

19. Interferenza e diffrazione

1. Sovrapposizione di onde armoniche piane

Si è riconosciuto che l'equazione di D'Alembert è soddisfatta da una combinazione lineare di soluzioni particolari. Ciò implica, entro i limiti di elasticità del mezzo, la validità del principio di sovrapposizione. La somma di due o più onde può dar luogo a fenomeni di *interferenza* che risultano distintamente osservabili se le onde sono armoniche e differiscono per una delle grandezze che le caratterizzano (fase, frequenza, direzione di propagazione).

1.1. Onde progressive

Consideriamo due onde armoniche piane progressive, di ampiezza e frequenza uguali, ma differenti per la fase, che si propagano in un mezzo indefinito:

$$\psi_1 = A \sin(\omega t - kx), \quad \psi_2 = A \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Supporremo inoltre, nel caso di onde trasversali, che la polarizzazione sia lineare e nella stessa direzione, in modo che la sovrapposizione delle onde sia data semplicemente dalla loro somma scalare:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Applicando le formule di prostaferesi, si ottiene

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \sin\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (1)$$

L'onda risultante è progressiva ma sfasata, rispetto alla prima, di $\varphi/2$. La sua ampiezza

$$2A \cos \frac{\varphi}{2},$$

dipende dalla fase. Essa è massima se $\varphi/2 = n\pi$, cioè per $\varphi = 2n\pi$; nulla se $\varphi/2 = (2n+1)\pi/2$, ossia per $\varphi = (2n+1)\pi$. In particolare lo sfasamento φ può riguardare la coordinata temporale, $\varphi = \omega\tau$, oppure quella spaziale, $\varphi = kd$. Il primo va attribuito alle onde piane emesse da due sorgenti nella stessa posizione, con un ritardo/anticipo iniziale τ ; il secondo va attribuito alle onde

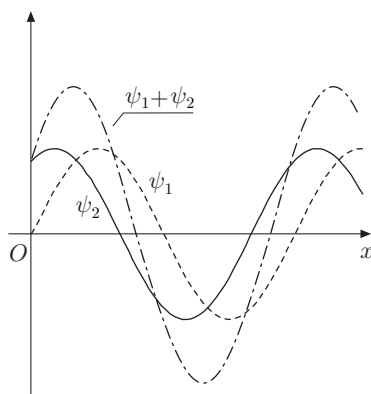


Fig. 19.1

piane emesse da due sorgenti sincrone, poste in punti differenti, distanti d . In figura 1 è mostrata l'interferenza di due onde siffatte emesse da sorgenti sincrone, poste alla distanza $d = \lambda/6$, lungo la direzione di propagazione.

Ampiezza e fase dell'onda risultante possono essere ricavate col metodo dei vettori ruotanti, particolarmente utile se le ampiezze sono diverse; formule (7)-IV e (8)-IV. L'intensità sarà espressa ancora dalla (53)-XVIII, dove si porrà il quadrato dell'ampiezza dell'onda risultante.

1.2. Onde progressive di frequenze diverse

Consideriamo, per semplicità, due onde armoniche piane, progressive, di ampiezze uguali ma di frequenze diverse, che si propagano in un mezzo indefinito:

$$\psi_1 = A \sin 2\pi\nu_1 \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad \psi_2 = A \sin 2\pi\nu_2 \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

La loro somma, come prima, dà luogo all'onda:

$$\psi = 2A \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \left(t - \frac{x}{v} \right) \sin 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (2)$$

la quale si propaga con ampiezza $2A$ modulata dal termine

$$\cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Se le frequenze sono quasi uguali, si ottengono battimenti di frequenza $\nu_1 - \nu_2$, come è stato descritto nel paragrafo 2-IV. In figura 2 sono mostrati, ad un certo istante, i profili di un'onda modulata al 100%, ampiezze delle onde componenti uguali, e di un'onda modulata al 50%.

La modulazione ha un ruolo fondamentale nelle telecomunicazioni. Infatti va tenuto presente che un'onda elettromagnetica di data frequenza, non contiene informazioni, a parte l'ampiezza, la frequenza e la fase che la caratterizzano. Solo la modulazione di tali grandezze, costituita da segnali elettrici prodotti da parole, musica, ecc..., opportunamente demodulate al ricevitore, permette la ricezione di comunicazioni.

È opportuno riscrivere la (2) nella forma

$$\psi = 2A \cos \frac{1}{2}[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x] \sin \frac{1}{2}[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x].$$

I rapporti

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}, \quad v_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}, \quad (3)$$

possono rispettivamente, essere interpretati come la velocità con cui si propaga l'involuppo delle ampiezze, chiamata *velocità di*

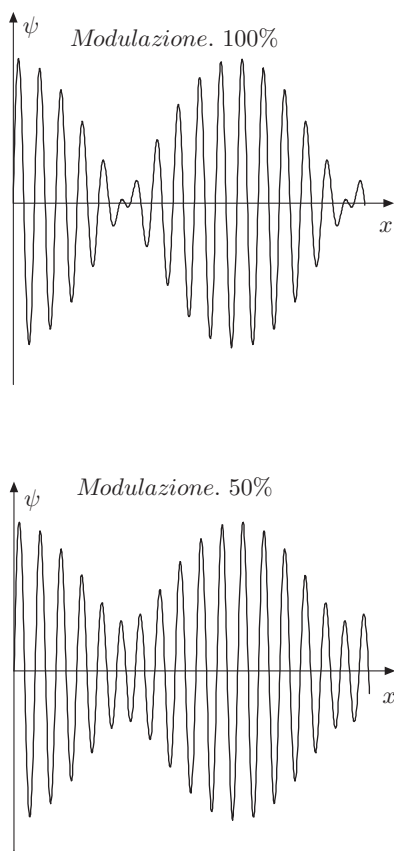


Fig. 19.2

gruppo, e la velocità con cui si propaga l'onda risultante, *velocità di fase*. Nel mezzo non dispersivo considerato, per il quale vale la (43)-XVIII, come si può facilmente verificare, queste velocità sono uguali. Risultano diverse, come vedremo, nei mezzi dispersivi.

1.3. Onde che si propagano in verso opposto

Consideriamo due onde armoniche piane, di ampiezza e frequenza uguali, che si propagano in verso opposto in un mezzo indefinito:

$$\psi_1 = A \sin(\omega t - kx), \quad \psi_2 = A \sin(\omega t + kx).$$

La loro somma, come nei casi precedenti, dà luogo all'onda

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \cos kx \sin \omega t. \quad (4)$$

In effetti la precedente non descrive un'onda, perché gli argomenti delle funzioni trigonometriche contengono separatamente la variabile spaziale e quella temporale, bensì una *vibrazione armonica stazionaria*.

L'ampiezza di vibrazione nel punto di ascissa x , è

$$A' = 2A \cos kx = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad (5)$$

funzione armonica di x . Essa è massima, in valore assoluto, per

$$kx = n\pi, \quad \Rightarrow \quad x = n \frac{\lambda}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

nulla per

$$kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

I punti di massima ampiezza si dicono *ventri di vibrazione*; i punti in cui la vibrazione è costantemente nulla, *nodi di vibrazione*. La distanza tra due ventri o tra due nodi è $\lambda/2$.

La vibrazione, all'istante t , è rappresentata dall'equazione

$$\psi = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \frac{2\pi}{T} t = 2A \cos kx \sin \omega t.$$

La configurazione da essa assunta agli istanti $t = T/8$, $t = T/4$, ..., è mostrata in figura 3. La velocità delle particelle del mezzo è data da

$$\dot{\psi} = 2A\omega \cos kx \cos \omega t;$$

la rarefazione o, nel caso di onde trasversali, la deformazione di scorrimento, dall'espressione:

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2Ak \sin kx \sin \omega t.$$

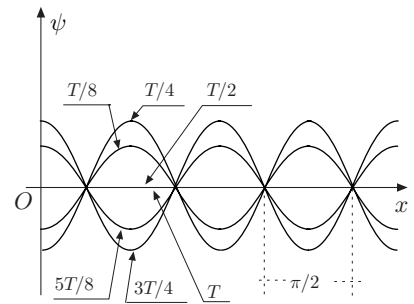


Fig. 19.3

Entrambe le grandezze risultano stazionarie; hanno segno opposto e sono in quadratura, cioè differiscono di $\pi/2$.

Il rapporto $\dot{\psi}/\theta$ assume tutti i valori possibili compresi tra $-\infty$ e $+\infty$. Questo comportamento è diverso rispetto a quello delle onde progressive, nelle quali velocità delle particelle e deformazione sono in fase o in opposizione di fase, mentre il loro rapporto è costante ed uguale a $\pm v$. In corrispondenza alla generica ascissa x , le ampiezze della velocità e della rarefazione sono:

$$\dot{\psi}_0 = 2A \cos kx, \quad \theta_0 = -2Ak \sin kx.$$

Nei punti in cui una si annulla, l'altra è massima e viceversa. La densità media di energia delle vibrazioni stazionarie prodotte da due onde di uguale ampiezza, è il doppio di quella che compete alle singole onde.

1.4. Vibrazioni stazionarie in sistemi finiti

È stata finora presa in considerazione la propagazione in un mezzo indefinito; nel caso di un sistema vibrante di dimensioni finite, bisogna tener conto delle condizioni al contorno che fissano velocità delle particelle, dilatazioni e variazioni di pressione e, per le onde trasversali, le deformazioni di scorrimento. In effetti l'osservazione sperimentale di tali fenomeni viene sempre condotta in mezzi limitati. Va premesso che una vibrazione stazionaria, come si può facilmente verificare, soddisfa l'equazione delle onde. In generale, se ψ ha una espressione della forma

$$\psi(x, t) = \chi(x) \sin \omega t, \quad (6)$$

in cui $\chi(x)$ rappresenta l'ampiezza, funzione di x , si ha:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \chi}{dx^2} \sin \omega t, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \chi(x) \sin \omega t.$$

Sostituendo nell'equazione di D'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

si ha

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \chi, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \chi}{dx^2} + k^2 \chi = 0.$$

La soluzione generale di questa equazione, come è noto, è

$$\chi(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

dove A e B sono costanti arbitrarie, determinate dalle condizioni al contorno. Sostituendo nella (6) si ottiene

$$\psi = (A \sin kx + B \cos kx) \sin \omega t. \quad (7)$$

CORDA FISSATA AGLI ESTREMI; TUBO CHIUSO

Indichiamo con l la lunghezza della corda o del tubo e assumiamo l'origine delle x in un estremo. Tenuto conto, paragrafo 7-XVIII, che per una discontinuità rigida, lo spostamento è nullo, ponendo nella (7) $x = 0$, si ha

$$\psi(0, t) = B \sin \omega t = 0;$$

perciò $B = 0$, e la (6) diventa

$$\psi = A \sin kx \sin \omega t.$$

Ponendo $x = l$ ed essendo $B = 0$, la (7) dà

$$\psi(l, t) = A \sin kl \sin \omega t = 0.$$

Poiché deve essere $A \neq 0$, altrimenti la vibrazione sarebbe ovunque nulla, si ha necessariamente:

$$kl = n\pi, \quad \Rightarrow \quad l = n \frac{\lambda}{2}, \quad \nu_n = n \frac{v}{2l},$$

con n intero, compreso lo zero. Questa relazione esprime la legge di Bernoulli:

le frequenze possibili di una corda tesa e fissata agli estremi sono discrete e multiple della fondamentale $\nu_1 = v/2l$.

