

15. Corpi deformabili

1. Considerazioni introduttive

Nei capitoli XIII e XIV è stata studiata la meccanica dei corpi rigidi, definiti come tali se la distanza tra due loro punti generici resta invariata, qualunque sia la sollecitazione alla quale sono soggetti. In realtà l'esperienza mostra che le sollecitazioni determinano deformazioni più o meno notevoli, dipendenti dalla natura del corpo. Una sbarra metallica e un elastico, soggetti alla stessa sollecitazione, presentano deformazioni molto diverse; nella prima la deformazione è rilevabile solamente con apparecchi molto sensibili, nel secondo è molto vistosa.

A parte queste situazioni estreme, un corpo o, più in generale, un mezzo sottoposto a sollecitazioni, presenta deformazioni che diremo elastiche se, cessata la sollecitazione, il corpo ritorna alle dimensioni iniziali; anelastiche se le deformazioni risultano permanenti. Lo studio di questi fenomeni, legati essenzialmente alla struttura microscopica della materia, costituisce un argomento molto importante della Fisica dei materiali. Ci limiteremo a considerare il problema da un punto di vista macroscopico e prenderemo in esame corpi in equilibrio, perché se il corpo, soggetto a forze, è in moto, le deformazioni assumono caratteristiche differenti.

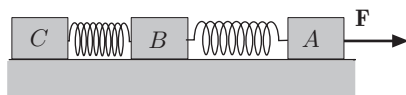


Fig. 15.1

Si consideri il sistema di figura 1, dove una forza **F** orizzontale è applicata al blocco **A** che trascina altri due blocchi, **B** e **C**, collegati mediante due molle identiche; i blocchi simulano le particelle del corpo, le deformazioni delle molle indicano le forze interne che si destano a causa della forza applicata. È palese che l'allungamento subito dalla molla compresa tra **A** e **B** risulta $x_{AB} = 2F/3k$, mentre quello della molla tra **B** e **C** è $x_{BC} = F/3k$,

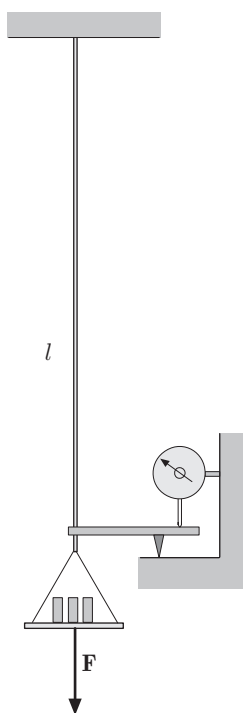


Fig. 15.2

minore del primo, come si può verificare applicando la seconda legge della dinamica. In altri termini, nei corpi deformabili non è lecito spostare la forza applicata lungo la sua retta d'azione, come nei corpi rigidi.

Se il legame tra sollecitazioni e deformazioni di un corpo in equilibrio è lineare, diremo che la deformazione è elastica. Tuttavia anche in questa situazione particolare si constaterà che il problema coinvolge numerosi parametri che, però, si riducono notevolmente se si considerano corpi isotropi e omogenei. Per chiarire in via preliminare questi concetti, consideriamo il caso semplice di una sbarretta metallica di lunghezza l , isotropa ed omogenea, ad un estremo della quale è applicata una forza di trazione $\mathbf{F}$, mentre l'altro estremo è fissato ad un supporto rigido, figura 2.

La forza può essere realizzata per mezzo di pesi e gli allungamenti prodotti, possono essere misurati mediante un estensimetro. Se la sbarretta è di sezione sufficientemente piccola, si può ritenere che la sollecitazione sia uniforme in ogni sua sezione, nel senso che se si immagina un tratto di sbarretta, sulle sue sezioni trasversali si destano forze interne, distribuite uniformemente che, all'equilibrio, sono equivalenti alla forza applicata, figura 3. Detta S la sezione della sbarretta, definiamo *sforzo* σ , la quantità

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

uniforme su tutte le sezioni. Lo sforzo si misura in N/m^2 o in pascal, (Pa).

Se l è la lunghezza iniziale della sbarretta e Δl l'allungamento, definiamo *deformazione* ϵ , la quantità

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l};$$

essa è una grandezza adimensionata che indica l'allungamento relativo. Per le ipotesi fatte nei riguardi dello sforzo, la deformazione risulta uniforme lungo tutta la sbarretta. Aumentando gradualmente la forza applicata, e misurando i corrispondenti allungamenti, si ottengono un insieme di valori dello sforzo e della corrispondente deformazione, mostrati nel grafico di figura 4. Si

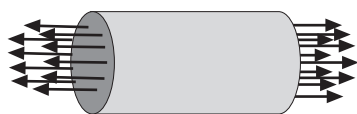


Fig. 15.3

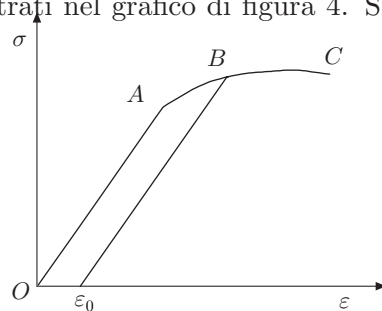


Fig. 15.4

osserva che l'andamento è lineare fino al punto A ; se, a partire dal valore dello sforzo corrispondente in A , si diminuisce l'intensità della forza applicata, la sbarretta ritorna alla sua lunghezza iniziale. È questo l'intervallo delle *deformazioni elastiche*. Aumentando la sollecitazione, la deformazione aumenta più rapidamente dello sforzo, fino al punto B , dove la curva tende a disporsi quasi parallelamente all'asse delle deformazioni. Questo intervallo è quello delle *deformazioni plastiche*.

Aumentando di poco lo sforzo, la deformazione aumenta notevolmente, finché la curva non raggiunge il punto C , dove si verifica la rottura della sbarretta; lo sforzo corrispondente si chiama carico di rottura. In realtà tra i punti A e C intervengono fenomeni più complessi che richiedono un esame a livello microscopico. In ogni caso si osserva che se, in questo intervallo, il carico viene diminuito fino ad annullarsi, il filo presenta una deformazione permanente, indicata in figura con ϵ_0 .

Dall'esperienza possiamo dunque dedurre che, nell'intervallo delle deformazioni elastiche, vale una relazione del tipo

$$\sigma = E\epsilon; \quad (1)$$

lo sforzo è proporzionale alla deformazione.

La (1) esprime la *legge di Hooke*, "*Ut tensio sic vis*", che però, come vedremo, ha una forma più generale. La grandezza E si chiama *modulo di Young* ed ha le dimensioni dello sforzo. Il suo ordine di grandezza, nei solidi, è molto elevato, circa $10^{10} Pa$; infatti esprime lo sforzo necessario per produrre la deformazione unitaria. Naturalmente il carico di rottura, in pratica, è molto minore.

L'esperienza mostra inoltre che insieme alla deformazione ϵ , si ha una contrazione delle dimensioni trasversali della sbarretta; supponendo che la sezione sia circolare, di raggio r , detta Δr la contrazione, la corrispondente deformazione è data da

$$\epsilon_t = -\frac{\Delta r}{r}.$$

Quest'ultima è legata a ϵ per mezzo del rapporto o coefficiente di Poisson, μ , definito dalla relazione:

$$\mu = -\frac{\epsilon_t}{\epsilon}. \quad (2)$$

Il coefficiente di Poisson è un numero puro e descrive, insieme agli altri moduli elastici, le proprietà elastiche dei materiali; il suo valore non può superare $1/2$. Infatti, supponiamo di isolare all'interno della sbarretta un cubo infinitesimo, di spigolo a ; in seguito alla trazione, la lunghezza dello spigolo parallelo all'asse diventa $a(1 + \epsilon)$, mentre quella dello spigolo trasversale $a(1 + \epsilon_t)$.

