque:

$$\Delta E_{P_1} = -\Delta E_{P_2}.$$

In altri termini si è ottenuto uno scambio di energia tra i due sistemi.

Consideriamo due masse unite da una molla ideale, soggette all'azione della gravità; l'energia propria del sistema è data da

$$E_P = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

dove con x si è indicata la deformazione della molla. Se sul sistema non agiscono forze esterne l'energia propria rimane costante; quando agisce la forza esterna di gravità, conservativa, anche l'energia totale si mantiene costante durante il moto, cioè

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 + m_1gy_1 + m_2gy_2,$$

dove con y si è indicata la quota delle masse. Va sottolineato che l'energia cinetica di un sistema dipende dal riferimento e che, in particolare, vale il teorema di König, mentre l'energia potenziale interna dipende solo dalla mutua distanza tra le particelle ed ha lo stesso valore qualunque sia il riferimento. Se dunque consideriamo il riferimento del centro di massa, possiamo definire energia interna del sistema la quantità

$$E_i = T_C + U^{(i)}.$$

Il termine di energia potenziale, nell'espressione precedente, può comprendere altre forme di energia. Infatti lo stato di un sistema può essere definito non solo dalle coordinate geometriche di posizione o di configurazione, come nel caso dell'energia potenziale, ma da altre grandezze come gli sforzi interni, la densità, la pressione e da grandezze elettromagnetiche (intensità di polarizzazione, intensità di magnetizzazione ecc...). Per esempio, l'energia interna di un corpo deformabile continuo dipende dal tensore degli sforzi e dal tensore delle deformazioni in ogni punto e, più semplicemente, nel caso di un fluido, dalla pressione, dalla densità e dalla temperatura. In questi casi il termine di energia cinetica è certamente trascurabile. In generale possiamo denominare le varie forme di energia elencate col termine *energia interna*. In definitiva l'interazione del sistema con l'esterno determina una variazione della sua energia interna nelle varie forme descritte. Va notato inoltre che si è usato il termine interazione; ciò comporta evidentemente il caso di lavoro eseguito dal sistema verso l'esterno, ora, a spese della sua energia interna. Questi concetti costituiscono il fondamento per l'enunciazione della prima legge della Termodinamica.

11. Urti

Si verifica un urto tra particelle, se esse interagendo e non pervenendo necessariamente a contatto, scambiano tra loro quantità di moto ed energia in un intervallo di tempo molto breve. Prenderemo in esame urti binari, ossia urti tra due particelle

Ricordando le considerazioni svolte al paragrafo 1-IX, possiamo trascurare, durante l'intervallo di tempo in cui avviene l'interazione, l'impulso delle forze esterne e considerare il sistema

come isolato. Si ha conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Si può pertanto trascurare il contributo delle forze esterne al moto delle particelle. Una palla da tennis, nell'intervallo di tempo durante il quale è a contatto con la racchetta, circa $10^{-3} s$, è soggetta ad una forza media di $\approx 2 \cdot 10^3 N$; forza molto maggiore di qualsiasi altra, gravità, attrito ecc... Per esempio, si può stimare che, a causa della gravità, nell'intervallo di tempo considerato, la palla si sposta di qualche frazione di millimetro, distanza senz'altro trascurabile rispetto alla gittata, che è di alcune decine di metri.

Consideriamo l'urto che si verifica tra due sfere rigide allorché vengono a contatto; essendo il sistema isolato, si conserva la quantità di moto e l'energia propria; indicando con gli apici le grandezze dopo l'urto, per la quantità di moto si ha

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2,$$

e per l'energia propria

$$T + U = T' + U';$$

in cui

$$T = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2},$$

prima dell'urto, e

$$T' = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2},$$

dopo l'urto.

Indichiamo con Q la quantità:

$$Q = T' - T = U - U', \quad (33)$$

che rappresenta l'energia dissipata durante l'urto. Se $Q = 0$, non si ha variazione di energia cinetica; la collisione si dice *elastica*. Se $Q \neq 0$ la collisione si dice *anelastica*. In particolare per $Q < 0$, dopo l'urto si ha una diminuzione di energia cinetica e un aumento dell'energia potenziale interna. Per $Q > 0$, si ha un aumento dell'energia cinetica a spese dell'energia potenziale interna. Questi ultimi due casi sono molto importanti in certe collisioni nucleari e si indicano rispettivamente come urto endotermico e urto esotermico.