Le frequenze di vibrazione multiple della fondamentale sono chiamate *armoniche superiori*. Le vibrazioni sono stazionarie; pertanto esistono n nodi, di cui due agli estremi, e $n - 1$ ventri, le cui distanze relative sono uguali a $\lambda/2$; in figura 4 è mostrata la vibrazione per $n = 4$.

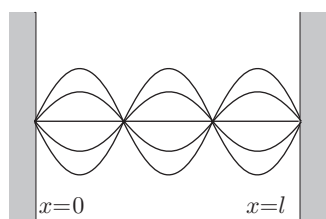


Fig. 19.4

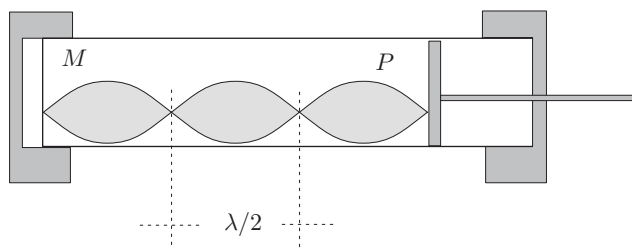


Fig. 19.5

Un dispositivo che permette di visualizzare vibrazioni stazionarie longitudinali è il tubo di Kundt, figura 5. Ad un estremo del tubo è disposta una membrana piana, posta in vibrazione mediante un oscillatore, di cui può essere variata la frequenza; si pensi per esempio ad un ricevitore telefonico. All'interno del tubo è posta della polvere di sughero. Stabilita una certa frequenza di eccitazione e regolata la lunghezza del tubo mediante il pistone mobile all'altro estremo, si osserva che la polvere si dispone secondo nodi e ventri di vibrazione. Poiché la distanza

tra due nodi o tra due ventri è $\lambda/2$, nota la frequenza, è possibile ricavare la velocità di propagazione o viceversa.

TUBO APERTO AI DUE ESTREMI

In questo caso l'eccitazione delle vibrazioni stazionarie può essere causata soffiando aria a una estremità, come in una canna d'organo. Ricordando le conclusioni conseguite a proposito di una discontinuità cedevole, alle estremità la pressione è costante, uguale a quella esterna, quindi la rarefazione è nulla $\partial\psi/\partial x = 0$. Dalla (7):

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = k(A \cos kx - B \sin kx) \sin \omega t. \quad (8)$$

Ponendo $x = 0$, si ha

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 = kA \sin \omega t = 0,$$

perciò $A = 0$. La (8) diventa:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -kB \sin kx \sin \omega t.$$

Ponendo $x = l$ si ha

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_l = -kB \sin kl \sin \omega t = 0.$$

Come nel caso precedente, dev'essere $B \neq 0$, altrimenti non si avrebbero vibrazioni, pertanto si deve avere

$$kl = n\pi, \quad \Rightarrow \quad l = n\frac{\lambda}{2}, \quad \nu_n = \frac{v}{2l}.$$

In figura 6 è mostrata la vibrazione fondamentale, $n = 1$.

TUBO APERTO AD UN SOLO ESTREMO

Supponendo che l'estremità aperta sia in $x = 0$, in questo punto dev'essere $\partial\psi/\partial x = 0$, mentre per $x = l$ si ha $\psi = 0$. La prima condizione richiede che sia $A = 0$, pertanto la (8) diventa

$$\psi = B \cos kx \sin \omega t.$$

La seconda condizione impone

$$\psi(l) = B \cos kl \sin \omega t = 0.$$

Questa relazione è soddisfatta per

$$kl = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad l = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Le corrispondenti frequenze risultano

$$\nu_n = (2n + 1)\frac{v}{4l}.$$

Un tubo chiuso ad un estremo, può vibrare solo con armoniche dispari della fondamentale; in figura 7 è mostrata la vibrazione fondamentale.

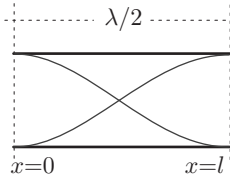


Fig. 19.6

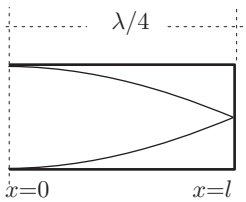


Fig. 19.7

2. Sviluppo in serie di Fourier

Si è detto che l'equazione di D'Alembert è lineare, quindi una qualsiasi combinazione lineare di soluzioni particolari è ancora soluzione dell'equazione delle onde. Viceversa una generica onda piana periodica, si può esprimere come somma di onde armoniche, per mezzo dell'analisi di Fourier. Poiché l'equazione dell'onda è funzione del tempo e dello spazio, tale analisi può essere effettuata per ognuna di tali variabili; il procedimento è analogo.

Più in generale, consideriamo una funzione periodica $f(x) = f(x + 2\pi)$, in cui 2π è il periodo; il teorema di Fourier afferma che la funzione può essere espressa per mezzo della serie:

$$f(t) = A_0/2 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_n \cos nx + \cdots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \cdots + B_n \sin nx + \cdots \quad (9)$$

dove A_0 , A_n , B_n sono i coefficienti dello sviluppo e, per convenienza, si è introdotto il fattore $1/2$ nel termine costante. La (9) si può scrivere:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx, \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \quad (10)$$

Il termine A_0 va ricavato integrando la (9) tra $-\pi$ e π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \cdots + A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \cdots \\ + B_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \cdots$$

Si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi \frac{A_0}{2}, \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

che rappresenta il valore medio della funzione. Gli altri termini sono nulli; infatti posto $nx = u$, si ha:

$$A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{A_n}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u du = 0 \\ B_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dt = \frac{B_n}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin u du = 0.$$

Per ricavare A_n , si moltiplichino ciascun termine della (9) per $\cos nx$ e si integri tra $-\pi$ e π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = A_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \cdots \\ + A_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + \cdots + A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx + \cdots \\ + B_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx + \cdots + B_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx + \cdots$$

Gli integrali del tipo

$$A_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos m x \cos n x dx, \quad B_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin m x \cos n x dx,$$

sono nulli. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \cos(m x + n x) &= \cos m x \cos n x - \sin m x \sin n x \\ \cos(m x - n x) &= \cos m x \cos n x + \sin m x \sin n x. \end{aligned}$$

Sommando

$$\cos(m x + n x) + \cos(m x - n x) = 2 \cos m x \cos n x.$$

da cui:

$$\begin{aligned} \cos m x \cos n x &= \frac{1}{2} [\cos(m x + n x) + \cos(m x - n x)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(m + n) x + \cos(m - n) x]. \end{aligned}$$

Essendo m ed n interi, gli integrali di questi termini, tra $-\pi$ e π sono nulli. Analogamente

$$\begin{aligned} \sin(m x + n x) &= \sin m x \cos n x + \cos m x \sin n x \\ \sin(m x - n x) &= \sin m x \cos n x - \cos m x \sin n x. \end{aligned}$$

Come prima, si ha

$$\sin m x \cos n x = \frac{1}{2} [\sin(m + n) x + \sin(m - n) x],$$

i cui integrali tra i limiti $-\pi$ e π , per il motivo già detto, sono nulli. Resta dunque

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx &= A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n x dx \\ &= \frac{A_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2n x) dx = \pi A_n; \end{aligned}$$

pertanto:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx.$$

Lo stesso procedimento vale per il calcolo di B_n ; si ottiene:

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x dx.$$

Infine:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x dx. \end{aligned} \tag{10}$$

Si osservi che includendo il valore $n = 0$, le (10) si scrivono:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Se f è funzione periodica del tempo, con periodo T , $f(t) = f(t+T)$, posto $x = \omega t$, dalle (10) si ricava:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ A_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Se $f(x)$ è periodica con periodo $2l$, ($-l \leq x \leq l$), dalle (10) si deduce:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \\ A_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Dalle (12) si deduce immediatamente che per una funzione periodica $f(x) = f(x + \lambda)$, dove λ è la lunghezza d'onda, l'espressione della serie diventa:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n k x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n k x.$$

Con lo stesso metodo usato prima si ottengono i coefficienti:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) dx \\ A_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \cos n k x \, dx \\ B_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \sin n k x \, dx. \end{aligned} \quad (13)$$

SERIE DI FOURIER IN FORMA COMPLESSA

Spesso è più conveniente esprimere la serie di Fourier in forma complessa. Sostituendo nella (9) le formule di Eulero,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

si ottiene

$$f(x) = C_0 + C_1 e^{ix} + C_{-1} e^{-ix} + \dots + C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx} + \dots$$

dove

$$C_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + iB_n).$$

Pertanto

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} e^{-inx},$$

oppure, includendo il valore $n = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}. \quad (14)$$

Integrando ogni termine della (14) nell'intervallo $(-\pi \leq x \leq \pi)$, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = C_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx, \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Infatti ogni integrale del tipo

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm inx} dx,$$

è nullo. Moltiplicando ambo i membri della (14) per $\exp[-inx]$ e integrando ogni termine nell'intervallo $-\pi, \pi$, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = C_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx,$$

da cui:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (15)$$

Infatti gli integrali dei termini che contengono $\exp[\pm i(m \pm n)\omega t]$, con $m \neq n$, nell'intervallo considerato sono nulli.

L'analisi di Fourier può essere estesa a funzioni $f(x)$ non periodiche ritenendo che il periodo tenda ad infinito, come avviene per un impulso limitato in un intervallo Δx , all'esterno del quale l'ampiezza è costantemente nulla. Si pensi ad una sorgente che emette un'onda solo in un intervallo di tempo $\Delta t = \Delta x/v$. Senza entrare in dettagli che esulano dai nostri limiti, si dimostra che ora è necessario introdurre un insieme continuo di valori di ω o di k . Ciò è dovuto al fatto che le ampiezze dei termini di Fourier devono risultare nulli all'esterno dell'intervallo in cui l'impulso ha ampiezza diversa da zero. Considerando una funzione non periodica del tempo, le formule equivalenti alle (14) e (15) hanno la seguente forma:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (16)$$

con

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (17)$$

$f(t)$ è chiamata trasformata di Fourier di $C(\omega)$, mentre $C(\omega)$ è la trasformata inversa di Fourier di $f(t)$.

Esempi

- ||| 1. Si consideri la funzione $f(t)$ periodica di figura 8, la quale assume i valori $f(t) = -A$, per $-T/2 < t < 0$ e $f(t) = A$, per $0 < t < T/2$.

Applicando le (11), si ottiene:

$$A_0 = \frac{2}{T} \left[-\int_{-T/2}^0 A dt + \int_0^{T/2} A dt \right] = 0;$$

infatti la funzione è simmetrica rispetto allo zero.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \left[-\int_{-T/2}^0 A \cos n\omega t dt + \int_0^{T/2} A \cos n\omega t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} A \left\{ \left[-\frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \right]_{-T/2}^0 + \left[\frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \right]_0^{T/2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Lo sviluppo della funzione non contiene termini coseno. Per quanto riguarda i coefficienti B_n , si ha

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \left[-\int_{-T/2}^0 A \sin n\omega t dt + \int_0^{T/2} A \sin n\omega t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} A \left\{ \left[\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \right]_{-T/2}^0 - \left[\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \right]_0^{T/2} \right\} = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi). \end{aligned}$$

Si trova che per n pari i coefficienti sono nulli, mentre per n dispari si ha $B_n = 4A/n\pi$. Le ampiezze dei termini dello sviluppo decrescono al crescere di n . Lo sviluppo della funzione assegnata risulta

$$f(t) = 4 \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

In figura 9 sono mostrati i primi tre termini dello sviluppo. Si osserva l'esistenza delle sole armoniche dispari.