Pertanto il volume del cubo diventa

$$a(1 + \epsilon)a^2(1 + \epsilon_t)^2 = a^3(1 + \epsilon)(1 - \mu\epsilon)^2.$$

Poiché in seguito alla deformazione, il volume del cubo non può diminuire, sviluppando la precedente e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ha

$$a^3[1 + \epsilon(1 - 2\mu)] \geq 0.$$

Essendo $\epsilon > 0$, si ottiene $\mu \leq 1/2$.

2. Sforzi

Consideriamo ora con maggiore dettaglio, le caratteristiche degli sforzi. Le forze esterne che agiscono su un corpo vanno classificate in *forze di volume* e *forze di superficie*. Le prime sono forze che agiscono su ogni particella del corpo; per esempio, la gravità, le forze d'inerzia, le forze elettromagnetiche ecc. Le seconde sono forze che agiscono sulla superficie del corpo; cioè forze di contatto dovute ad altri corpi che esercitano tensioni o compressioni.

Detto dV l'elemento di volume, è conveniente rappresentare la forza di volume che agisce su tale elemento con la notazione $\mathbf{F}dV$, dove $\mathbf{F}$ rappresenta la forza per unità di volume. Analogamente, detto dS l'elemento di superficie del corpo, la forza di superficie che agisce su tale elemento si indica con $\mathbf{F}dS$, dove $\mathbf{F}$ è la forza per unità di superficie. Consideriamo un corpo, in equilibrio, soggetto a forze di volume e di superficie esterne, figura 5. Le forze di coesione, interne, equilibrano le sollecitazioni impresse al corpo. Scegliamo un punto P interno al corpo, e immaginiamo di sezionare il corpo con un piano π generico, passante per P , in modo da dividerlo in due parti A e B ; se il corpo è in equilibrio, le forze di coesione interne esercitate da B e le forze esterne applicate ad A hanno risultante nulla. Analogamente, si ha equilibrio tra le forze esterne applicate a B e le forze di coesione esercitate da A . L'effetto delle forze di coesione si può ritenere distribuito sul piano π . Su tale piano consideriamo una areola ΔS nell'intorno di P e fissiamo in corrispondenza la normale $\hat{\mathbf{n}}$ orientata. Indicando con $\Delta\mathbf{F}$ la forza relativa a ΔS , definiamo sforzo nel punto P , la grandezza

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta S}.$$

Naturalmente, per la legge di azione e reazione, uno sforzo opposto $-\sigma$, si desta sull'altra faccia dell'elemento d'area considerato. Lo sforzo può essere scomposto in un componente lungo la normale $\hat{\mathbf{n}}$, sforzo normale σ_n , e in un componente tangente a ΔS ,

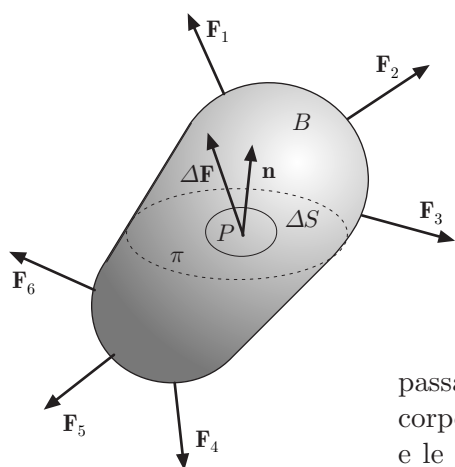


Fig. 15.5

sforzo tangenziale o di taglio σ_t . Se immaginiamo di sezionare il corpo con infiniti piani, tutti passanti per P , per ognuno di essi è associato uno sforzo σ in P , che varia al variare del piano. Tuttavia lo sforzo in P può essere specificato da tre soli vettori σ_x , σ_y , σ_z , relativi ai tre piani coordinati, definiti da una terna cartesiana ortogonale.

Consideriamo, nell'intorno di P , un elemento di volume dV , costituito da un tetraedro con tre spigoli coincidenti con gli assi x, y, z di una terna di riferimento con origine in P , e fissiamo sulla faccia obliqua dS , la normale $\hat{\mathbf{n}}$ orientata verso l'esterno. Le facce dS_x , dS_y , dS_z , giacenti sui piani coordinati, sono ortogonali ai rispettivi assi ed hanno come normali i versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ della terna, orientati verso l'interno dell'elemento; figura 6. Assumiamo inoltre positivi gli sforzi di tensione e negativi quelli di compressione.

Per l'equilibrio dell'elemento, la somma delle forze, di volume e di superficie, dev'essere nulla. Detta $\mathbf{F}dV$ la forza di volume, σ lo sforzo sulla faccia obliqua, σ_x , σ_y , σ_z gli sforzi sulle altre facce, scriviamo:

$$\sigma dS - \sigma_x dS_x - \sigma_y dS_y - \sigma_z dS_z + \mathbf{F}dV = 0.$$

In questa relazione si è convenuto di assumere positive le normali orientate verso l'esterno dell'elemento. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo, cioè dV rispetto a dS , si ha

$$\sigma dS = \sigma_x dS_x + \sigma_y dS_y + \sigma_z dS_z,$$

quindi:

$$\sigma = \sigma_x \frac{dS_x}{dS} + \sigma_y \frac{dS_y}{dS} + \sigma_z \frac{dS_z}{dS};$$

ma $dS_x/dS, \dots$ sono i coseni direttori della normale a dS , dunque:

$$\sigma = \sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma. \quad (3)$$

La (3) costituisce la *relazione di Cauchy*. Essa definisce lo sforzo su un elemento di normale qualsiasi, contenente P , noti gli sforzi relativi a tre elementi di normali prefissate che, nel nostro caso, sono mutuamente ortogonali.

Esprimiamo gli sforzi al secondo membro della (3), mediante le loro componenti cartesiane, figura 7, dove sono mostrate le stesse componenti, relative ad un cubo infinitesimo, nell'intorno di P . Si ha

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{yx} \mathbf{j} + \sigma_{zx} \mathbf{k} \\ \sigma_y &= \sigma_{xy} \mathbf{i} + \sigma_{yy} \mathbf{j} + \sigma_{zy} \mathbf{k} \\ \sigma_z &= \sigma_{xz} \mathbf{i} + \sigma_{yz} \mathbf{j} + \sigma_{zz} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