In generale si scrive

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + Q = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}. \quad (34)$$

In certe reazioni nucleari si può anche verificare che le masse delle particelle, dopo l'urto, siano diverse dalle masse iniziali; non considereremo tale eventualità.

Nel riferimento del centro di massa la quantità di moto del sistema è nulla prima e dopo l'urto:

$$\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} = 0, \quad \mathbf{p}'_{1C} + \mathbf{p}'_{2C} = 0,$$

dunque la (34) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_{1C}^2 + Q &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_{1C}'^2, \\ \frac{1}{2\mu} p_{1C}^2 + Q &= \frac{1}{2\mu} p_{1C}'^2, \end{aligned} \quad (35)$$

Si noti che Q , essendo definito anche come variazione dell'energia potenziale interna, equazione (33), è indipendente dal riferimento.

Se l'urto è elastico, $Q = 0$, si deduce

$$p_{1C}^2 = p_{1C}'^2, \quad p_{2C}^2 = p_{2C}'^2.$$

Quindi

$$p_{1C} = p_{1C}', \quad p_{2C} = p_{2C}'. \quad (36)$$

11.1. Parametro d'urto

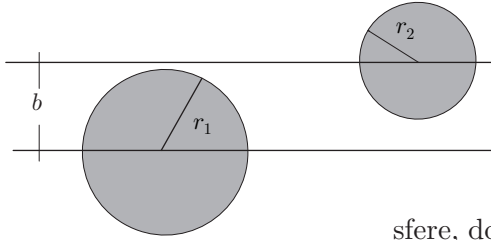


Fig. 12.9

Consideriamo due sfere rigide che collidono e supponiamo che le rette d'azione delle velocità iniziali siano parallele. La distanza b tra tali rette definisce il parametro d'urto, figura 9. Se $b = 0$, l'urto è centrale ed il moto, dopo l'urto, si svolge lungo la congiungente i centri delle sfere. Se il parametro d'urto è diverso da zero ed è $b < (r_1 + r_2)$, con r_1 e r_2 raggi delle sfere, dopo l'urto le traiettorie risultano deviate; urto obliquo. Se $b > (r_1 + r_2)$, nell'ipotesi di sfere rigide, non si ha urto. Nelle collisioni tra particelle nucleari, a causa dell'interazione tra i campi coulombiani e nucleari, si può verificare scambio di energia e quantità di moto anche se le traiettorie iniziali hanno distanza maggiore della somma delle dimensioni geometriche delle particelle, supponendo che queste possano essere definite classicamente.

12. Urto centrale elastico

Consideriamo l'urto centrale elastico nel riferimento L . Indichiamo con v e V le velocità prima e dopo l'urto; per la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica, si ha

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Assegnate le masse e le velocità prima dell'urto, il sistema di equazioni fornisce le velocità dopo l'urto. Poiché si ha

$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2), \quad m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2),$$

dividendo membro a membro:

$$\frac{v_1 - V_1}{v_1^2 - V_1^2} = \frac{V_2 - v_2}{V_2^2 - v_2^2}, \quad \Rightarrow \quad v_1 + V_1 = v_2 + V_2. \quad (38)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ V_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \end{aligned} \quad (39)$$

CASI PARTICOLARI

- $m_1 = m_2$; le (39) danno

$$V_1 = v_2, \quad V_2 = v_1.$$

Dopo l'urto, le velocità delle particelle risultano scambiate.

- $m_1 = m_2$, $v_2 = 0$; risulta:

$$V_1 = 0, \quad V_2 = v_1.$$

La particella urtante si arresta e la particella urtata assume la velocità della prima.

- $m_2 \gg m_1$; essendo m_1/m_2 trascurabile, si deduce:

$$V_1 \approx -v_1 + 2v_2, \quad V_2 = v_2.$$

La seconda particella, in pratica, non subisce variazione di velocità. Se, in particolare, $v_2 = 0$, la particella incidente viene riflessa con la stessa velocità iniziale e la particella urtata resta ferma. È il caso di una particella incidente ortogonalmente ad una parete.