- ||| 2. *Analisi di Fourier di un impulso.*

L'impulso di figura 10 è rappresentato dalla funzione

$$f(t) = A \cos \omega_0 t,$$

diversa da zero nell'intervallo $-\Delta t/2, \Delta t/2$, nulla altrove. Esprimiamo tale funzione con l'esponenziale:

$$f(t) = A e^{i\omega_0 t}, \quad (18)$$

con la convenzione di considerare soltanto la sua parte reale. Poiché la (18) è diversa da zero nell'intervallo considerato, la (17) diventa

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} \left[e^{i(\omega_0 - \omega)t} \right]_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\omega_0 - \omega} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\Delta t/2} - e^{-i(\omega_0 - \omega)\Delta t/2}}{2i} \\ &= \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\Delta t/2]}{\omega_0 - \omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

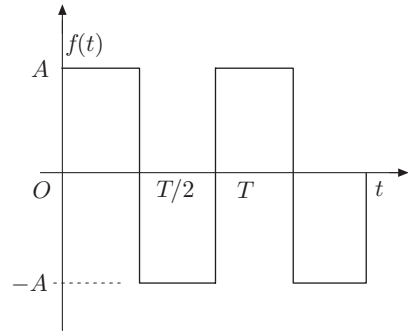


Fig. 19.8

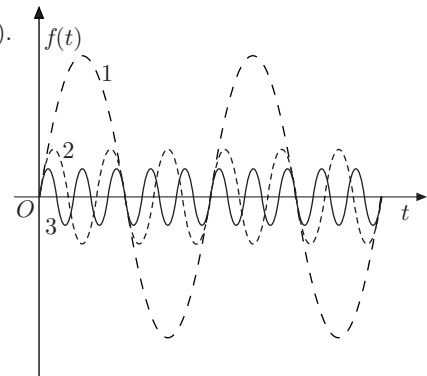


Fig. 19.9

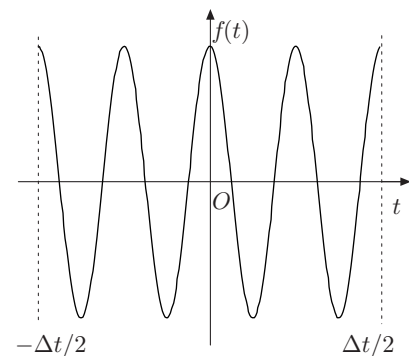


Fig. 19.10

Questa equazione fornisce l'ampiezza, densità spettrale, delle infinite componenti del segnale.

Sostituendo nella (16) si ottiene:

$$f(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\Delta t/2]}{\omega_0 - \omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (20)$$

Essendo il segnale rappresentato dalla parte reale, la precedente diventa

$$f(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\Delta t/2]}{\omega_0 - \omega} \cos \omega t d\omega. \quad (21)$$

La funzione ora stabilita è la trasformata di Fourier di $C(\omega)$; essa rappresenta il segnale per tutti i valori di t , compresi tra meno infinito e più infinito; in realtà essa è nulla all'esterno dell'intervallo $-\Delta t/2, \Delta t/2$. In altri termini la (21) descrive, mediante una funzione continua, un segnale finito.

La (19) può essere posta nella forma

$$C(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \Delta t \frac{\sin(\Delta\omega\Delta t/2)}{(\Delta\omega\Delta t/2)},$$

oppure, se si considera il numero d'onde angolare:

$$C(k) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \Delta x \frac{\sin(\Delta k\Delta x/2)}{(\Delta k\Delta x/2)}.$$

In figura 11 è mostrato l'andamento di $C(\omega)$; l'ampiezza è massima per $\Delta\omega \rightarrow 0$, ossia per $\omega \rightarrow \omega_0$ perché il rapporto tra il seno e l'argomento tende ad uno. Inoltre poiché il seno non può essere maggiore di uno, quando ω aumenta in valore assoluto, $C(\omega)$ diminuisce con andamento oscillatorio e si annulla nei punti

$$\omega = \omega_0 - \frac{2n\pi}{T_0}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Si riconosce che il campo di valori per i quali $C(\omega)$ è maggiore del 50% del massimo centrale, è dato approssimativamente dalla condizione

$$\left| \frac{1}{2} \Delta\omega\Delta t \right| < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{\Delta t} < \Delta\omega < \frac{\pi}{\Delta t}.$$

Dunque le frequenze angolari le cui ampiezze non sono trascurabili, sono quelli che si trovano nell'intorno di ω_0 per i quali è soddisfatta la condizione

$$\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi.$$

Questa relazione mostra che quanto più breve è la durata dell'impulso, tanto più grande è il campo di frequenze necessario per rappresentarlo accuratamente.

Analoga relazione si ottiene tra la lunghezza dell'impulso e l'intervallo dei numeri d'onda:

$$\Delta x \Delta k \approx 2\pi.$$

Dalle precedenti relazioni si deduce inoltre che per Δt molto grande, $\Delta\omega$ tende a zero; ossia il segnale diventa armonico e si estende tra $-\infty$ e $+\infty$; in esso è presente una sola frequenza.

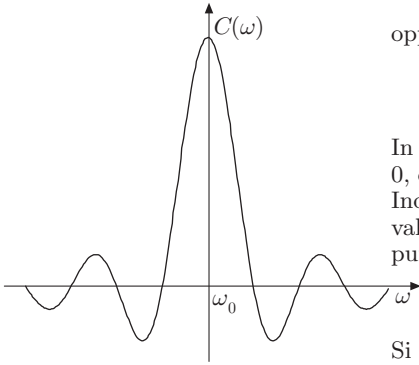


Fig. 19.11

3. Soluzione dell'equazione di D'Alembert con assegnate condizioni al contorno; piccole vibrazioni di un filo fissato agli estremi

Vogliamo ora studiare con maggior dettaglio le vibrazioni stazionarie di un filo limitato. Si consideri un filo flessibile e inestendibile di lunghezza l , soggetto alla sola tensione $\mathbf{T}$ di modulo

costante, i cui estremi siano fissati a supporti rigidi e si assuma come origine del riferimento l'estremo di ascissa $x = 0$. Le forze applicate agli estremi hanno valore invariabile, così come avviene in uno strumento musicale a corde.

Per determinare il moto del filo occorre integrare l'equazione di D'Alembert, con le condizioni al contorno:

$$x = 0, \quad \psi(0) = 0; \quad x = l, \quad \psi(l) = 0; \quad (t \geq 0),$$

che impongono spostamento sempre nullo nei punti in cui è fissato il filo. A queste vanno aggiunte le condizioni iniziali

$$\psi = \psi(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi}(x); \quad (t = 0, \quad 0 \leq x \leq l),$$

ossia posizione e velocità di tutti i punti del filo per $t = 0$. Le funzioni ψ e $\dot{\psi}$ devono soddisfare le condizioni al contorno imposte:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}(l) = 0.$$

Sotto queste condizioni, è possibile trovare integrali particolari dell'equazione di D'Alembert del tipo

$$\psi = \chi(x)\zeta(t).$$

Indicando con gli apici le derivate prime e seconde rispetto a x e rispetto a t e sostituendo nella

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

si ottiene

$$\frac{\chi''}{\chi} = \frac{1}{v^2} \frac{\zeta''}{\zeta}.$$

Questa equazione sarà soddisfatta ponendo

$$\frac{\chi''}{\chi} = -k^2, \quad \frac{1}{v^2} \frac{\zeta''}{\zeta} = -k^2.$$

dove k è una costante, a priori, arbitraria. Poste le precedenti nella forma

$$\chi'' + k^2 \chi = 0, \quad \zeta'' + v^2 k^2 \zeta = 0,$$

si riconosce che gli integrali generali sono:

$$\chi = A \cos kx + B \sin kx, \quad \zeta = C \cos vkt + D \sin vkt,$$

dove A, B, C, D sono costanti e k assume il significato di numero d'onda angolare.

Imponendo a ψ le condizioni al contorno fissate, si ottiene

$$A = 0, \quad A \cos kl + B \sin kl = 0, \quad \Rightarrow \quad B \sin kl = 0.$$

Poiché ψ non può essere identicamente nulla e la costante B dev'essere diversa da zero, si deduce che kl deve essere un multiplo intero di π , cioè

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

Pertanto χ deve avere la forma

$$\chi = B \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Ponendo la costante B uguale ad uno, in corrispondenza ad ogni intero n si ottiene una soluzione dell'equazione di D'Alembert del tipo $\psi_n = \chi_n(x)\zeta_n(t)$:

$$\psi_n = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{vn\pi}{l} t + D_n \sin \frac{vn\pi}{l} t \right), \quad (22)$$

oppure, ponendo $C_n = A_n \cos \gamma$ e $D_n = -A_n \sin \gamma$,

$$\psi_n = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \left(\frac{vn\pi}{l} t + \gamma \right). \quad (23)$$

A causa della linearità dell'equazione di D'Alembert, la serie formata da tali soluzioni

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{vn\pi}{l} t + D_n \sin \frac{vn\pi}{l} t \right), \quad (24)$$

è soluzione di tale equazione.

Le vibrazioni espresse dalle (22) e (23) sono *vibrazioni stazionarie*. Poiché inoltre devono essere soddisfatte le condizioni al contorno, la lunghezza del filo deve contenere un numero intero di semilunghezze d'onda

$$l = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Inoltre poiché per qualunque n dev'essere $v = \lambda_n \nu_n$, si trae che le frequenze possibili sono

$$\nu_n = n \frac{v}{2l}.$$

Pertanto la (23) diventa

$$\psi_n = A_n \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} x \cos(2\pi \nu_n t + \gamma).$$

Il moto di ogni punto del filo è armonico con frequenza ν_n , fase iniziale γ e ampiezza

$$A_n \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} x,$$

funzione armonica di x . L'ampiezza si annulla per

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} x = n\pi, \quad x = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Oppure, essendo $l/n = \lambda_n/2$, per

$$x = 0, \quad x = \frac{l}{n}, \quad x = \frac{2l}{n}, \quad \dots \quad x = \frac{nl}{n} = l.$$

Tali punti sono sempre in quiete e sono i *nodi* di vibrazione. La distanza tra un nodo e l'altro è ovviamente $\lambda_n/2$. I punti in cui è massima l'ampiezza di vibrazione, ventri di vibrazione, si hanno per

$$\frac{2\pi}{\lambda_n}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4}.$$

Per $n = 1$ si ha la soluzione ψ_1 , più semplice, corrispondente alla vibrazione fondamentale, di frequenza

$$\nu_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

e lunghezza d'onda

$$\lambda_1 = 2l.$$

Essa presenta due nodi in $x = 0$ e $x = l$, e un ventre nel punto $x = l/2$. Per $n = 2$ si ha la soluzione ψ_2 , detta *prima armonica*, corrispondente alla frequenza $\nu_2 = 2\nu_1$ e alla lunghezza d'onda $\lambda_2 = \lambda_1/2$. Essa presenta tre nodi, nei punti $x = 0$, $x = l/2$, $x = l$, e due ventri nei punti $x = l/4$, $x = 3l/4$. Per n qualsiasi, armoniche superiori, si hanno n nodi e $n - 1$ ventri. La vibrazione, per $n = 4$, è mostrata in figura 4. In corrispondenza ad ogni armonica si ha una frequenza che, nel campo di udibilità, corrisponde all'altezza del suono, e una intensità proporzionale ad A_n^2 .