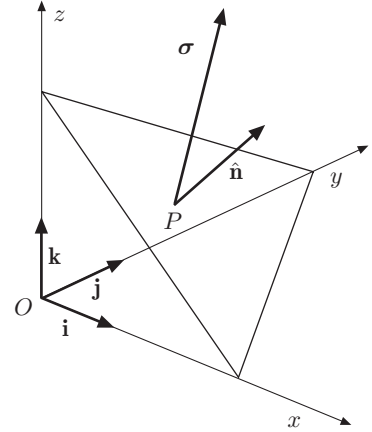


Fig. 15.6

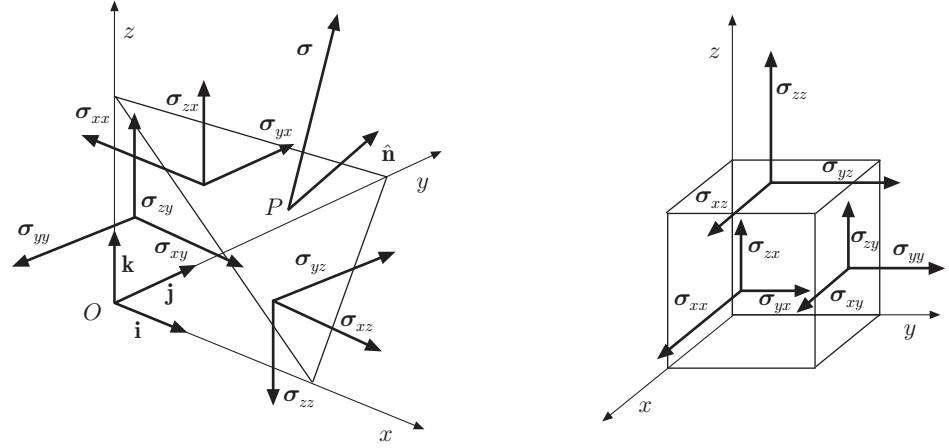


Fig. 15.7

Sostituendo nella (3), si ottengono le componenti cartesiane di σ :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \beta + \sigma_{xz} \cos \gamma \\ \sigma_y &= \sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \beta + \sigma_{yz} \cos \gamma \\ \sigma_z &= \sigma_{zx} \cos \alpha + \sigma_{zy} \cos \beta + \sigma_{zz} \cos \gamma.\end{aligned}\quad (4)$$

Queste relazioni indicano come varia lo sforzo in un punto al variare dell'inclinazione della faccia obliqua; simbolicamente, si può scrivere:

$$\sigma = \mathcal{T} \hat{\mathbf{n}}. \quad (5)$$

dove $\mathcal{T}$ è un tensore doppio, rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

i cui elementi sono le componenti degli sforzi secondo gli assi cartesiani. Pertanto lo sforzo in corrispondenza a una superficie elementare dS di normale $\hat{\mathbf{n}}$, è dato dalla relazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Le componenti degli sforzi σ_{ij} , con $i = j$, rappresentano gli sforzi normali, mentre quelle con $i \neq j$, gli sforzi tangenziali o di taglio. Dalle (4) si deduce che le componenti dello sforzo, mutano con la terna di riferimento. Infatti, riferendoci alla figura 7, è chiaro che se, per esempio, facciamo ruotare gli assi della terna x, y, z , in modo che i nuovi assi x', y', z' siano paralleli alla faccia obliqua del tetraedro e z' alla normale a tale faccia, nelle (4) sopravviverà solo il terzo termine; dunque si ha:

$$\sigma_x = \sigma_{xz}, \quad \sigma_y = \sigma_{yz}, \quad \sigma_z = \sigma_{zz}.$$

In generale, indicando con $l_{zx'}, l_{xy'}, l_{xz'}$, ecc..., i nove coseni direttori che gli assi x', y', z' formano con gli assi x, y, z , le componenti degli sforzi si trasformano secondo la legge:

$$\sigma_{i'j'} = \sum_i \sum_j l_{ii'} \sigma_{ij} l_{jj'},$$

dove i, j indicano ognuno, x, y, z e $i' j'$ indicano x', y', z' . Ogni grandezza le cui componenti, riferite a una nuova terna, si trasformano secondo la relazione precedente, è infatti un tensore doppio†.

Dall'equilibrio dei momenti si deduce una importante proprietà degli sforzi. Consideriamo, per semplicità, i momenti assiali delle forze di superficie, rispetto ad un asse parallelo all'asse z e passante per il baricentro C di dS , figura 8. Essendo le facce del tetraedro infinitesime, si può ritenere che lo sforzo sia uniforme su tutta la superficie e quindi applicato nel baricentro. Sotto queste ipotesi gli sforzi σ e σ_z , hanno momento assiale nullo. Dette b_x, b_y le distanze (infinitesime) da C delle facce dS_x, dS_y , si ha

$$\sigma_{yx} dS_x b_x - \sigma_{xy} dS_y b_y = 0. \quad (8)$$

Indicando con dx, dy, dz le lunghezze degli spigoli del tetraedro coincidenti con gli assi coordinati, è

$$dS_x = \frac{1}{2} dy dz, \quad dS_y = \frac{1}{2} dx dz, \quad b_x = \frac{1}{3} dx, \quad b_y = \frac{1}{3} dy.$$

Sostituendo nella (8), si ottiene

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy}.$$

Analogamente per gli altri sforzi tangenziali:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx},$$

Il tensore degli sforzi è simmetrico.

Esempi

1. Una sbarra omogenea di sezione S , è sottoposta a trazione mediante due forze F opposte, applicate lungo l'asse, ai suoi estremi. Determinare l'orientazione della sezione in cui lo sforzo di taglio ha il valore massimo e calcolare il corrispondente sforzo normale.

Si immagini di sezionare la sbarra con un piano la cui normale forma l'angolo θ con l'asse, figura 9. Detta S_1 la sezione praticata, si ha

$$\sigma_n = \frac{\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{S_1} = \frac{F \cos \theta}{S_1}, \quad \sigma_t = \frac{F \sin \theta}{S_1}.$$

Poiché $S = S_1 \cos \theta$, possiamo scrivere:

$$\sigma_n = \frac{F \cos^2 \theta}{S}, \quad \sigma_t = \frac{F \sin \theta \cos \theta}{S},$$

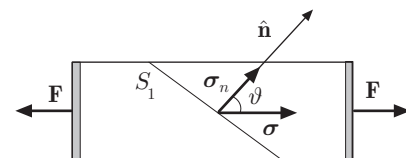


Fig. 15.9

†Il lettore può consultare: Finzi e Pastori, Calcolo Tensoriale e applicazioni, Zanichelli.

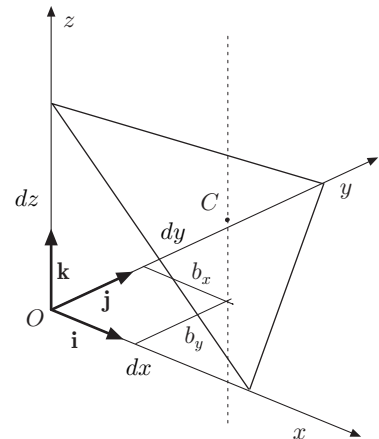


Fig. 15.8

Il massimo di σ_t , al variare di θ , si ha per

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = 0, \quad \frac{F}{S}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{F}{S} \cos 2\theta = 0;$$

cioè per $\theta = \pi/4$. I valori degli sforzi sono:

$$\sigma_n(\pi/4) = \sigma_t(\pi/4) = \frac{F}{2S}.$$

Lo sforzo di taglio è uguale, in modulo, allo sforzo normale.

- ||| **2.** Le componenti degli sforzi che si esercitano nel punto $P \equiv (1, -2, 2)$ di un corpo elastico continuo sono:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 3 \cdot 10^5 Pa, & \sigma_{yy} &= 12 \cdot 10^5 Pa, & \sigma_{zz} &= 15 \cdot 10^5 Pa \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 6 \cdot 10^5 Pa, & \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0. \end{aligned}$$

Determinare lo sforzo normale, su un elemento di superficie la cui normale è orientata come la congiungente l'origine del riferimento col punto P dell'elemento.