- $m_1 \gg m_2$; essendo ora trascurabile m_2/m_1 si ha

$$V_1 \approx v_1, \quad V_2 \approx 2v_1 - v_2,$$

e se, in particolare, $v_2 = 0$ è

$$V_1 \approx v_1, \quad V_2 \approx 2v_1.$$

È il caso della boccia che colpisce il boccino; essa in pratica non subisce variazione di velocità, mentre il boccino assume velocità doppia della boccia incidente.

Nel riferimento C la descrizione è più semplice; la quantità di moto del sistema, prima e dopo l'urto, è nulla:

$$\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} = 0, \quad \mathbf{p}'_{1C} + \mathbf{p}'_{2C} = 0.$$

Essendo l'urto elastico, l'energia cinetica si conserva, $Q = 0$, e per la (36) si deduce

$$\mathbf{V}_{1C} = -\mathbf{v}_{1C}, \quad \mathbf{V}_{2C} = -\mathbf{v}_{2C}.$$

Nel riferimento C , dopo l'urto, le particelle invertono il moto e si allontanano con la velocità e l'energia cinetica possedute prima

dell'urto. Si ha una variazione del vettore quantità di moto di ciascuna particella, mentre i moduli delle quantità di moto e le energie cinetiche, prima e dopo l'urto, sono gli stessi.

|| 12.1. Urto centrale anelastico; coefficiente di restituzione

Nell'urto centrale tra sfere rigide, in realtà si osserva che l'energia cinetica del sistema dopo l'urto, è sempre minore dell'energia cinetica iniziale. Facendo cadere una pallina d'acciaio su una superficie rigida, le altezze dei successivi rimbalzi diminuiscono progressivamente. Ciò significa che una parte dell'energia propria, energia elastica interna, è stata dissipata in altre forme di energia: calore, suono, ecc..., espresse dal fattore Q .

Poichè dalle (37) si ha

$$V_1 - V_2 = v_2 - v_1, \quad \Rightarrow \quad V_{12} = -v_{12},$$

si deduce che le velocità relative, prima e dopo l'urto sono opposte. Se l'urto non è elastico, possiamo introdurre un coefficiente di restituzione e , tale che

$$V_{12} = -e v_{12},$$

con $0 < e < 1$, dove il valore 1 compete all'urto elastico.

Con procedimento analogo a quello che conduce alle (39), si trova facilmente che le velocità dopo l'urto sono date da

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\mu}{m_2}(1 - e m_2/m_1)v_1 + \frac{\mu}{m_1}(1 + e)v_2 \\ V_2 &= \frac{\mu}{m_2}(1 + e)v_1 + \frac{\mu}{m_1}(1 - e m_1/m_2)v_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Per quanto riguarda l'energia dissipata, espressa da Q , ricordiamo che questa grandezza è indipendente dal riferimento, perciò dalla (35), si ha

$$Q = \frac{1}{2\mu}(p'_{1C}{}^2 - p_{1C}^2),$$

ed, essendo

$$p_{1C} = \mu v_{12}, \quad p'_{1C} = \mu V_{12} = -e \mu v_{12},$$

si ottiene

$$Q = \frac{1}{2}\mu(e^2 - 1)v_{12}^2. \quad (41)$$

Per un dato valore del coefficiente di restituzione, Q dipende dalla velocità relativa prima dell'urto.

12.2. Urto centrale completamente anelastico

Se l'urto è completamente anelastico, nel senso che le particelle dopo l'urto restano unite, $e = 0$, la conservazione della quantità di moto è espressa da

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V,$$

da cui si ottiene la velocità dopo l'urto:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v_C.$$

In tali condizioni, Q è dato da

$$Q = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) V^2 - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)].$$

Si trova immediatamente

$$Q = -\frac{1}{2} \mu v_{12}^2.$$

Esempi tipici sono: le collisioni tra due corpi plastici: dopo l'urto i corpi procedono insieme; il pendolo balistico; in fisica nucleare, le reazioni di cattura: un neutrone può essere assorbito da un atomo di idrogeno, formando un atomo di deuterio. In questi casi $Q < 0$; si ha aumento dell'energia potenziale interna, perché il sistema ha assorbito energia.