Per trovare le costanti C_n e D_n si possono utilizzare le condizioni iniziali fissate. Per $t = 0$, dalla (24) si ha

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (0 \leq x \leq l)$$

Per mezzo delle (13) si ottiene

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (25)$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (26)$$

Le condizioni iniziali caratterizzano le intensità delle armoniche che compongono la vibrazione del filo. Nel campo di udibilità esse determinano l'intensità del suono e il suo *timbro*, dato dai rapporti delle intensità delle armoniche con l'intensità della fondamentale.

Esempi

Calcolo dei coefficienti C_n .

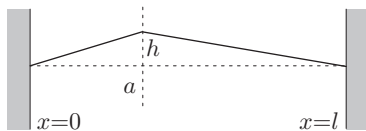


Fig. 19.12

III 3. Corda pizzicata.

Una corda tesa di lunghezza l , fissata agli estremi, viene spostata di h dalla posizione di equilibrio, orizzontale, nel punto di ascissa a e quindi abbandonata con velocità iniziale nulla (figura 12). Le condizioni al contorno sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 0, & \psi(x) &= \frac{h}{a}x & (0 < x < a); \\ \psi(x) &= \frac{l-x}{l-a}h, & & & (a < x < l). \end{aligned}$$

I coefficienti D_n sono nulli, mentre

$$C_n = \frac{2}{l} \frac{h}{a} \int_0^a x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \frac{h}{l-a} \int_a^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^a x \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \left[-\frac{lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_0^a + \frac{l}{n\pi} \int_0^a \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= -\frac{la}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} a + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} a. \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \int_a^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \left[-\frac{l(l-x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_a^l + \frac{l}{n\pi} \int_a^l \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{l(l-a)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} a + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} a. \end{aligned}$$

Pertanto

$$C_n = 2h \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} \right) \frac{l}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} a = \frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} a.$$

Tale coefficiente rappresenta l'ampiezza di oscillazione del ventre dell'armonica di ordine n ; si osservi che essa dipenda da $1/n^2$. Si capisce qualitativamente che gli strumenti musicali come l'arpa, la chitarra, ... hanno un timbro particolarmente dolce.

Infine la vibrazione della corda è data da

$$\psi(x) = \frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi v}{l} t.$$

III 4. Corda percossa.

Supponiamo che un elemento Δx della corda, distante a dall'origine, venga eccitato per mezzo di una percussione istantanea, che ha l'effetto di porre in vibrazione l'elemento di corda con una velocità iniziale $\dot{\psi}_0$ diversa da zero, figura 13. Le condizioni al contorno sono: spostamento nullo per tutti i valori di x , velocità $\dot{\psi}_0$ nell'intervallo Δx , nulla altrove.

Per quanto detto prima, i coefficienti della serie di Fourier risultano:

$$C_n = 0, \quad D_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Ma l'integrale è nullo in tutto l'intervallo, $\partial \psi / \partial t = 0$, tranne in corrispondenza all'elemento Δx . Perciò il suo valore è semplicemente

$$D_n = \frac{2\dot{\psi}_0}{n\pi v} \Delta x \sin \frac{n\pi}{l} a.$$

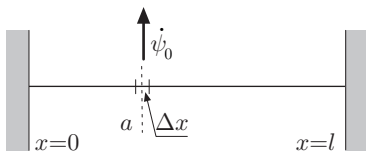


Fig. 19.13

La vibrazione complessiva della corda risulta

$$\psi(x) = \frac{2\dot{\psi}_0 \Delta x}{\pi v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi v}{l} t.$$

Questa volta l'ampiezza delle armoniche decresce come $1/n$, dunque la vibrazione è più ricca di armoniche. Senza entrare nei dettagli che in realtà possono modificare in qualche modo il risultato conseguito, si può concludere che il timbro di uno strumento musicale, come il pianoforte, è più squillante.

.....

4. Vibrazioni di una membrana rettangolare fissata al contorno

Consideriamo una membrana omogenea, rettangolare di lati a e b , fissata al contorno in modo che la tensione T per unità di lunghezza, applicata al contorno, abbia valore costante, figura 14. In questo caso, lo spostamento ψ di ogni elemento della membrana è ortogonale al piano x - y , che la contiene. Detta σ la densità areica e T la tensione, l'equazione di D'Alembert (12)-XVIII, in due dimensioni, si scrive

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad (27)$$

dove la velocità di propagazione è data da

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}.$$

Le condizioni al contorno impongono $\psi = 0$ per $t \geq 0$, nei punti dei segmenti che delimitano la membrana, ossia

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad x = a; & (0 \leq y \leq b) \\ y = 0, & \quad y = b; & (0 \leq x \leq a). \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali impongono:

$$t = 0, \quad \psi = \psi(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi}(x, y),$$

vale a dire posizione e velocità iniziali per $t = 0$. Soluzioni particolari della (27), soddisfacenti alle condizioni assegnate, sono del tipo

$$\psi = \xi(x)\chi(y)\zeta(t).$$

Sostituendo nella (27) si ottiene

$$\frac{\zeta''}{\zeta} - v^2 \left(\frac{\xi''}{\xi} + \frac{\chi''}{\chi} \right) = 0, \quad (28)$$

alla quale si soddisfa ponendo

$$\frac{\zeta''}{\zeta} = -\omega^2, \quad \frac{\xi''}{\xi} = -k_x^2, \quad \frac{\chi''}{\chi} = -k_y^2, \quad (29)$$

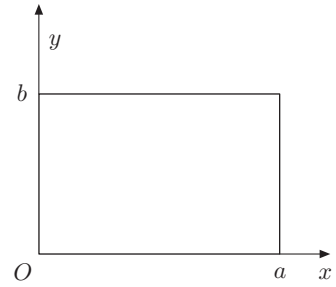


Fig. 19.14

con ω^2 , k_x^2 , k_y^2 , costanti legate dalla relazione

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{v^2}.$$

Gli integrali generali delle (29) sono notoriamente:

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \\ \chi &= B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \\ \zeta &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,\end{aligned}$$

dove A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 sono costanti da determinare. Impo-
nendo alla funzione $\xi(x)\chi(y)\zeta(t)$, le condizioni al contorno, si
deduce:

$$A_1 = B_1 = 0, \quad k_x a = m\pi, \quad k_y b = n\pi,$$

essendo m ed n interi. Pertanto:

$$k_x = m\frac{\pi}{a}, \quad k_y = n\frac{\pi}{b}, \quad \omega = \pi v \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \quad (30)$$

In corrispondenza ad ogni coppia di interi m ed n , si ha una solu-
zione ψ che ha la seguente forma

$$\psi_{mn} = \sin m\frac{\pi}{a}x \sin n\frac{\pi}{b}y (A_{mn} \cos \omega_{mn}t + B_{mn} \sin \omega_{mn}t).$$

La serie:

$$\psi = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin m\frac{\pi}{a}x \sin n\frac{\pi}{b}y (A_{mn} \cos \omega_{mn}t + B_{mn} \sin \omega_{mn}t),$$

data la linearità dell'equazione di D'Alembert, è soluzione della
(27).

Come nel caso della corda fissata agli estremi, la soluzione
trovata è somma di infinite soluzioni semplici, corrispondenti a
vibrazioni stazionarie. Le frequenze possibili sono date da

$$\nu_{mn} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Si hanno dunque rette nodali di equazioni

$$\begin{array}{lll} x = 0 & x = \frac{a}{m} & x = \frac{2a}{m}, \dots \\ y = 0 & y = \frac{b}{n} & y = \frac{2b}{n}, \dots \end{array}$$

e ventri di vibrazione nei centri dei rettangoli delimitati dalle rette
precedenti. Per $m = 1$ e $n = 1$ si ha la frequenza fondamentale:

$$\nu_{11} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \sqrt{\frac{T}{4\sigma} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}.$$

Le altre frequenze, a differenza di quanto avviene per la corda, non sono multiple della fondamentale, poichè lo stesso valore della frequenza si può ottenere per varie combinazioni di m ed n ; tali valori si dicono *degeneri*.

Il calcolo delle costanti A e B si esegue tenendo conto delle condizioni iniziali, che diventano:

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y \\ \dot{\psi} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{mn} A_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y.\end{aligned}$$

I coefficienti A_{mn} e $\omega_{mn} B_{mn}$ degli sviluppi in doppia serie di Fourier, si calcolano nel modo già visto. Data la ricchezza di armoniche presenti, dovuta al fatto che le frequenze dipendono da coppie di numeri interi, vi è la possibilità, eccitando convenientemente la membrana, di riprodurre quasi ogni suono. In virtù di questa proprietà, non goduta dalle corde, le membrane trovano un ampio impiego acustico, nei microfoni, negli altoparlanti e la collocazione naturale nell'orecchio umano.

Il problema relativo ad una membrana circolare è matematicamente più complesso; si trova ancora che le frequenze possibili sono discrete. La simmetria suggerisce che le linee nodali e antinodali sono circonferenze e linee radiali.

5. Vibrazioni di un parallelepipedo rettangolo fissato al contorno

In maniera analoga a quanto avviene per la membrana, le vibrazioni stazionarie di un parallelepipedo di spigoli a , b , c , risultano discrete, qualora si ricerchino soluzioni del tipo

$$\psi = \xi(x)\chi(y)\eta(z)\zeta(t),$$

che soddisfano all'equazione di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right),$$

dove ψ è lo spostamento dell'onda che si propaga in una direzione generica rispetto al riferimento costituito dagli spigoli del parallelepipedo. Con un procedimento analogo a quello descritto per la membrana, si trova che le frequenze possibili sono

$$\nu_{lmn} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}. \quad (31)$$

Anche in questo caso le frequenze delle armoniche superiori alla fondamentale sono degeneri, poichè la stessa frequenza può essere ottenuta mediante combinazioni diverse degli interi l, m, n . Il

parallelepipedo considerato costituisce un risuonatore per le frequenze permesse, come altresì accade per una sfera o un cilindro. In tali casi il problema risulta matematicamente più complesso, ma le frequenze permesse risultano in ogni caso discrete. In particolare si possono studiare cavità adatte, in acustica, all'analisi del suono. Cavità risonanti per le onde elettromagnetiche, con pareti perfettamente riflettenti, sono usate per immagazzinare energia elettromagnetica, per l'analisi o il controllo delle frequenze di circuiti oscillanti e in moltissime altre applicazioni.