Poiché la distanza di P dall'origine è $d = \sqrt{1+4+4} = 3$, i coseni direttori della normale risultano:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

Dalle (4), si ha

$$\sigma_x = -3 \cdot 10^5 Pa, \quad \sigma_y = -6 \cdot 10^5 Pa, \quad \sigma_z = 10 \cdot 10^5 Pa.$$

Il modulo dello sforzo è:

$$\sigma = \sqrt{145 \cdot 10^{10}} Pa \approx 12 \cdot 10^5 Pa.$$

La componente normale dello sforzo risulta:

$$\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left(-3\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} + 10\frac{2}{3}\right) 10^5 Pa = \frac{29}{3} 10^5 Pa.$$

La componente tangenziale, sforzo di taglio, è data da

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} \approx 7 \cdot 10^5 Pa.$$

- ||| **3.** Le componenti degli sforzi in un punto P di un corpo elastico continuo sono:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 4 Pa, & \sigma_{yy} &= -2 Pa & \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 1 Pa \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \sigma_{xz} = 0. \end{aligned}$$

Determinare secondo quali elementi di superficie, passanti per P , gli sforzi risultano normali.

Si tratta di un problema piano; poiché su tali superfici lo sforzo deve essere normale, le (4) si scrivono:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_n \cos \alpha = \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \beta \\ \sigma_y &= \sigma_n \cos \beta = \sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \beta, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_n) \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \beta &= 0 \\ \sigma_{yx} \cos \alpha + (\sigma_{yy} - \sigma_n) \cos \beta &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Perché questo sistema sia soddisfatto da valori non nulli degli sforzi, il suo determinante deve essere uguale a zero:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_n) & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Sostituendo i valori degli sforzi assegnati, si ha

$$\sigma_n^2 - 2\sigma_n - 9 = 0,$$

che ha come radici:

$$\sigma_n = 1 \pm \sqrt{10}.$$

Questi sforzi sono normali a due piani di cui va determinata la giacitura. Sostituendo il primo in una delle (9) e tenendo presente che $\cos \beta = \sin \alpha$, si ottiene:

$$[4 - (1 + \sqrt{10})] \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 = 0, \quad \tan \alpha_1 = -3 + \sqrt{10}.$$

e

$$[4 - (1 - \sqrt{10})] \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 = 0, \quad \tan \alpha_2 = -3 - \sqrt{10},$$

valori che indicano le direzioni delle normali ai piani. Riconosciamo che tali piani sono ortogonali; infatti:

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = \tan(\alpha_1 + \pi/2),$$

come si può facilmente verificare.

Questo procedimento è generale; infatti imponendo, al primo membro delle (4), che lo sforzo sia normale, otteniamo la seguente equazione

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{pmatrix} = 0,$$

che, risolta, dà tre valori di σ_n , di cui uno massimo, uno intermedio e l'altro minimo, che chiamiamo σ_1 , σ_2 , σ_3 . Si è così *diagonalizzato* il tensore degli sforzi. In altri termini, il procedimento consiste nella ricerca degli autovalori della matrice degli sforzi, in analogia all'esempio 1-XIV.

I tre piani su cui agiscono gli sforzi, puramente normali, sono mutuamente ortogonali e sono chiamati *piani principali degli sforzi normali*; le direzioni delle loro normali possono essere ricavate sostituendo i valori degli sforzi ottenuti nelle (4). Tali direzioni si chiamano *direzioni principali degli sforzi*.

Esistono piani in cui lo sforzo risulta puramente tangenziale; per determinare tali piani conviene assumere la terna di riferimento con assi coincidenti con le direzioni principali degli sforzi. Su un piano di *inclinazione generica* di tale terna, le componenti dello sforzo, per le (3), sono:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 \cos \alpha, \quad \sigma'_2 = \sigma_2 \cos \beta, \quad \sigma'_3 = \sigma_3 \cos \gamma,$$

essendo α , β e γ gli angoli che la normale al piano considerato, forma con gli assi della terna; pertanto

$$\sigma'^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma.$$

Si ha inoltre:

$$\sigma'^2 = \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 = \sigma_n'^2 + \sigma_t'^2,$$

essendo σ_n' e σ_t' , lo sforzo normale e quello tangenziale; pertanto:

$$\sigma_t'^2 = \sigma'^2 - \sigma_n'^2.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \sigma_n' &= \boldsymbol{\sigma}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma'_1 \cos \alpha + \sigma'_2 \cos \beta + \sigma'_3 \cos \gamma \\ &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\sigma_t'^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma)^2.$$

Per ottenere i piani in cui lo sforzo è puramente tangenziale, cioè massimo, basta imporre:

$$\frac{\partial \sigma_t'}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_t'}{\partial \beta} = 0,$$

e tener conto della relazione di vincolo:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Senza condurre ulteriormente avanti la dimostrazione, applichiamo i concetti precedenti al problema bidimensionale considerato. Tenuto conto che $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \sigma_t'^2 &= \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta)^2 \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta, \end{aligned}$$

e

$$\sigma_t' = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \cos \beta.$$

Poiché $\cos \beta = \sin \alpha$, possiamo scrivere,

$$\sigma_t' = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \sin \alpha.$$

Derivando rispetto ad α e annullando tale derivata:

$$\frac{\partial \sigma_t'}{\partial \alpha} = (\sigma_1 - \sigma_2)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0,$$

si ottiene

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Lo sforzo tangenziale massimo si ha nei piani le cui normali formano gli angoli $\alpha = \pm \pi/4$, rispetto agli assi principali degli sforzi. Lo sforzo tangenziale massimo risulta

$$\sigma_t(max) = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha = [(1 + \sqrt{10}) - (1 - \sqrt{10})] \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}.$$

III.3. Equazione dell'equilibrio

Si consideri un cubo elementare di volume $dV = dxdydz$ di un corpo elastico in equilibrio, soggetto a forze di volume e di superficie figura 10. Siano σ_x , σ_y , σ_z rispettivamente gli sforzi sulle facce (dy, dz) , (dx, dz) , $(dxdy)$; limitandosi a variazioni del primo ordine:

$$-\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right), \quad -\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right), \quad -\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right),$$

gli sforzi sulle corrispondenti facce opposte. Il segno negativo dipende dall'orientazione dei versori degli assi cartesiani. Per l'equilibrio, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{F}dV + \sigma_x dydz - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \sigma_y dxdz \\ - \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dxdz + \sigma_z dxdy - \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dxdy = 0. \end{aligned}$$

Svolgendo i prodotti, si ricava:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \quad (10)$$

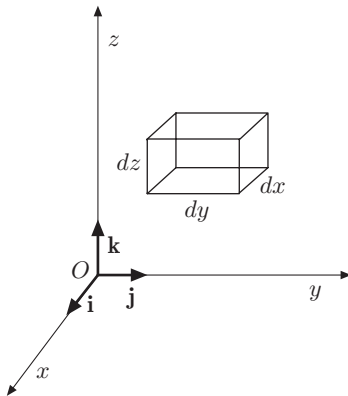


Fig. 15.10

La precedente costituisce l'equazione *indefinita dell'equilibrio*; si dice indefinita perché dà luogo a tre equazioni scalari e non permette, in generale, di ricavare le sei componenti degli sforzi; si rammenti che il tensore degli sforzi è simmetrico. Occorre dunque aggiungere altre condizioni che dipendono dalla natura del corpo che si considera. Una seconda equazione si ricava imponendo l'equilibrio dei momenti; ma, come abbiamo verificato al paragrafo precedente, questa permette solo di stabilire la simmetria del tensore degli sforzi.

4. Deformazioni

Lo stato di deformazione di un corpo è conseguenza degli sforzi ai quali è soggetto; infatti le particelle del corpo mutano la loro posizione iniziale, subendo uno spostamento elementare che, per comodità, indichiamo con $\mathbf{s}$. Se tutte le particelle presentassero lo stesso spostamento, il corpo non subirebbe deformazioni e il risultato netto sarebbe uno spostamento rigido. Si ha deformazione quando le particelle hanno spostamenti differenti, cioè se $\mathbf{s}$ è funzione del vettore $\mathbf{r}$ che individua la posizione della particella. Più esattamente, se un punto del corpo nella posizione $\mathbf{r}$, subisce uno spostamento $\mathbf{s}$ ed un punto nella posizione $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ subisce uno spostamento $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$, lo stato di deformazione può essere rappresentato attraverso il vettore $d\mathbf{s}$, o meglio, dalla relazione che lega $d\mathbf{s}$ a $d\mathbf{r}$. La figura 11 mostra il diagramma di tali vettori nell'intorno di un punto.