12.3. Urto obliquo elastico

Consideriamo l'urto che avviene tra una particella di massa m_1 incidente con velocità v_1 , su una particella di massa m_2 , in quiete, $v_2 = 0$. Questo è il caso che si verifica più frequentemente in fisica nucleare, dove fasci di particelle vengono fatte incidere su particelle bersaglio in quiete.

RIFERIMENTO DEL LABORATORIO

Quantità di moto $m_1 \mathbf{v}_1$ ed energia cinetica $(m_1 v_1^2)/2$ del sistema sono costanti:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}_1 &= m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Dopo l'urto, le particelle vengono deviate, rispetto alla direzione della particella incidente, di angoli θ e φ . In figura 10 è mostrato il diagramma delle velocità prima e dopo l'urto.

Proiettando la (42) su due assi, uno parallelo alla direzione della particella incidente e l'altro ortogonale, si ha

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 V_1 \cos \theta + m_2 V_2 \cos \varphi \\ 0 &= m_1 V_1 \sin \theta - m_2 V_2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

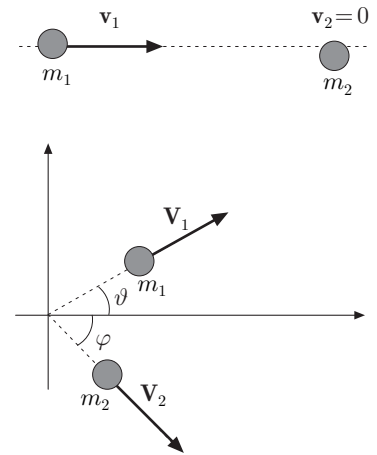


Fig. 12.10

Queste due equazioni scalari, insieme all'equazione di conservazione dell'energia cinetica, assegnate le masse e la velocità iniziale della particella 1, non sono sufficienti a determinare le quattro componenti delle velocità dopo l'urto. Occorre conoscere una delle grandezze coinvolte nel processo; per esempio uno degli angoli di deviazione; misurabile sperimentalmente. La velocità del centro di massa resta immutata, prima e dopo l'urto, ed è data da

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_C, \quad v_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{\mu}{m_2} v_1.$$

RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Nel riferimento C la quantità di moto del sistema è nulla, prima e dopo l'urto; dunque le particelle si muovono in direzioni opposte, figura 11. Si ha:

$$m_1 \mathbf{v}_{1C} + m_2 \mathbf{v}_{2C} = 0, \quad m_1 \mathbf{V}_{1C} + m_2 \mathbf{V}_{2C} = 0.$$

Scalarmente,

$$m_1 v_{1C} = m_2 v_{2C}, \quad m_1 V_{1C} = m_2 V_{2C}; \quad (43)$$

Ma, per l'equazione (36), nel riferimento C i moduli della quantità di moto di ciascuna particella sono uguali:

$$p_{1C} = p'_{1C}, \quad p_{2C} = p'_{2C},$$

pertanto

$$v_{1C} = V_{1C}; \quad v_{2C} = V_{2C}.$$

Ne segue che, per la seconda delle (43), si ha

$$\frac{V_{2C}}{V_{1C}} = \frac{v_{2C}}{v_{1C}} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Tenuto conto di queste relazioni, è possibile dedurre il legame tra gli angoli di deflessione Θ e Φ del riferimento C e gli angoli θ e φ del riferimento L . Dalla figura 12 si riconosce che il triangolo ABC è isoscele, $V_{2C} = v_C$, quindi:

$$\Phi = \pi - \Theta = 2\varphi, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\pi - \Theta).$$

Inoltre:

$$\frac{V_{1C}}{\sin \theta} = \frac{v_C}{\sin(\Theta - \theta)}, \quad \frac{\sin \Theta}{\tan \theta} - \cos \Theta = \frac{v_C}{V_{1C}} = \frac{m_1}{m_2},$$

da cui:

$$\tan \theta = \frac{\sin \Theta}{m_1/m_2 + \cos \Theta}. \quad (44)$$

ENERGIA CINETICA

L'energia cinetica nel riferimento L è semplicemente $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$; nel riferimento C , per il teorema di König, si ha

$$T_C = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_C^2 = \frac{1}{2} \mu v_1^2.$$