|| 5.1. Numero dei modi di vibrazione con frequenza minore o uguale a ν

Questo problema è molto importante nell'analisi dei modi di oscillazione delle cavità risonanti e nelle oscillazioni dei reticoli atomici, in Fisica della Materia. Supponiamo, per semplicità, che il sistema sia costituito da un cubo di un mezzo continuo isotropo di lato a ; le frequenze possibili sono

$$\nu = \frac{v}{2a} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2};$$

da cui si ottiene

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{4a^2\nu^2}{v^2}.$$

In una terna cartesiana, sugli assi della quale sono riportati gli interi l, m, n , ogni frequenza è rappresentata da un punto che costituisce il vertice di un cubo elementare di lato $v/2a$ e volume $(v/2a)^3$. Nello spazio l, m, n , la relazione precedente rappresenta una sfera di raggio $2a\nu/v$, entro cui sono contenuti i cubi suddetti; pertanto il problema consiste nel trovare le combinazioni possibili dei numeri l, m, n , che soddisfino la disuguaglianza:

$$l^2 + m^2 + n^2 \leq \frac{4a^2\nu^2}{v^2}.$$

Se i numeri l, m, n sono sufficientemente grandi, l'insieme discreto dei cubetti può essere approssimato ad un continuo ed essendo gli interi l, m, n positivi, il numero dei modi di vibrazione cercato sarà contenuto nell'ottante della sfera suddetta; dunque il numero dei modi di vibrazione di frequenza minore o uguale a ν , è dato da

$$N_\nu = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2a\nu}{v} \right)^3 = \frac{4\pi\nu^3 a^3}{3v^3}.$$

Poiché il volume della cavità è a^3 , il numero dei modi per unità di volume è

$$n_\nu = \frac{4\pi\nu^3}{3v^3}.$$

Questa espressione è valida per i modi longitudinali. Se le onde sono trasversali, si deve tenere presente che esistono due possibili stati di polarizzazione, perciò in questo caso si avrà

$$n_\nu = \frac{8\pi\nu^3}{3v^3}.$$

Il numero dei modi compresi nell'intervallo infinitesimo $d\nu$, si ricava differenziando le espressioni precedenti; così per i modi longitudinali, si avrà

$$dn_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{v^3} d\nu.$$

6. Interferenza di onde sferiche

Consideriamo due onde sferiche sincrone, di uguale frequenza, emesse dalle sorgenti puntiformi S_1 , S_2 , poste alla distanza a . L'interferenza in un punto dello spazio distante r_1 e r_2 dalle sorgenti, come per le onde piane, è descritta dalla somma delle due onde in quel punto. Supporremo che tale somma possa essere effettuata scalarmente, ossia che i vettori spostamento ψ_1 e ψ_2 siano paralleli, come accade per le onde trasversali polarizzate linearmente e nella stessa direzione, mentre se le onde sono longitudinali assumeremo che la propagazione avvenga nella stessa direzione, oppure che r_1 e r_2 siano molto grandi rispetto alla distanza a tra le sorgenti, figura 15.

Sotto queste ipotesi, dette $A_1 = A_0/r_1$ e $A_2 = A_0/r_2$ le ampiezze delle onde in P , dove A_0 è l'ampiezza ad una distanza prefissata dalla sorgente, l'onda risultante sarà

$$\psi = A_1 \sin(\omega t - kr_1) + A_2 \sin(\omega t - kr_2).$$

Essendo le sorgenti sincrone, le quantità kr_1 e kr_2 hanno il ruolo di fasi iniziali φ_1 , φ_2 nel punto considerato; dunque la differenza di fase risulta

$$\varphi = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2).$$

Ricordando le formule (7)-IV e (8)-IV, l'ampiezza dell'onda risultante è data da:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi}. \quad (32)$$

Pertanto essa assume valori compresi tra

$$A_1 + A_2, \quad (\cos \varphi = 1, \Rightarrow \varphi = 2n\pi)$$

e

$$|A_1 - A_2|, \quad [\cos \varphi = -1, \Rightarrow \varphi = (2n + 1)\pi]$$

dove n un intero positivo o negativo. Nel primo caso si ha un rinforzo dell'onda risultante, o *interferenza costruttiva*, mentre nel secondo caso si ha la massima attenuazione, *interferenza distruttiva*. Pertanto nei due casi si ha

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2n\pi, \quad \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2n + 1)\pi,$$

dalle quali si ricava

$$(r_1 - r_2) = n\lambda, \quad (r_1 - r_2) = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

L'equazione $r_1 - r_2 = \text{cost}$, definisce iperboloidi di rotazione attorno all'asse congiungente le due sorgenti, con fuochi in S_1 e S_2 . Le intersezioni con un piano passante per tale asse sono le

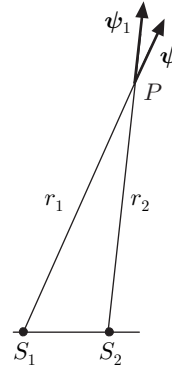


Fig. 19.15

iperboli di figura 16. Sulle superfici degli iperboloidi di equazione

$$r_1 - r_2 = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$$

le due onde interferiscono costruttivamente. Tali superfici sono dette *superfici ventrali o antinodali*. Sugli iperboloidi di equazione

$$r_1 - r_2 = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \dots$$

le onde interferiscono distruttivamente. Tali superfici sono dette *superfici nodali*.

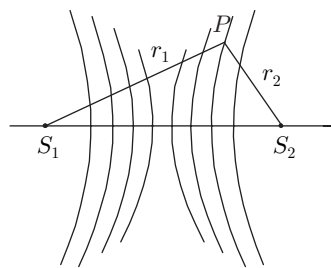


Fig. 19.16

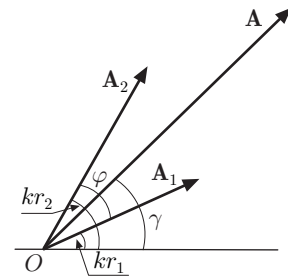


Fig. 19.17

In un punto dello spazio ampiezza e fase dell'onda risultante possono essere rappresentate per mezzo dello schema vettoriale di figura 17 e dall'equazione

$$\psi = A \sin(\omega t - \gamma).$$

Perciò l'onda risultante, in ogni punto dello spazio, non ha l'aspetto di un'onda progressiva, bensì di una vibrazione stazionaria di determinata ampiezza. Questo comportamento è dovuto al fatto che le sorgenti delle onde sono sincrone e mantengono una differenza di fase costante, ossia sono *coerenti*.

La coerenza è dunque il requisito fondamentale per evidenziare il fenomeno descritto. L'analogo ottico è l'interferenza di Young, per la quale rimandiamo all'argomento specifico. Va tuttavia osservato che, in generale, due sorgenti luminose distinte non sono coerenti perchè gli atti elementari di emissione della radiazione elettromagnetica sono completamente casuali; quindi vanno usati particolari accorgimenti che omettiamo di descrivere.

L'interferenza può essere osservata su un piano parallelo all'asse congiungente le sorgenti, dove sono disposti opportuni rivelatori. Nel caso della luce, su uno schermo piano, appare una serie di frange chiare alternate a frange scure, determinate dall'intersezione delle superfici antinodali e nodali con lo schermo. Nell'ipotesi che la distanza a tra le sorgenti sia piccola rispetto alla distanza D delle sorgenti dal piano, la piccola differenza tra r_1 e r_2 può essere trascurata e possiamo assumere $A_1 \approx A_2$; pertanto

la (32) può essere riscritta come

$$A = A_1 \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = 2A_1 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Dalla figura 18, osservando che l'angolo θ è piccolo, si ottiene $\sin \theta \approx \tan \theta = x/D$ e $r_1 - r_2 = a \sin \theta = ax/D$; pertanto la differenza di fase diventa

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}a \sin \theta = \frac{2\pi ax}{D\lambda}.$$

Quindi l'intensità dell'onda risultante è:

$$J = 4A_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = J_0 \cos^2 \left(\frac{\pi ax}{D\lambda} \right),$$

dove J_0 è l'intensità corrispondente a $\varphi = 0$. Il suo andamento in funzione di x è mostrato in figura 19; i punti di massima intensità si ottengono per

$$\frac{\pi ax}{D\lambda} = n\pi, \quad \Rightarrow \quad x = n \frac{D\lambda}{a},$$

dove n è un intero positivo o negativo. La distanza tra due punti di massima intensità, $n+1, n$, è $\Delta x = D\lambda/a$. Dunque la misura di questa distanza, noti D ed a , permette di ricavare la lunghezza d'onda. Questo è uno dei metodi standard usato in ottica.

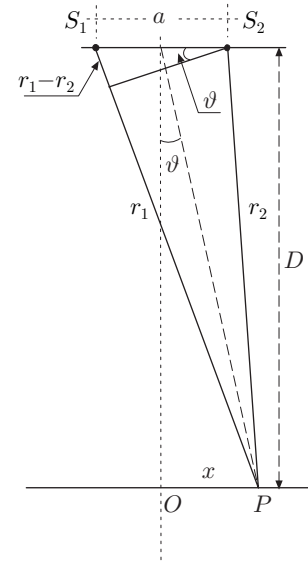


Fig. 19.18

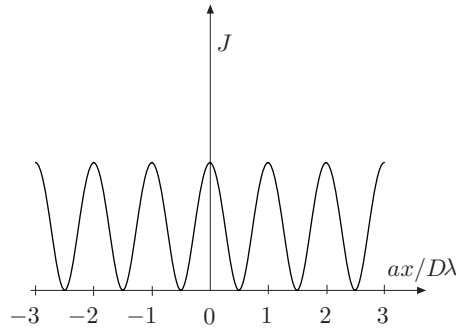


Fig. 19.19

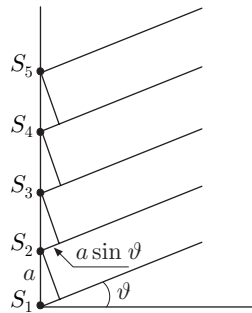


Fig. 19.20

Complementi ed esempi

5. Interferenza di N sorgenti sincrone di uguale frequenza.

Supponiamo che le sorgenti, distanti a l'una dall'altra, siano allineate e che l'interferenza venga osservata a distanza molto grande rispetto ad a , in modo che i raggi che interferiscono si possano ritenere paralleli, figura 20. Si riconosce, come nel paragrafo precedente, che la differenza di fase tra ogni coppia di raggi contigui è $\varphi = ka \sin \theta$, dove θ è l'angolo che un particolare insieme di raggi forma con la normale al piano delle sorgenti. L'ampiezza risultante nella direzione individuata dall'angolo θ , è la somma vettoriale dei vettori ruotanti relativi a ciascuna sorgente; poiché queste sono uguali tali vettori hanno tutti la stessa ampiezza A e ciascuno è ruotato rispetto al precedente dello stesso angolo φ , figura 21. Si ottiene un poligono di $N+1$ lati,

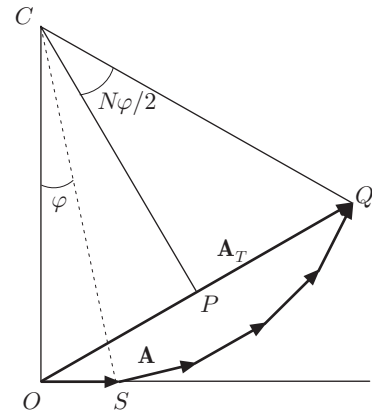


Fig. 19.21

in cui il lato di chiusura rappresenta l'ampiezza risultante A_T . I vettori ruotanti costituiscono le corde di archi uguali di una circonferenza di raggio R ; pertanto la corda che rappresenta l'ampiezza risultante, sottende un angolo uguale a $N\varphi$. Dalla figura 21 si deduce:

$$A_T = OP = 2PQ = 2R \sin \frac{N\varphi}{2},$$

e dal triangolo COS :

$$A = 2R \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Dividendo membro a membro le due relazioni, si ottiene

$$A_T = A \frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}.$$

Per $N = 2$ si ha il risultato del paragrafo precedente, $A_T = 2A \cos \varphi/2$. L'intensità ha l'espressione

$$J = J_0 \left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} \right)^2 = J_0 \left[\frac{\sin(N\pi a \sin \theta/\lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta/\lambda)} \right]^2,$$

dove J_0 è l'intensità di ciascuna sorgente.