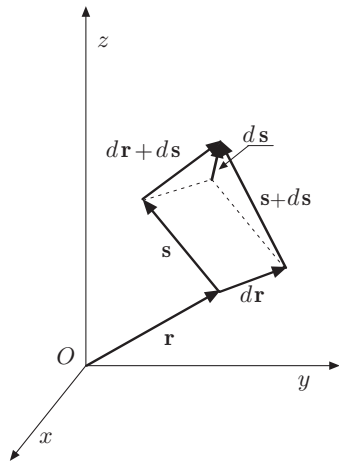


Fig. 15.11

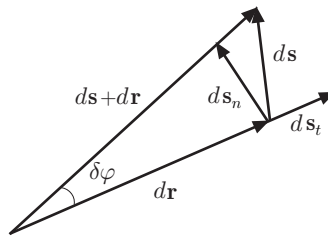


Fig. 15.12

Se $d\mathbf{s}$ dipende linearmente da $d\mathbf{r}$, la deformazione è elastica; le particelle che inizialmente giacciono lungo $d\mathbf{r}$, a causa degli sforzi, si disporranno lungo $d\mathbf{s} + d\mathbf{r}$. In figura 12 è mostrata la somma dei vettori $d\mathbf{r}$ e $d\mathbf{s}$; quest'ultimo, a meno di infinitesimi

di ordine superiore, può essere scomposto nei due vettori ds_t e ds_n . Il segmento infinitesimo dr subisce una elongazione o una contrazione ds_t , e ruota di un angolo $\delta\varphi = ds_n/dr$.

In un riferimento cartesiano è

$$ds = ds_x \mathbf{i} + ds_y \mathbf{j} + ds_z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dr_x \mathbf{i} + dr_y \mathbf{j} + dr_z \mathbf{k};$$

ma ds è funzione della posizione $\mathbf{r}$, quindi delle coordinate. Pertanto si ha:

$$ds_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} dx + \frac{\partial s_x}{\partial y} dy + \frac{\partial s_x}{\partial z} dz$$

$$ds_y = \frac{\partial s_y}{\partial x} dx + \frac{\partial s_y}{\partial y} dy + \frac{\partial s_y}{\partial z} dz$$

$$ds_z = \frac{\partial s_z}{\partial x} dx + \frac{\partial s_z}{\partial y} dy + \frac{\partial s_z}{\partial z} dz.$$

Queste relazioni esprimono il legame tra ds e $d\mathbf{r}$, nell'intorno del punto individuato da $\mathbf{r}$. Tale dipendenza, introducendo il tensore:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{\partial s_x}{\partial y} & \frac{\partial s_x}{\partial z} \\ \frac{\partial s_y}{\partial x} & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{\partial s_y}{\partial z} \\ \frac{\partial s_z}{\partial x} & \frac{\partial s_z}{\partial y} & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

è espressa dalla relazione:

$$ds = \mathcal{T} d\mathbf{r}, \quad (11)$$

ossia:

$$ds = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{\partial s_x}{\partial y} & \frac{\partial s_x}{\partial z} \\ \frac{\partial s_y}{\partial x} & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{\partial s_y}{\partial z} \\ \frac{\partial s_z}{\partial x} & \frac{\partial s_z}{\partial y} & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Tuttavia il tensore così definito, non solo esprime lo stato di deformazione nell'intorno di P , ma anche una rotazione rigida del corpo. Occorre dunque isolare la parte di rotazione da quella di deformazione.

Il tensore $\mathcal{T}$ può essere espresso mediante la somma di un tensore simmetrico $\mathcal{T}_S$ e di un tensore antisimmetrico $\mathcal{T}_A$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_S + \mathcal{T}_A,$$

dove:

$$\mathcal{T}_S = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{T}_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix},$$

cosicché la (11) si scrive:

$$ds = (\mathcal{T}_S + \mathcal{T}_A) d\mathbf{r}. \quad (12)$$

Il tensore simmetrico ha elementi $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ji}$; il tensore antisimmetrico ha elementi $\mathcal{T}_{ij} = -\mathcal{T}_{ji}$. Il termine $\mathcal{T}_A d\mathbf{r}$ rappresenta lo spostamento rotatorio elementare del corpo elastico. Infatti si ha:

$$\mathcal{T}_A d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix},$$

da cui si deduce:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_A d\mathbf{r})_x &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) dz \right] \\ (\mathcal{T}_A d\mathbf{r})_y &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) dz \right] \\ (\mathcal{T}_A d\mathbf{r})_z &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_z}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) dy \right]. \end{aligned}$$

La relazione precedente si compendia nell'equazione nell'equazione vettoriale:

$$\mathcal{T}_A d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{s} \times d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Tenendo presente il significato di rotore, paragrafo 7.3-VI si può scrivere

$$\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{s} = \delta \boldsymbol{\varphi},$$

essendo $\delta \boldsymbol{\varphi}$ il vettore rotazione elementare. Pertanto l'equazione

$$\mathcal{T}_A d\mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times d\mathbf{r},$$

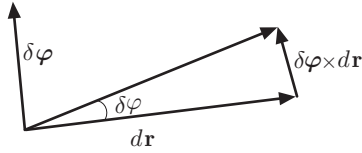


Fig. 15.13

rappresenta lo spostamento rotatorio rigido elementare del sistema elastico. Si osservi che le componenti del vettore $\delta\varphi$, secondo gli assi cartesiani sono date dagli elementi del tensore $\mathcal{T}_A$, ossia

$$\begin{aligned}\delta\varphi_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right), \\ \delta\varphi_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right), \\ \delta\varphi_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Poiché tali considerazioni sono valide per qualunque punto, si deduce che la rotazione rigida avviene attorno ad un asse orientato parallelo a $\delta\varphi$, figura 13. Lo stato di deformazione è rappresentato soltanto dal tensore simmetrico.

Caratteristiche del tensore simmetrico

Si riconosce subito che i termini diagonali del tensore $\mathcal{T}_S$ esprimono le deformazioni lineari, allungamenti o contrazioni, rispettivamente secondo gli assi x, y, z . Gli elementi non diagonali danno le deformazioni angolari; specificano cioè le rotazioni infinitesime che subiscono le particelle del corpo che inizialmente si trovano disposte parallelamente agli assi coordinati. Esaminiamo il termine

$$\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right).$$

In figura 14, è mostrata la sezione, col piano $x-y$, di un cubo infinitesimo del corpo; la somma delle due derivate è uguale all'incremento degli angoli retti del cubetto in seguito alla deformazione. Chiamando γ tale incremento, si ha

$$\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy}. \quad (14)$$

Tenuto conto della simmetria del tensore, è anche

$$\left(\frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) = \gamma_{yx}. \quad (15)$$