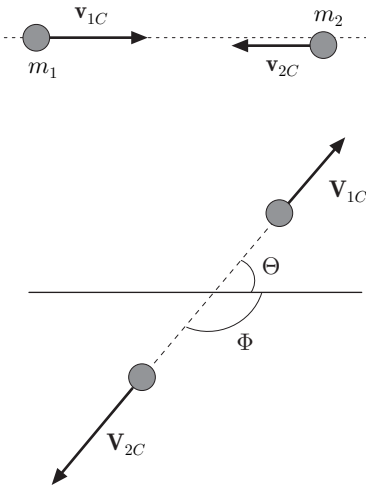


Fig. 12.11

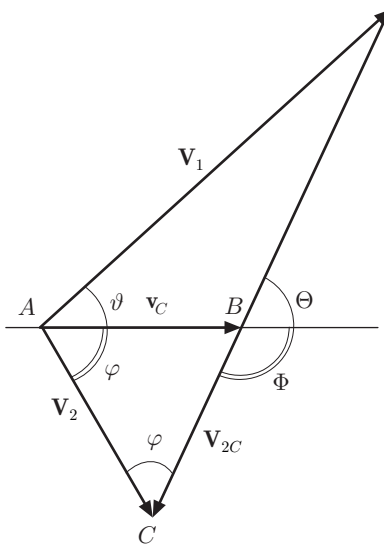
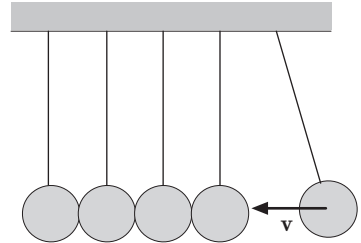


Fig. 12.12

Complementi ed esempi

||| 10. Collisione centrale elastica tra sfere rigide di uguale massa.

Si consideri un certo numero di sfere di acciaio identiche, sospese ad un supporto come mostrato in figura 13. Questo sistema viene chiamato “culla di Newton” e si può trovare nei negozi di giocattoli. Le sfere sono a contatto; se una delle sfere di un estremo della fila viene spostata dalla posizione di equilibrio e quindi abbandonata, urtando contro quelle in quiete si ferma e l'ultima, all'altro estremo, assume la velocità della sfera incidente mentre le altre restano ferme. L'ultima sfera, a sua volta, ritornando contro le altre, si arresta e la prima si muove in verso opposto. Il processo, se non fossero presenti inevitabili dissipazioni di energia, continuerebbe indefinitamente. Se si spostano contemporaneamente due sfere e quindi vengono abbandonate, le ultime due assumono la velocità di quelle incidenti e così via. Questo comportamento si spiega facilmente ricordando le conclusioni sull'urto tra due sfere identiche di cui una ferma; le sfere intermedie praticamente restano in quiete, perché gli urti avvengono in tempi dell'ordine di grandezza di 0,001 s.

||| 11. Urto obliquo elastico di una particella contro una parete piana, $m_2 = \infty$.
Per la conservazione della quantità di moto, figura, è

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2.$$

La parete, che supponiamo liscia e perfettamente elastica, assorbe la quantità di moto $\mathbf{p}'_2$, che restituisce integralmente; vale cioè la relazione

$$\mathbf{p}_1 + (-\mathbf{p}'_2) = \mathbf{p}'_1.$$

I diagrammi vettoriali sono mostrati in figura 14; il moto si svolge nel piano individuato dai vettori quantità di moto, prima e dopo la collisione.

Fissiamo un riferimento cartesiano e la normale $\hat{\mathbf{n}}$ alla parete, come in figura 15. Siano v_x, v_y le componenti della velocità prima dell'urto, V_x, V_y le componenti dopo l'urto; è manifestamente

$$v_x = -V_x, \quad v_y = V_y.$$

Dunque la velocità $\mathbf{V}$, dopo l'urto, appartiene al piano $\mathbf{v}-\hat{\mathbf{n}}$, *piano di incidenza*. Indicando con i l'angolo di incidenza e con r l'angolo di riflessione, si ha

$$\tan i = \left| \frac{v_y}{v_x} \right|, \quad \tan r = \left| \frac{V_y}{V_x} \right| = \left| \frac{v_y}{-v_x} \right|;$$