L'intensità ha massimi molto intensi per $\varphi = 2n\pi$, che sostituito nella precedente darebbe un valore indeterminato. Tuttavia, ponendo $x = \varphi/2$, si verifica che il limite di $\sin Nx/\sin x$, per $x \rightarrow \pi$, è N . Infatti scelto un angolo ϵ piccolo, di cui x differisce da π , si ha

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{\sin(N\pi - N\epsilon)}{\sin(\pi - \epsilon)} = (-1)^{N+1} \frac{\sin N\epsilon}{\sin \epsilon}.$$

Ma per $x \rightarrow 0$, possiamo scrivere:

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{Nx - (Nx)^3/6 + \dots}{x - x^3/6 + \dots} = N \frac{1 - (Nx)^2/6 + \dots}{1 - x^2/6 + \dots} = N,$$

pertanto:

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = (-1)^{N+1} N = \pm N.$$

Dunque si ottengono massimi principali per

$$a \sin \theta = n\pi,$$

dove n è un intero qualsiasi, incluso lo zero. Ogni volta che questa relazione è soddisfatta l'intensità risulta $J = N^2 J_0$. L'intensità è peraltro nulla ogni volta che

$$\frac{1}{2} N\varphi = n'\pi, \Rightarrow a \sin \theta = \frac{n'\lambda}{N},$$

dove n' è un intero, esclusi i valori $0, N, 2N, \dots$ che darebbero massimi di intensità. Poiché tra due minimi successivi deve esserci un massimo, possiamo concludere che tra due massimi principali si hanno anche $N-2$ massimi secondari. Tuttavia le loro ampiezze sono piccole rispetto a quelli principali, in particolare se N è molto grande. In figura 22 è illustrato l'andamento dell'intensità per alcuni valori di N . Si osserva che al crescere di N il sistema diventa fortemente direzionale, nel senso che l'intensità risulta notevole solo per bande ristrette di valori di θ . Questa proprietà viene sfruttata in radiotrasmissione e radioricezione; per ottenere un effetto direzionale, le antenne trasmettenti e riceventi vengono disposte alla distanza a per la quale si ottiene il massimo dell'intensità.

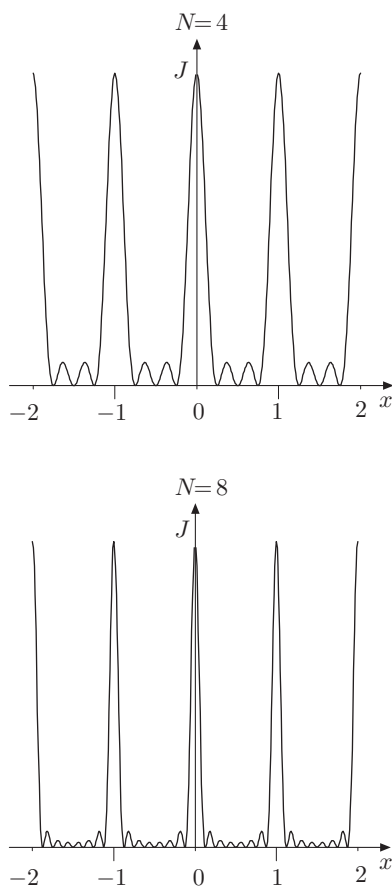


Fig. 19.22

6. Radiointerferometri.

Un radiointerferometro è costituito da vari radiotelescopi disposti a schiera, la cui mutua distanza viene stabilita tra qualche decina ed alcune centinaia

di metri. Esso viene usato in Astrofisica per lo studio della radiazione elettromagnetica emessa da corpi celesti e per individuare nell'Universo la posizione di tali sorgenti. Sfruttando l'invertibilità del percorso delle onde, le sorgenti di radioonde sono poste all'infinito, mentre le sorgenti considerate ai paragrafi precedenti costituiscono le antenne riceventi dei radiotelescopi. In figura 23 è schematizzato un radiointerferometro costituito da due radiotelescopi; le antenne rigorosamente allineate, sono orientate in una direzione che forma un angolo θ con la verticale. I segnali ricevuti, di lunghezza d'onda dell'ordine di qualche decina di centimetri, vengono analizzati da una stazione ricevente accordata, la quale rivela massimi di intensità quando è soddisfatta la condizione

$$a \sin \theta = n\lambda,$$

dove a è la distanza tra i radiotelescopi; naturalmente aumentando il numero di radiotelescopi si ottiene una direzionalità molto elevata. Il radiointerferometro di Sidney è costituito da 32 elementi.

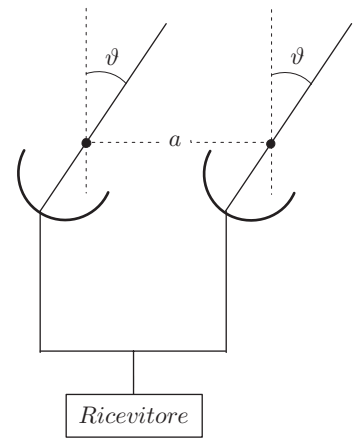


Fig. 19.23

7. Mezzi dispersivi

Nei mezzi dispersivi la relazione di dispersione (43)-XVIII *non è lineare*. Ci proponiamo di descrivere alcuni sistemi dispersivi molto interessanti in cui la velocità di propagazione delle onde elastiche dipende dalla frequenza. L'analogo ottico si fonda su presupposti simili.

7.1. Corda di massa trascurabile, fissata agli estremi, con masse distribuite

Nel paragrafo 5-X, abbiamo considerato un sistema di due particelle collegate ad una corda di massa trascurabile, fissata agli estremi e soggetta a tensione T . Essendo l la lunghezza della corda e $d = l/3$ la distanza tra le particelle, si è trovato che i modi normali di vibrazione hanno frequenze angolari che soddisfano le relazioni:

$$\omega_1^2 = \frac{T}{md}, \quad \omega_2^2 = 3 \frac{T}{md},$$

dove m è la massa delle particelle. Nel caso di n particelle uguali, disposte a distanza d l'una dall'altra, figura 24, detto ψ lo spostamento, l'equazione della dinamica per la particella n è

$$m \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = \frac{T}{d} (\psi_{n+1} - \psi_n) - \frac{T}{d} (\psi_n - \psi_{n-1}). \quad (33)$$

Risolvendo questa equazione, che è valida per un qualunque moto oscillatorio del sistema, è possibile ricavare la forma e la frequenza angolare ω dei modi normali di vibrazione.

Tuttavia poiché la forma di un modo normale è determinata dai rapporti delle ampiezze di oscillazione, considerando un modo di frequenza angolare ω , ciascuna particella oscilla con la stessa frequenza angolare e con la stessa fase. Dunque per il modo di

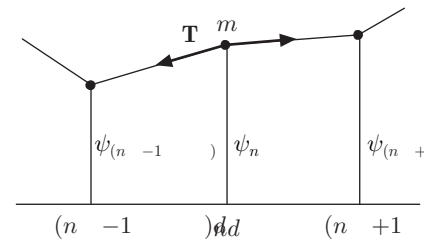


Fig. 19.24

vibrazione considerato, le oscillazioni saranno del tipo:

$$\begin{aligned}\psi_{n-1} &= A_{n-1} \cos(\omega t + \varphi) \\ \psi_n &= A_n \cos(\omega t + \varphi) \\ \psi_{n+1} &= A_{n+1} \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}\tag{34}$$

Dalla seconda si ha

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\omega^2\psi_n = -\omega^2 A_n \cos(\omega t + \varphi).\tag{35}$$

Sostituendo la (35) e le (34) nella (33), si ottiene:

$$-m\omega^2 A_n = \frac{T}{d}(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}),$$

ossia

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n \left(2 - \frac{md}{T}\omega^2\right).\tag{36}$$

Questa equazione, note la ampiezze, fornisce la forma del modo.

Possiamo risolverla con una ragionevole ipotesi. Sappiamo che per una corda continua di lunghezza l , fissata agli estremi, sede di vibrazioni stazionarie, l'ampiezza è data da

$$A(x) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x.\tag{37}$$

A questa forma si deve ridurre l'ampiezza A_n del modo, nel limite in cui il numero di particelle è infinito, limite di continuità della corda. Ponendo nella (37) $x = nd$, si ha

$$A_n = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} nd = A \sin k nd.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}A_{n+1} &= A \sin k(n+1)d = A \sin(k nd + kd) \\ &= A(\sin k nd \cos kd + \cos k nd \sin kd) \\ A_{n-1} &= A \sin k(n-1)d = A \sin(k nd - kd) \\ &= A(\sin k nd \cos kd - \cos k nd \sin kd).\end{aligned}$$

pertanto,

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A \sin k nd \cos kd = 2A_n \cos kd.$$

Sostituendo la precedente nella (36), si ottiene

$$2A_n \cos kd = A_n \left(2 - \frac{md}{T}\omega^2\right).$$

Da questa equazione si ricava

$$\omega^2 = \frac{2T}{md}(1 - \cos kd) = \frac{2T}{md} \left[1 - \left(\cos^2 \frac{kd}{2} - \sin^2 \frac{kd}{2}\right)\right];$$

Ossia

$$\omega^2 = \frac{4T}{md} \sin^2 \frac{kd}{2}, \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{kd}{2}, \quad (38)$$

che è la relazione di dispersione cercata.