Analogamente per gli altri termini. Pertanto il tensore delle deformazioni si scrive:

$$\mathcal{T}_S = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Indicando con $\epsilon_{ij} = \gamma_{ij}/2$, si ha:

$$\mathcal{T}_S = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Nell'ambito delle deformazioni elastiche, l'espressione più generale della legge di Hooke è data dal sistema lineare:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_{11}\epsilon_{xx} + C_{12}\epsilon_{yy} + C_{13}\epsilon_{zz} + C_{14}\epsilon_{yz} + C_{15}\epsilon_{zx} + C_{16}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= C_{21}\epsilon_{xx} + C_{22}\epsilon_{yy} + C_{23}\epsilon_{zz} + C_{24}\epsilon_{yz} + C_{25}\epsilon_{zx} + C_{26}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{zz} &= C_{31}\epsilon_{xx} + C_{32}\epsilon_{yy} + C_{33}\epsilon_{zz} + C_{34}\epsilon_{yz} + C_{35}\epsilon_{zx} + C_{36}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= C_{41}\epsilon_{xx} + C_{42}\epsilon_{yy} + C_{43}\epsilon_{zz} + C_{44}\epsilon_{yz} + C_{45}\epsilon_{zx} + C_{46}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{zx} &= C_{51}\epsilon_{xx} + C_{52}\epsilon_{yy} + C_{53}\epsilon_{zz} + C_{54}\epsilon_{yz} + C_{55}\epsilon_{zx} + C_{56}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{xy} &= C_{61}\epsilon_{xx} + C_{62}\epsilon_{yy} + C_{63}\epsilon_{zz} + C_{64}\epsilon_{yz} + C_{65}\epsilon_{zx} + C_{66}\epsilon_{xy},\end{aligned} \quad (17)$$

in cui i 36 coefficienti C_{ij} sono i *moduli di elasticità*.

Viceversa, risolvendo il precedente sistema rispetto alle deformazioni, si ha

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= S_{11}\sigma_{xx} + S_{12}\sigma_{yy} + S_{13}\sigma_{zz} + S_{14}\sigma_{yz} + S_{15}\sigma_{zx} + S_{16}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{yy} &= S_{21}\sigma_{xx} + S_{22}\sigma_{yy} + S_{23}\sigma_{zz} + S_{24}\sigma_{yz} + S_{25}\sigma_{zx} + S_{26}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{zz} &= S_{31}\sigma_{xx} + S_{32}\sigma_{yy} + S_{33}\sigma_{zz} + S_{34}\sigma_{yz} + S_{35}\sigma_{zx} + S_{36}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{yz} &= S_{41}\sigma_{xx} + S_{42}\sigma_{yy} + S_{43}\sigma_{zz} + S_{44}\sigma_{yz} + S_{45}\sigma_{zx} + S_{46}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{zx} &= S_{51}\sigma_{xx} + S_{52}\sigma_{yy} + S_{53}\sigma_{zz} + S_{54}\sigma_{yz} + S_{55}\sigma_{zx} + S_{56}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{xy} &= S_{61}\sigma_{xx} + S_{62}\sigma_{yy} + S_{63}\sigma_{zz} + S_{64}\sigma_{yz} + S_{65}\sigma_{zx} + S_{66}\sigma_{xy},\end{aligned}\quad (18)$$

dove i coefficienti S_{ij} sono detti *coefficienti di elasticità*. I moduli di elasticità e i coefficienti di elasticità sono simmetrici; pertanto delle 36 grandezze solo 21 risultano indipendenti.

Infatti, consideriamo il lavoro necessario per deformare un cubo infinitesimo di lati dx , dy , dz . Sulla faccia ortogonale a x , le forze che agiscono sono: $\sigma_{xx}dydz$, $\sigma_{xy}dydz$, $\sigma_{xz}dydz$. Queste subiscono rispettivamente gli spostamenti: $d\epsilon_{xx}dx$, $d\epsilon_{xy}dy$ e $d\epsilon_{xz}dz$. Riconoscendo che sulle facce ortogonali agli assi y e z , le forze e gli spostamenti sono analoghi, il lavoro elementare per unità di volume è

$$\delta\mathcal{L} = \sigma_{xx}d\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}d\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}d\epsilon_{zz} + 2\sigma_{yz}d\epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx}d\epsilon_{zx} + 2\sigma_{xy}d\epsilon_{xy}. \quad (19)$$

Supponendo che tale lavoro sia adiabatico, la prima legge della Termodinamica afferma che la precedente è il differenziale di una funzione $U = U(\epsilon_{ij})$, energia elastica; dunque possiamo scrivere:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{xx}}d\epsilon_{xx} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{yy}}d\epsilon_{yy} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{zz}}d\epsilon_{zz} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{yz}}d\epsilon_{yz} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{zx}}d\epsilon_{zx} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{xy}}d\epsilon_{xy},$$

che confrontata con la (19) implica

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right),$$

dove si ritengono costanti tutte le deformazioni tranne quelle di indice i , j . Dalle (17) si ricava che

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} = C_{12}, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \epsilon_{xx}} = C_{21}.$$

Ma la condizione cui deve soddisfare una funzione che ammette differenziale totale è

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{yy}} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{xx}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \epsilon_{xx}};$$

pertanto $C_{12} = C_{21}$. In generale $C_{ij} = C_{ji}$.

Tenendo conto che la (19) risulta un differenziale totale e del legame lineare tra sforzi e deformazioni, integrando, si ottiene il lavoro per unità di volume, *densità di energia elastica*, corrispondente ad una deformazione finita:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + 2\sigma_{yz}\epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx}\epsilon_{zx} + 2\sigma_{xy}\epsilon_{xy}). \quad (20)$$

Le considerazioni fatte riguardano il caso più generale di un corpo anisotropo. Se il corpo ammette particolari simmetrie i 21 coefficienti si riducono notevolmente; per esempio, nei cristalli a simmetria cubica, le costanti elastiche sono soltanto tre, nei cristalli a simmetria esagonale sono cinque†.

Per quanto riguarda la ricerca degli assi principali delle deformazioni, cioè la diagonalizzazione del tensore delle deformazioni, vale un procedimento analogo a quello descritto per gli sforzi.

†Il lettore può consultare: S.M. Edlglass, Engineering Materials Science, The Ronald Press Company, New York.

5. Elasticità dei corpi omogenei e isotropi

I corpi e i mezzi omogenei e isotropi non presentano struttura cristallina ordinata. Tali sono, per esempio, sbarre, lastre, fili metallici policristallini o materiali amorfi, come vetri plastiche, ecc; un asse di legno non è isotropo perchè le sue proprietà meccaniche dipendono dalla direzione delle fibre. Si troverà che per caratterizzare lo stato elastico dei corpi isotropi, in definitiva, occorrono solo due moduli elastici indipendenti.

Consideriamo un cubo infinitesimo, con gli spigoli disposti secondo gli assi di una terna x, y, z , sulle cui facce agiscono soltanto sforzi normali di trazione $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$, figura 15. Supponiamo, in un primo momento, di applicare lo sforzo σ_{xx} ; $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$. Per la (1), la corrispondente deformazione di allungamento è

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx},$$

con E modulo di Young. Poiché, in generale, gli sforzi normali σ_{yy} e σ_{zz} sono diversi da zero, nella direzione di σ_{xx} si verificano deformazioni di contrazione. Tali deformazioni sono proporzionali alle deformazioni di allungamento, ϵ_{yy} e ϵ_{zz} , equazione (2). La deformazione di contrazione causata da σ_{yy} è

$$-\mu \epsilon_{yy} = -\mu \frac{\sigma_{yy}}{E};$$

quella causata da σ_{zz} :

$$-\mu \epsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_{zz}}{E}.$$

Pertanto la deformazione secondo x è minore di σ_{xx}/E ; risulta:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \mu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \mu \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})].$$

Con ragionamento analogo si ha:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \mu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \mu \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})],$$

e

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \mu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \mu \frac{\sigma_{yy}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})].$$

Si è dunque ottenuto il sistema:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\mu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\mu}{E} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{yy} &= -\frac{\mu}{E} \sigma_{xx} + \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\mu}{E} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\mu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\mu}{E} \sigma_{yy} + \frac{1}{E} \sigma_{zz}. \end{aligned} \quad (21)$$

in cui i coefficienti degli sforzi sono i coefficienti di elasticità S_{ij} .