l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

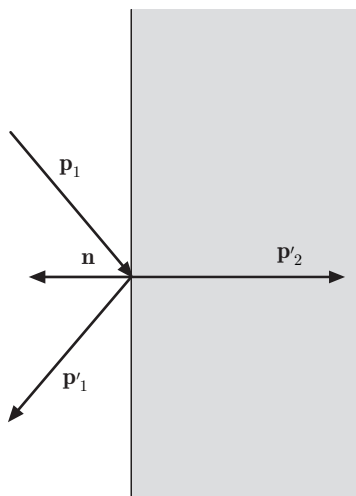


Fig. 12.14

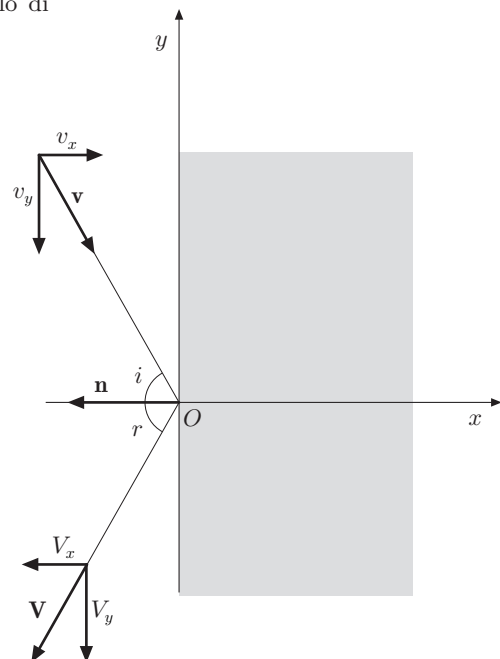


Fig. 12.15

||| 12. *Pressione prodotta dall'urto.*

La quantità di moto $\mathbf{p}_1$ ha componenti

$$m_1 v_x, \quad m_1 v_y.$$

Dopo l'urto, $\mathbf{p}'_1$ ha componenti

$$-m_1 v_x, \quad m_1 v_y,$$

La variazione di quantità di moto è dunque

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -2m_1 v_x \mathbf{i},$$

ortogonale alla parete e opposta al verso positivo stabilito sull'asse x .

Tale variazione va attribuita a una forza $\mathbf{F}$, variazione della quantità di moto, assorbita e restituita dalla parete nell'intervallo di tempo durante il quale si verifica l'urto; la reazione della particella contro la parete (pressione d'urto), è $-\mathbf{F}$. Se $\Delta t = t_2 - t_1$ è la durata dell'urto che, come s'è detto è molto breve, si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = -2m_1 v_x,$$

e la forza media

$$\overline{F} = -\frac{2m_1 v_x}{\Delta t}.$$

||| 13. *Collisione elastica obliqua di una particella contro un'altra identica, in quiete, nel riferimento L .*

Essendo le masse uguali e indicando con v la velocità della particella incidente, si ha conservazione dell'energia cinetica,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mV_1^2 + mV_2^2);$$

ossia

$$p^2 = p_1'^2 + p_2'^2,$$

e conservazione della quantità di moto,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2.$$

Da quest'ultima si ottiene

$$p^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2.$$

Perché questa equazione sia compatibile con la conservazione dell'energia, deve essere $\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = 0$. Nel riferimento L , dopo l'urto, le particelle si muovono in direzioni ortogonali.

||| 14. *Termalizzazione dei neutroni.*

Nei reattori nucleari i neutroni veloci emessi dalla disintegrazione dell'uranio 235, passano attraverso un mezzo moderatore in modo da essere rallentati. Infatti la sezione d'urto di cattura di tale elemento è elevata solo per i neutroni che hanno energia termica, dell'ordine di qualche unità della grandezza $k_B T$, dove k_B è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta, cosicché è possibile provocare la fissione di altri atomi di uranio e mantenere controllata la reazione a catena.