In figura 25 sono mostrati i modi normali di vibrazione di cinque masse uguali, fissate ad un filo di massa trascurabile di lunghezza l e soggetto alla tensione T . Per ciascun modo si ha

$$\lambda_1 = 2l, \quad \lambda_2 = l, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}l, \quad \lambda_4 = \frac{l}{2}, \quad \lambda_5 = \frac{2}{5}l.$$

Per la (38):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{2l}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{l}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_3} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{3\pi d}{2l}$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_4} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{2\pi d}{l}$$

$$\omega_5 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_5} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{5\pi d}{2l};$$

ed essendo $l = (n+1)d = 6d$, si ha

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi}{12}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi}{6}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi}{4},$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi}{3}, \quad \omega_5 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{5\pi}{12}.$$

L'andamento della legge di dispersione è mostrato in figura 26; si osservi che il valore ω_{max} si ha per $k = \pi/d$. Mostriamo ora che nel limite di continuità della corda, d piccola rispetto alla lunghezza d'onda, ossia per

$$kd = \frac{2\pi}{\lambda}d \ll 1,$$

la (38) si riduce ad una legge lineare. Poiché

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$$

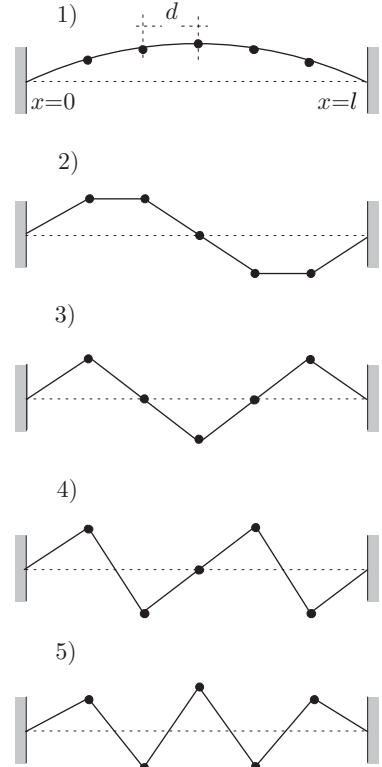


Fig. 19.25

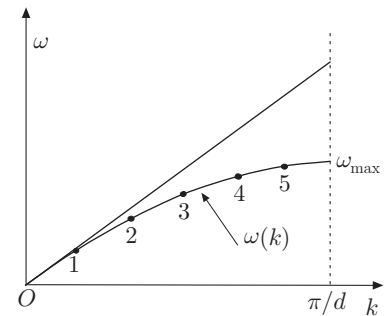


Fig. 19.26

sostituendo nella (38), si ottiene

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \sqrt{\frac{4T}{md}} \left[\frac{1}{2}kd - \frac{1}{48}(kd)^3 \dots \right] \\ &= \sqrt{\frac{Td}{m}} k \left[1 - \frac{1}{24}(kd)^2 + \dots \right],\end{aligned}$$

ossia

$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{Td}{m}} k, \quad (39)$$

che è la relazione di dispersione, lineare, per la corda continua. Osservando che m/d non è altro che la massa lineica, la precedente diventa

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{T}{\mu}} k.$$

In figura 22 la retta tangente nell'origine alla curva $\omega(k)$, equazione (38), rappresenta la legge di dispersione lineare. La formula (38) è molto importante in Fisica della Materia; essa dà la legge di dispersione delle vibrazioni di un insieme lineare di atomi, con una distanza interatomica d .

7.2. Onde sulla superficie di liquidi

Lo studio generale delle onde su uno specchio d'acqua (mare, laghi, ecc...) presenta qualche difficoltà matematica se si deve tenere conto di tutte le forze che intervengono nel fenomeno. Semplificheremo opportunamente il problema, considerando onde piane che si propagano in una direzione.

Uno specchio d'acqua in equilibrio sotto l'azione della gravità, presenta una superficie libera piana ed orizzontale. Una perturbazione impressa su tale superficie (lancio di un sasso, vento,...) imprime uno spostamento delle particelle vicine alla superficie, che si propaga per onde, mentre le particelle che si trovano in profondità restano praticamente in quiete e non hanno, in ogni caso, componenti verticali della velocità. Prendiamo in considerazione spostamenti piccoli rispetto alla profondità dello specchio d'acqua, e tali che, nell'equazione della dinamica dei fluidi ideali (14)-XVII, si possano trascurare i termini quadratici. Supponendo che agisca la sola forza di gravità, detta $\mathbf{u}$ la velocità delle particelle, possiamo scrivere

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Assunto un riferimento con asse z volto in alto, asse x orizzontale, coincidente con la superficie libera in condizioni statiche, essendo

$$\mathbf{g} = -\nabla(gz),$$

la precedente diventa

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \left(gz + \frac{p}{\rho} + C \right).$$

Esiste dunque una funzione potenziale delle velocità, tale che

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi(x, y, z, t).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \varphi) &= -\nabla \left(gz + \frac{p}{\rho} + C \right) \\ \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\nabla \left(gz + \frac{p}{\rho} + C \right), \end{aligned}$$

cioè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \left(gz + \frac{p}{\rho} + C \right). \quad (40)$$

Poiché possiamo considerare il liquido incompressibile, l'equazione di continuità, equazione (10)-XVII, è

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (41)$$

Il problema è piano, ossia può essere studiato nel piano x - z , figura 27. Stabilito un riferimento con origine sulla superficie libera e detto ψ lo spostamento verticale delle particelle in tale riferimento, si tratta di determinare le due funzioni $\varphi(x, z, t)$ e $\psi(x, t)$, quando al liquido viene impressa una perturbazione. Nel caso in considerazione, la (41) diventa

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (42)$$

e la (40):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\psi + \frac{p}{\rho} = C. \quad (43)$$

Ma sulla superficie libera la pressione è quella atmosferica; perciò includendo le costanti C e $p/\rho g$ nel potenziale φ , si ottiene

$$\psi = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\psi}.$$

In virtù dell'ipotesi che gli spostamenti siano piccoli rispetto alla profondità h dello specchio d'acqua, possiamo ammettere che la precedente si possa scrivere

$$\psi = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}. \quad (44)$$

Poiché

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

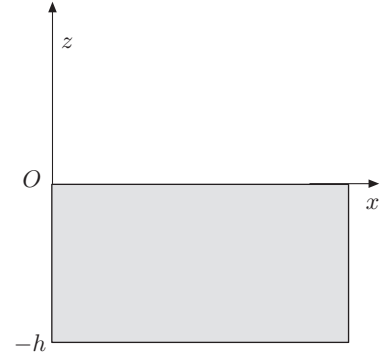


Fig. 19.27

derivando la (44) rispetto a z e tenendo conto della precedente, si ha

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}. \quad (45)$$

Occorre ora determinare la funzione $\varphi(x, z, t)$, tale che soddisfi l'equazione di Laplace (42), in ogni punto del liquido compreso tra la superficie libera, $z = 0$, e il fondo, $z = -h$, assegnata la condizione al contorno (44) e la condizione, anch'essa al contorno, che le particelle sul fondo non abbiano componenti verticali della velocità:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0. \quad (46)$$

Una eventuale componente orizzontale costante, indica che il liquido è in moto, come avviene in un canale o in un fiume.

È possibile soddisfare la (42) e le condizioni al contorno, ponendo

$$\varphi = \chi(x)\xi(z)\zeta(t).$$

Infatti derivando e sostituendo nella (42), si ottiene

$$\frac{\chi''}{\chi} = -\frac{\xi''}{\xi},$$

alle quali si soddisfa ponendo

$$\frac{\chi''}{\chi} = -k^2, \quad \frac{\xi''}{\xi} = k^2, \quad (47)$$

con k costante, a priori, arbitraria. Gli integrali generali delle (47) sono:

$$\chi = A \cos(kx + \alpha), \quad \xi = B \cosh(kz + \beta);$$

dove A , B , α , β sono costanti e k assume il significato di numero d'onda angolare.

Imponendo che la funzione $\chi(x)\xi(z)\zeta(t)$ soddisfi alla (46), dovrà essere

$$Bk \sinh(-kh + \beta) = 0,$$

da cui si trae:

$$\beta = kh.$$

Tenendo presente questo risultato, la condizione al contorno (45) si traduce nella seguente equazione in ζ :

$$k \sinh(kh)\zeta(t) = -\frac{1}{g} \cosh(kh)\zeta''(t),$$

ovvero:

$$\zeta''(t) + kg \tanh(kh)\zeta(t) = 0.$$

Questa equazione è soddisfatta dalla funzione:

$$\zeta(t) = C \cos(2\pi\nu t + \gamma);$$

essendo

$$\nu^2 = \frac{g}{2\pi\lambda} \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right), \quad (48)$$

C e γ costanti.

Infine ponendo $D = ABC$, l'equazione di Laplace (42), le condizioni al contorno (45) e (46) imposte, sono soddisfatte dal potenziale

$$\varphi = D \cos(kx + \alpha) \cosh(kz + kh) \cos(2\pi\nu t + \gamma). \quad (49)$$

Dalla (44), ponendo $z = 0$, si deduce facilmente l'equazione dell'onda:

$$\psi = \frac{2\pi\nu D}{g} \cosh(kh) \cos(kx + \alpha) \sin(2\pi\nu t + \gamma). \quad (50)$$

Questa equazione rappresenta vibrazioni stazionarie della superficie libera, con frequenza ν , lunghezza d'onda λ e ampiezza il cui massimo valore è dato da

$$\frac{2\pi\nu D}{g} \cosh(kh),$$

che cresce notevolmente con la profondità h . La vibrazione è dunque il risultato di due onde che si propagano in verso opposto, con velocità $v = \lambda\nu$, che si ricava immediatamente dalla (48):

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right)}. \quad (51)$$

In particolare, se la profondità è grande rispetto alla lunghezza d'onda,

$$\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right) \approx 1,$$

la velocità di propagazione diventa

$$v \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}; \quad (52)$$

oppure, sostituendo i valori delle costanti:

$$v = 1,25\sqrt{\lambda}.$$

Le onde in questo caso sono dette *onde di gravità*; la loro velocità di propagazione è proporzionale alla lunghezza d'onda.

Se viceversa λ è grande rispetto ad h , nella (51) è

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\lambda \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right) \right] = 2\pi h;$$

perciò risulta:

$$v \approx \sqrt{gh}.$$

È questo il caso tipico delle maree che si svolgono in acqua poco profonda.

Essendo $v = \omega/k$, dalla (51) si ottiene la legge di dispersione

$$\omega(k) = \sqrt{kg \tanh(kh)}. \quad (53)$$

In acqua poco profonda, viceversa, la legge di dispersione è lineare.

Il fatto di avere ottenuto le vibrazioni stazionarie espresse dalla (50), non deve sorprendere. Infatti per verificare l'equazione di Laplace abbiamo scelto una soluzione del tipo $\chi(x)\xi(z)\zeta(t)$, in cui ogni termine è funzione di una sola variabile.

Poiché si è voluto essenzialmente stabilire la legge di dispersione, equazione (53), è irrilevante prendere in considerazione le vibrazioni stazionarie oppure le onde progressive, che effettivamente si propagano su uno specchio d'acqua molto vasto come il mare o un lago. D'altra parte l'onda progressiva si ricava immediatamente dalla (50) ed ha la forma:

$$\psi = \frac{2\pi\nu D}{g} \cosh(kh) \cos(\omega t - kx).$$

Per studiare il moto delle particelle di liquido, prendiamo in considerazione l'espressione (49) del potenziale delle velocità che, per un'onda progressiva, scriviamo

$$\varphi = D \cosh(kz + kh) \cos(\omega t - kx).$$

Nell'ipotesi che h sia molto grande rispetto alla lunghezza d'onda, si può scrivere

$$\cosh(kz + kh) = \frac{1}{2} \left(e^{(kz+kh)} + e^{-(kz+kh)} \right) \approx \frac{1}{2} e^{(kz+kh)} = \frac{1}{2} e^{kz} e^{kh}.$$

Includendo il termine $\exp(kh)/2$ nella costante, si ha

$$\varphi = A e^{kz} \cos(\omega t - kx).$$

Le componenti della velocità delle particelle nel punto x, z risultano

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k A e^{kz} \sin(\omega t - kx)$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = k A e^{kz} \cos(\omega t - kx).$$

I punti del liquido, nel riferimento adottato, corrispondono a valori negativi di z , perciò l'ampiezza delle componenti della velocità diminuisce con la profondità. Ad una profondità λ è $\exp(-2\pi) = 1/500$, l'ampiezza diventa 1/500 di quella alla superficie e decresce rapidamente all'aumentare di z in valore assoluto. Dati sperimentali confermano sensibilmente tale comportamento.