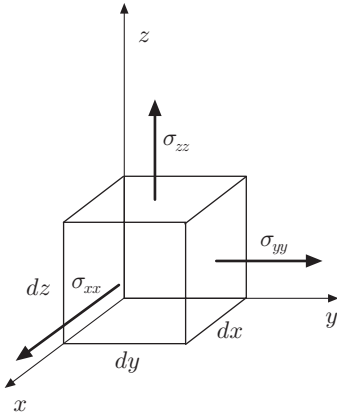


Fig. 15.15

Si osservi che se viene applicato soltanto lo sforzo σ_{xx} , si ha

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx}, \quad \epsilon_{yy} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{xx}, \quad \epsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{xx}.$$

Queste relazioni mostrano che accanto alla deformazione di allungamento nella direzione x , compaiono le contrazioni laterali del cubetto. Analogo ragionamento vale se viene applicato solo σ_{yy} oppure σ_{zz} . Se oltre agli sforzi normali, il cubetto è soggetto a sforzi tangenziali, accanto alle deformazioni normali, compaiono deformazioni di scorrimento. Occorre dunque stabilire le relazioni tra tali deformazioni e i corrispondenti sforzi. Si è riconosciuto che gli elementi non diagonali della matrice delle deformazioni rappresentano deformazioni angolari, relazioni (14), (15). Consideriamo la sezione, nel piano x - y , di un cubo elementare sollecitato come in figura 16; nell'ambito di deformazioni elastiche, si può scrivere

$$\sigma_{xy} = G\gamma_{xy} = 2G\epsilon_{xy},$$

dove G è il *modulo di scorrimento o modulo di rigidità*. Esso, come il modulo di Young, si misura in N/m^2 , ha analogo significato fisico e, per i solidi, lo stesso ordine di grandezza. Analogamente per le altre sezioni del cubo elementare, si ha

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= G\gamma_{xz} = 2G\epsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} &= G\gamma_{yz} = 2G\epsilon_{yz}. \end{aligned}$$

Da queste relazioni si ottengono le corrispondenti deformazioni. In definitiva, l'insieme delle deformazioni di un corpo omogeneo e isotropo, è dato dalle (21) e dalle:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy}, \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2G}\sigma_{xz}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\sigma_{yz}. \quad (22)$$

Si riconosce subito che i coefficienti di elasticità risultano:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = S_{33} = \frac{1}{E} \\ S_{12} &= S_{13} = S_{21} = S_{23} = S_{31} = S_{32} = -\frac{\mu}{E} \\ S_{44} &= S_{55} = S_{66} = \frac{1}{2G}. \end{aligned}$$

Il sistema (21) può essere risolto rispetto agli sforzi; ad esempio, per σ_{xx} si ottiene

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ \epsilon_{yy} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ \epsilon_{zz} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix},$$

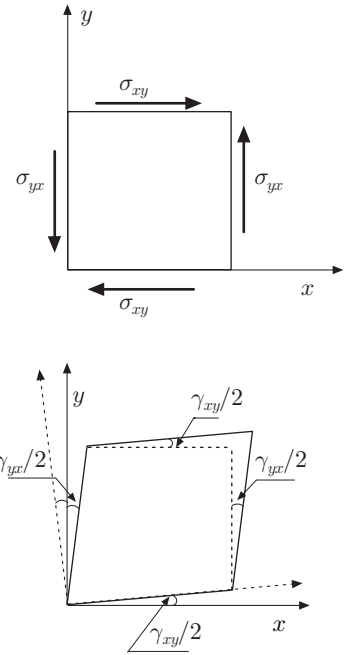


Fig. 15.16

dove

$$D = \frac{1}{E^3}(1 - 2\mu^3 - 3\mu^2) = \frac{1}{E^3}(1 + \mu)^2(1 - 2\mu).$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ \epsilon_{yy} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ \epsilon_{zz} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{E^2}(1 - \mu)^2\epsilon_{xx} + \frac{\mu}{E^2}(\mu + 1)\epsilon_{yy} + \frac{\mu}{E^2}(\mu + 1)\epsilon_{zz},$$

risulta:

$$C_{11} = \frac{(1 - \mu^2)/E^2}{(1 + \mu)^2(1 - 2\mu)/E^3} = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \\ C_{12} = \frac{(\mu + 1)\mu/E^2}{(1 + \mu)^2(1 - 2\mu)/E^3} = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}.$$

Si ha dunque

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}, \quad C_{21} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{13} = C_{32} = 0.$$

Pertanto gli sforzi normali risultano:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{xx} + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{yy} + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{xx} + \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{yy} + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{xx} + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{yy} + \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{zz}. \end{aligned} \quad (23)$$

Dalla (22) si ottengono gli sforzi di taglio:

$$\sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy}, \quad \sigma_{xz} = 2G\epsilon_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2G\epsilon_{yz}, \quad (24)$$

È utile introdurre la quantità:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3\sigma, \quad (25)$$

che indica lo sforzo normale medio; in tal caso le (21) diventano

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{xx} - 3\mu\sigma] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{yy} - 3\mu\sigma] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{zz} - 3\mu\sigma]. \end{aligned} \quad (26)$$

Da queste si ricava:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{xx} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{yy} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{zz} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu}.\end{aligned}\quad (27)$$

Si osservi che i tensori degli sforzi e delle deformazioni (6) e (16), si possono scrivere rispettivamente come segue:

$$\mathcal{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{T}_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & 0 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto le (27) si possono esprimere nella forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\mu} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Analogamente le (25):

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & 0 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Introducendo la quantità

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = 3\epsilon = \theta, \quad (30)$$

che chiamiamo *dilatazione cubica*, e sommando le (26), si ottiene:

$$\theta = 3\epsilon = 3\sigma \frac{1+\mu}{E} - 3\sigma \frac{3\mu}{E} = \frac{3\sigma}{E}(1-2\mu),$$

cioè:

$$\sigma = \frac{E}{1-2\mu}\epsilon.$$

Questa equazione esprime lo sforzo normale medio in funzione della deformazione normale media. Introducendo questa quantità nella (28), si ha

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} &= \frac{E}{1+\mu} \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\mu\epsilon}{1-2\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Esempi

- ||| 4. Una sbarra d'acciaio di sezione $S = 10 \text{ cm}^2$, modulo di Young $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ e coefficiente di Poisson $\mu = 0,3$ è sollecitata da una forza assiale $F = 10^4 \text{ N}$. Determinare il tensore degli sforzi e quello delle deformazioni, trascurando il peso proprio della sbarra.

Fissato un riferimento alla base della sbarra, con l'asse z volto in alto, l'unico sforzo è:

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{S} = 10^7 \text{ Pa}.$$

Dalle (18) si ha:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{zz}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz}, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0.$$

Pertanto:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = |0,15 \cdot 10^{-4}|, \quad \epsilon_{zz} = |0,5 \cdot 10^{-4}|, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0.$$

Per le (20) e (21), si verifica inoltre:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 10^7 \text{ Pa}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,$$

5. Una colonna cilindrica omogenea, di altezza h e densità ρ , regge soltanto il proprio peso. Determinare il tensore degli sforzi e delle deformazioni.