L'urto che prendiamo in considerazione è perfettamente elastico, $Q = 0$. Per lo studio del problema conviene adottare il riferimento C . Indicando con m_1 e $\mathbf{v}_1$ massa e velocità del neutrone incidente e con m_2 la massa degli atomi del moderatore, $\mathbf{v}_2 = 0$, si ha

$$\mathbf{v}_{1C} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_C, \quad \mathbf{v}_{2C} = -\mathbf{v}_C,$$

dove la velocità del centro di massa è

$$\mathbf{v}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1.$$

Chiamando con $\alpha = m_2/m_1$ il rapporto tra la massa degli atomi del moderatore e la massa del neutrone, le relazioni precedenti diventano:

$$\mathbf{v}_C = \frac{1}{1+\alpha} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_{1C} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_{2C} = -\frac{1}{1+\alpha} \mathbf{v}_1.$$

Dal diagramma delle velocità dopo l'urto, nei riferimenti L e C , mostrato in figura 16, si ha

$$V_1^2 = V_{1C}^2 + v_C^2 + 2V_{1C}v_C \cos \Theta, \quad (45)$$

dove Θ è l'angolo di diffusione nel riferimento C . Poiché $p_{1C} = p'_{1C}$, equazione (36), è anche $v_{1C} = V_{1C}$. Pertanto la (45) diventa

$$V_1^2 = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2 v_1^2 + \frac{1}{(1+\alpha)^2} v_1^2 + \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} v_1^2 \cos \Theta.$$

Da questa relazione si trae

$$\frac{V_1^2}{v_1^2} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha \cos \Theta + 1}{(1+\alpha)^2},$$

che è il rapporto T'/T tra l'energia cinetica finale ed iniziale del neutrone.

Si deduce che per $\Theta = 0$, assenza d'urto, ovviamente non c'è perdita di energia; per $\Theta = \pi$, urto centrale in cui il neutrone inverte la direzione della velocità, si verifica la massima perdita di energia. In quest'ultimo caso si ha

$$\frac{T'}{T} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(1+\alpha)^2} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2.$$

Si verifica facilmente che la perdita relativa di energia risulta

$$\frac{T - T'}{T} = \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2};$$

essa è tanto più elevata quanto più il rapporto α è vicino all'unità. Questo risultato suggerisce che il moderatore va scelto tra i materiali che contengono idrogeno in percentuale elevata. L'idrogeno puro non può essere usato perché, essendo gassoso, il numero di atomi per unità di volume è piuttosto piccolo, perciò va impiegata acqua, paraffina o altri materiali idrogenati.

15. Q in una collisione obliqua anelastica nel riferimento L .

Supponiamo che una particella di massa m_1 e velocità v_1 , incida obliquamente su una particella di massa m_2 in quiete, e che le masse, dopo la collisione, siano uguali. Si ha

$$Q = \left(\frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \right) - \frac{p_1^2}{2m_1}.$$

Poiché

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2', \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1',$$

si ottiene:

$$p_2'^2 = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos \theta.$$

L'espressione di Q diventa

$$\begin{aligned} Q &= \frac{p_1'^2}{2m_1} - \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} (p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) p_1^2 - \frac{p_1p_1' \cos \theta}{m_2}. \end{aligned}$$

In una reazione nucleare, le masse delle particelle emergenti possono essere diverse; Q risulta analogo.

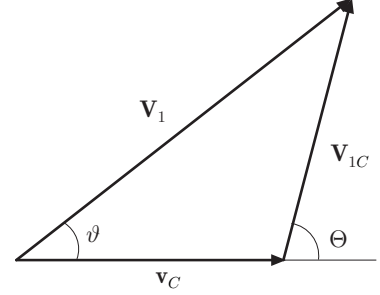


Fig. 12.16

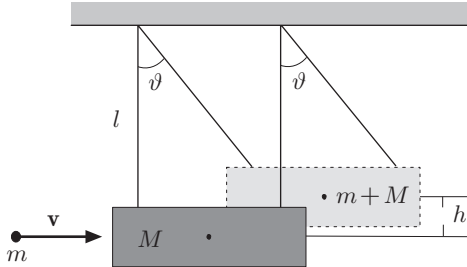


Fig. 12.17

16. Pendolo balistico.

Il pendolo balistico è mostrato in figura 17; esso consiste di un blocco di materiale opportuno, massa M , sospeso con fili di lunghezza l , in modo che si possa spostare solo nel piano verticale senza ruotare. Quando esso è in quiete, una pallottola lo colpisce rimanendovi conficcata; quindi acquista una velocità V che si ricava dalla conservazione della quantità di moto. L'urto è totalmente anelastico; detta m la massa della pallottola e v la sua velocità prima dell'impatto, si ottiene

$$mv = (M + m)V, \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M + m}v.$$

L'energia cinetica del blocco, subito dopo l'urto, è

$$T = \frac{1}{2}(M + m)V^2 = \frac{m}{M + m} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right),$$

che è una frazione dell'energia cinetica iniziale della pallottola.