Stabilito il riferimento sulla base di appoggio con l'asse z verso l'alto, l'equazione indefinita dell'equilibrio (10), comporta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -\rho g. \end{aligned}$$

La colonna è sollecitata solo dal proprio peso, quindi:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

Dall'ultima equazione si ha

$$\sigma_{zz} = C - \rho g z,$$

dove C è una costante. Ma per $z = h$, è $\sigma_{zz} = 0$. Segue che:

$$\sigma_{zz} = \rho g(h - z).$$

Il tensore delle deformazioni, di compressione, ha componenti:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\mu}{E}\rho g(h - z), \quad \epsilon_{zz} = -\frac{1}{E}\rho g(h - z), \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0.$$

Il valore medio dello sforzo lungo la colonna è

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{zz}(z) dz = \frac{1}{h} \rho g \int_0^h (h - z) dz = \frac{1}{2} \rho g h.$$

5.1. Modulo di compressibilità

Si definisce coefficiente di compressibilità isoterma κ_T , la grandezza

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T; \quad (32)$$

il suo inverso si chiama modulo di compressibilità isoterma:

$$K_T = \frac{1}{\kappa_T} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T. \quad (33)$$

Esso può essere determinato, nota l'equazione di stato del corpo. Presupponendo che la compressione avvenga lentamente, in modo che la temperatura rimanga costante, il modulo di compressibilità medio in un piccolo intervallo Δp , cui corrisponde una variazione di volume ΔV , è dato dall'espressione:

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta V/V} = \frac{\sigma}{\Delta V/V},$$

rapporto tra lo sforzo uniforme e la variazione relativa di volume.

Consideriamo un cubetto elementare di spigoli dx , dy , dz ; in seguito alla compressione uniforme, lo spigolo dx diventa

$$dx - \frac{\partial s_x}{\partial x} dx = (1 - \epsilon_{xx}) dx,$$

analogamente gli altri spigoli. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{dx dy dz - (1 - \epsilon_{xx}) dx (1 - \epsilon_{yy}) dy (1 - \epsilon_{zz}) dz}{dx dy dz} \\ &= 1 - (1 - \epsilon_{xx})(1 - \epsilon_{yy})(1 - \epsilon_{zz}). \end{aligned}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, si ottiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}. \quad (34)$$

Poiché, nel caso di sforzo uniforme, dalle (26), si ha

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)\sigma,$$

si ottiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{3}{E}(1 - 2\mu)\sigma.$$

Pertanto

$$K = \frac{\sigma}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (35)$$

Questa relazione stabilisce uno dei legami tra i moduli elastici introdotti.

5.2. Relazione tra il modulo di rigidità e il modulo di Young

Consideriamo un elemento cubico, di lato a , soggetto agli sforzi σ_{xx} e σ_{yy} , uniformemente distribuiti sulle facce dell'elemento, figura 17, e sia

$$|\sigma_{xx}| = |\sigma_{yy}| = \sigma.$$

Dalle (21), si ricavano le deformazioni corrispondenti:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma, \quad \epsilon_{yy} = -\frac{1 + \mu}{E} \sigma,$$

ossia

$$|\epsilon_{xx}| = |\epsilon_{yy}| = \epsilon.$$

Si sezioni il cubo nel modo mostrato in figura 18; il prisma di sezione triangolare ABC è in equilibrio sotto l'azione delle forze, di modulo

$$F_t = \sigma_t \frac{a^2}{\sqrt{2}}, \quad F_n = \sigma \frac{a^2}{2}, \quad F_n = \sigma \frac{a^2}{2},$$

agenti, rispettivamente, sulle facce che hanno come traccia AC , AB , BC . Risulta:

$$F_t = \sqrt{\left(\sigma \frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\sigma \frac{a^2}{2}\right)^2} = \sigma \frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Come si è visto nell'esempio 3, la faccia di traccia AB , è soggetta al solo sforzo di taglio uguale, in modulo, allo sforzo normale, $\sigma_t = \sigma$. Lo stesso si verifica per gli altri prismi a sezione triangolare.

Il prisma di sezione quadrata è dunque soggetto esclusivamente a sforzi di taglio. Per questo motivo i suoi angoli subiscono una deformazione:

$$\gamma = \frac{\sigma}{G}. \quad (36)$$

La deformazione della diagonale è data da:

$$\epsilon = \frac{1 + \mu}{E} \sigma. \quad (37)$$

Dalla figura 19, si osserva che, in seguito alla deformazione, la diagonale si è allungata di un tratto CB e si è spostata dalla sua primitiva orientazione di un tratto AC . Il triangolo ABC è approssimativamente rettangolo ed isoscele, perciò si ha

$$BC = \epsilon a, \quad AB = \gamma \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Poiché $CB \approx AC$, risulta:

$$AB = \gamma \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{(\epsilon a)^2 + (\epsilon a)^2} = \epsilon a \sqrt{2}, \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2\epsilon.$$

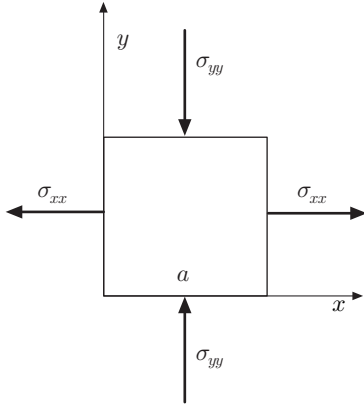


Fig. 15.17

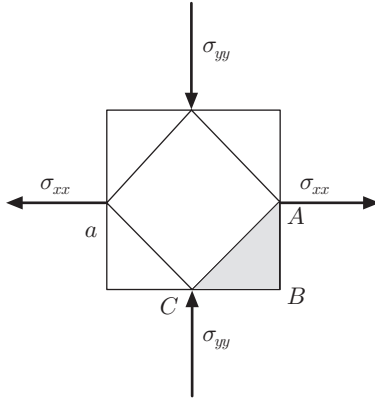


Fig. 15.18

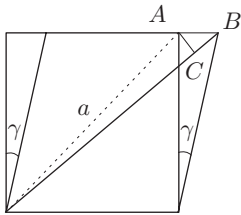
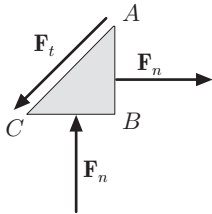


Fig. 15.19

Infine, tenendo conto delle (36) e (37), si ottiene

$$\frac{\sigma}{G} = 2 \frac{1 + \mu}{E} \sigma,$$

cioè:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (38)$$

che è la relazione cercata.

Combinando le (35) e (36), si trova una ulteriore relazione:

$$E = \frac{9KG}{3K + G}. \quad (39)$$

Si deduce subito che basta la conoscenza di due moduli elastici per determinare gli altri due.

In elasticità spesso vengono assunte come grandezze indipendenti i coefficienti di Lamé, λ e ν ; il primo è dato dal modulo di elasticità C_{12} ; il secondo coincide col modulo di rigidità:

$$\lambda \equiv C_{12} = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad \nu \equiv G. \quad (40)$$

In base a questa scelta si ottiene:

$$E = \frac{G(2G + 3\lambda)}{G + \lambda}, \quad \mu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}, \quad \dots$$

La prima relazione si ricava dalla (40) sostituendovi μ , ottenuto dalla (38); la seconda ancora dalla (40) sostituendovi E , ottenuto dalla (39).

In tabella sono dati i valori dei moduli elastici di alcuni materiali.

Moduli di elasticità ($\times 10^{10} Pa$)					
Materiale	E	G	μ	Carico di rottura σ_{max}	K
Acciaio	20	8,1	0,29	0,06	17,6
Alluminio	7	2,6	0,34	0,01	7
Rame	13	4	0,34	0,03	14,3
Vetro	6	3	0,25	0,05	4