Se h è la quota raggiunta dal pendolo, la variazione di energia potenziale, uguale all'energia cinetica iniziale, risulta

$$\Delta U = (M + m)gh = \frac{m}{M + m} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right). \quad (46)$$

Poiché

$$h = l(1 - \cos \theta) = 2l \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

detto x lo spostamento orizzontale del blocco, per piccoli angoli di elongazione, si può porre

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{x}{l},$$

quindi $h = x^2/2l$. Sostituendo nella (46):

$$gh = g \frac{x^2}{2l} = \frac{m}{(M + m)^2} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right).$$

Si ottiene

$$v = \frac{M + m}{m} x \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

L'energia dissipata è data dalla (41), con $e = 0$ e $v_{12} = v$.

17. Studio dell'esplosione di una bomba.

Il problema è analogo alla disintegrazione di un nucleo, alla dissociazione di una molecola biatomica e a tutti i processi in cui, come risultato finale, si ottengono due particelle a causa di liberazione di energia interna. Supponiamo che inizialmente la bomba sia in quiete e che i frammenti siano due. È indifferente studiare il problema nel riferimento L o nel riferimento C , perché in ogni caso la quantità di moto iniziale è nulla e tale si mantiene dopo l'esplosione; dunque dette $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ le quantità di moto dei frammenti, è

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad p_1 = p_2.$$

I frammenti procedono in direzioni opposte. L'energia cinetica, dopo l'esplosione, è dovuta all'energia Q liberata:

$$T' = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = p_1^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = Q;$$

da cui

$$\frac{1}{2\mu} p_1^2 = Q, \quad p_1 = p_2 = \sqrt{2\mu Q}.$$

Le energie cinetiche dei frammenti sono rispettivamente

$$T'_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{\mu}{m_1} Q, \quad T'_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{\mu}{m_2} Q.$$

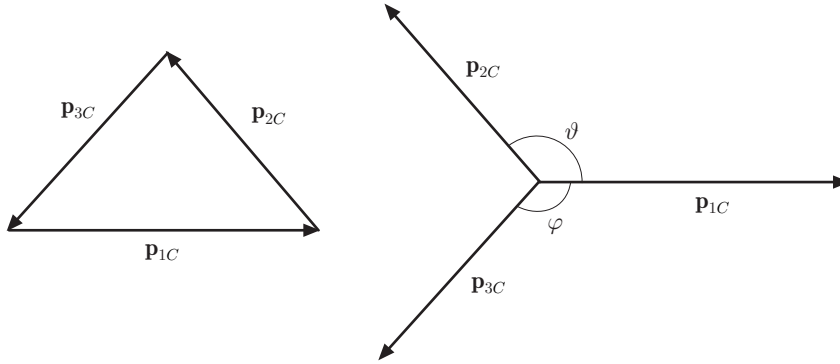


Fig. 12.18

Se la bomba prima dell'esplosione possiede quantità di moto, essendo Q indipendente dal riferimento, è opportuno adottare il riferimento C . Le conclusioni sono quelle ottenute.

Se i frammenti sono tre e la bomba inizialmente possiede una certa quantità di moto, conviene adottare il riferimento C , in cui la quantità di moto del sistema è nulla. Essendo

$$\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} + \mathbf{p}_{3C} = 0, \quad (47)$$

i vettori quantità di moto costituiscono i lati di un triangolo, pertanto risultano complanari. L'energia cinetica del sistema è

$$\frac{p_{1C}^2}{2m_1} + \frac{p_{2C}^2}{2m_2} + \frac{p_{3C}^2}{2m_3} = Q.$$

Proiettando la (47) nella direzione di una delle quantità di moto, figura 18, si ottengono due equazioni scalari:

$$p_{1C} + p_{2C} \cos \theta + p_{3C} \cos \varphi = 0$$

$$p_{2C} \sin \theta - p_{3C} \sin \varphi = 0.$$

Queste relazioni insieme all'equazione dell'energia cinetica non sono sufficienti per risolvere il problema, a meno che non siano noti due parametri; per esempio gli angoli θ e φ .

.....