Integrando rispetto al tempo le componenti della velocità, si ottengono le componenti dello spostamento delle particelle:

$$s_x = -\frac{kA}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

$$s_z = \frac{kA}{\omega} e^{kz} \sin(\omega t - kx).$$

Da queste relazioni si deduce che le particelle descrivono traiettorie circolari in senso orario, di raggio

$$\frac{kA}{\omega} e^{kz} = \frac{A}{v} e^{kz},$$

che decresce con la profondità. In figura 28 è mostrato un insieme di tali traiettorie e in grassetto, la configurazione ondosa che assume la superficie libera.

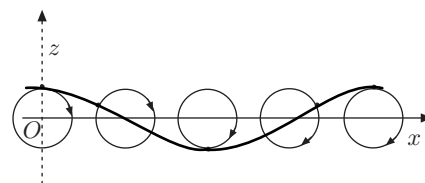


Fig. 19.28

8. Velocità di gruppo

La velocità di un'onda che si propaga in un mezzo non dispersivo, $v = \omega/k$, è chiamata *velocità di fase*. Essa dipende, come abbiamo constatato, dalle caratteristiche elastiche del mezzo.

Un'onda armonica di una certa frequenza si propaga dunque con una certa velocità caratteristica; tuttavia un'onda di questo tipo non è atta a trasmettere informazioni, quindi deve essere modulata in qualche modo. Abbiamo accennato a questa circostanza a proposito dell'interferenza di due onde progressive di diversa frequenza. Se il mezzo non è dispersivo le (3) danno proprio la velocità di fase, mentre se è dispersivo le relazioni citate danno valori diversi.

Trasmettere informazioni o un segnale implica modulazione del segnale stesso, il quale dunque risulta limitato nel tempo e nello spazio; in altri termini l'onda deve assumere una forma simile a quella mostrata in figura 29. Una tale onda è detta *impulso o pacchetto d'onda*. Mediante l'analisi di Fourier si è dimostrato che l'onda così rappresentata contiene, in dipendenza della sua durata o della sua estensione, un numero molto elevato di frequenze e lunghezze d'onda, pertanto in un mezzo dispersivo, ciascuna componente dell'onda ha una velocità di propagazione diversa. Nel caso citato di due onde di frequenze diverse, la prima delle (3), che dà la velocità di gruppo, si scrive

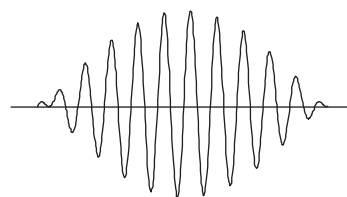


Fig. 19.29

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

e, se il pacchetto d'onde contiene molte frequenze

$$v_g = \frac{d\omega}{dk},$$

dove la derivata è valutata nel punto medio di ω e di k . Poiché $\omega = kv$, sostituendo nella precedente, si ottiene

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (54)$$

In un mezzo non dispersivo $dv/dk = 0$, e la velocità di gruppo coincide con la velocità di fase; solo in un mezzo dispersivo la velocità di gruppo può essere minore o maggiore di quella di fase.

Nel caso di onde superficiali di un liquido in acqua profonda, la velocità di fase è data dall'equazione (52), ossia

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Dunque

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}} = -\frac{v}{2k}.$$

La velocità di gruppo, equazione (54), risulta

$$v_g = \frac{1}{2}v;$$

essa è metà della velocità di fase. Se un'onda è prodotta in mare aperto, essa risulta distorta in modo tale che le componenti di lunghezza d'onda maggiore sfuggono dall'onda (creste) muovendosi più velocemente dal resto dell'onda, che si propaga con la velocità di gruppo. Viceversa le componenti di un'onda di risacca su una spiaggia poco profonda, si muovono con la stessa velocità poiché, come si è dimostrato, il mezzo non è dispersivo.

9. Preliminari di meccanica ondulatoria

I risultati conseguiti nei precedenti paragrafi costituiscono il fondamento della meccanica ondulatoria, che per opera di Born, De Broglie, Heisenberg e Schrödinger, negli anni venti, permise di dare una soddisfacente descrizione della dinamica delle particelle elementari.

L'ipotesi fondamentale di De Broglie consiste nell'attribuire alle particelle un comportamento ondulatorio, associando ad esse una lunghezza d'onda e una energia date rispettivamente da

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad E = h\nu,$$

dove h è la costante di Planck, p la quantità di moto e ν la frequenza. Queste relazioni possono essere scritte anche:

$$p = \frac{h}{2\pi}k, \quad E = \frac{h}{2\pi}\omega,$$

oppure:

$$p = \hbar k, \quad E = \hbar\omega, \quad (55)$$

dove $\hbar = h/2\pi$.

Il comportamento ondulatorio è presente anche in situazioni ordinarie; tuttavia poiché la costante di Planck è estremamente piccola ($h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$) tale comportamento è completamente trascurabile e sono valide le leggi della Meccanica classica. Viceversa nel caso di particelle atomiche o subatomiche, essendo le masse molto piccole, la lunghezza d'onda associata alla particella risulta dell'ordine di grandezza delle distanze atomiche. Infatti nel caso di un elettrone, massa $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, carica $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, soggetto alla differenza di potenziale V , l'energia cinetica acquistata è $p^2/(2m) = eV$, dove e è la carica dell'elettrone; si ha dunque $p = \sqrt{2meV}$. Dalle relazioni di De Broglie si ottiene

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{1,23 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{V}}.$$

Se la differenza di potenziale è di 100 V , la lunghezza d'onda associata all'elettrone risulta $\lambda = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. L'ipotesi ondulatoria è confortata da numerose conferme sperimentali; una delle quali è la diffrazione di un fascio di elettroni che avviene in maniera analoga a quella della radiazione elettromagnetica (1927). Pertanto, ad una particella che possiede velocità v ed energia cinetica $E = p^2/2m$, va associata un'onda ψ , che si propaga con velocità di fase

$$v_f = \lambda \nu = \frac{h}{p} \nu = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2}v,$$

metà della velocità di cui la particella è animata. Tuttavia, poiché un'onda monocromatica, come s'è detto, non trasporta alcuna informazione, questo risultato non può fornire alcun dato sulla localizzazione della particella.

In conformità a quanto si è detto in precedenza, ad una particella localizzata in una certa regione dello spazio deve corrispondere un pacchetto d'onde, la cui ampiezza è diversa da zero nella regione anzidetta e nulla altrove. Essendo la velocità di gruppo del pacchetto d'onde

$$v_g = \frac{d\omega}{dk},$$

facendo uso delle relazioni di De Broglie (55) e dell'espressione $E = p^2/2m$, si ottiene

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v.$$

In accordo con l'intuizione, si trova che la velocità di gruppo del pacchetto d'onde è proprio uguale alla velocità della particella.

Tuttavia finché la particella è libera, i risultati ottenuti non presentano rilevante significato fisico. Se viceversa la particella è confinata in una buca di potenziale o in generale, si trova in un sistema chiuso, l'onda associata dà luogo, per riflessione, a

vibrazioni stazionarie, che assumono un significato fondamentale nello studio di un sistema quantizzato.

Consideriamo infatti una particella confinata in una buca di potenziale lineare di lunghezza l , tale che l'energia potenziale $U(x)$ sia nulla per $0 < x < l$ ed infinita agli estremi. Ciò significa che in tali punti agiscono forze talmente intense da costringere la particella ad invertire il suo moto, perciò l'onda associata verrà riflessa. Questa situazione è formalmente identica a quella che si verifica per le vibrazioni stazionarie, in cui l'ampiezza delle armoniche è data da

$$\psi_n = A \sin \frac{n\pi x}{l},$$

che in meccanica ondulatoria sono dette *funzioni d'onda* o *autofunzioni*.

Supponendo che la particella abbia solo energia cinetica, per l'ipotesi di De Broglie, si ha

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \frac{h^2}{\lambda^2};$$

poiché $\lambda = 2l/n$, con n intero, si ottiene

$$E_n = \frac{1}{2m} \frac{h^2}{4l^2} n^2. \quad (56)$$

L'energia risulta quantizzata secondo l'intero n ; si ottengono cioè gli *autovalori* dell'energia. Il ragionamento può essere esteso ad una particella confinata in una scatola a forma di parallelepipedo; si ottengono autofunzioni ed autovalori corrispondenti alle vibrazioni descritte in proposito. Va sottolineato che l'energia minima della particella, $n = 1$, non è zero. Questo valore, energia di punto zero, ha un ruolo estremamente importante in molti sistemi quantizzati.

Le funzioni d'onda, opportunamente normalizzate, vanno interpretate in maniera probabilistica. Indichiamo con $\psi(x)$ la funzione d'onda di una particella confinata nella buca di potenziale considerata. Poiché l'intensità di tale onda è proporzionale a $|\psi(x)|^2$, che è la grandezza misurabile, si deduce che la probabilità di trovare la particella in una certa regione dello spazio, può essere espressa per mezzo dell'intensità. Siccome talvolta è opportuno esprimere la funzione d'onda con una grandezza complessa, indicando con ψ^* la coniugata di ψ , si avrà

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x).$$

Questa relazione va interpretata come densità di probabilità nel senso che, nel caso della buca di potenziale unidimensionale, la quantità

$$P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx,$$

dà la probabilità che la particella si trovi nell'intervallo compreso tra x e $x + dx$.

Vogliamo ora stabilire come ottenere le funzioni d'onda di una particella, che ovviamente dipendono dal suo stato dinamico. Tale stato dipende dalle forze agenti e dall'energia totale della particella

$$E = \frac{p^2}{2m} + U,$$

dove U è l'energia potenziale.

L'equazione alla quale devono soddisfare le funzioni d'onda è l'equazione differenziale formulata nel 1926 da Erwin Schrödinger, che nel caso unidimensionale si scrive:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\psi = 0, \quad (57)$$

in cui E ed U sono l'energia totale e l'energia potenziale della particella. Questa equazione, estesa in tre dimensioni, insieme alle opportune condizioni al contorno, permette di trovare le autofunzioni e gli autovalori dell'energia del sistema; essa in meccanica quantistica ha lo stesso ruolo dell'equazione di Newton della meccanica classica.

Possiamo chiarire la struttura dell'equazione di Schrödinger ricordando l'equazione d'onda per l'ampiezza delle vibrazioni stazionarie:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0.$$

Poiché per le relazioni di De Broglie, $k = 2\pi p/h$; la precedente diventa

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{h^2}p^2\psi = 0.$$

Se il moto si svolge in una regione in cui la particella ha energia totale E ed energia potenziale U , si ha

$$p^2 = 2m(E - U).$$

Si ottiene così l'equazione di Schrödinger nella forma (57). Consideriamo ora due casi semplici.

PARTICELLA LIBERA

In questo caso $U = 0$, pertanto l'equazione di Schrödinger (57) assume la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{h^2}\psi = 0. \quad (58)$$

Essendo

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \hbar k,$$

risulta

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

e l'equazione (58) diventa:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0,$$

identica all'equazione per l'ampiezza delle vibrazioni stazionarie. Questa equazione è soddisfatta dalle funzioni d'onda:

$$\psi = e^{ikx}, \quad \psi = e^{-ikx}.$$

La prima rappresenta una particella che si muove nella direzione x , la seconda una particella che si muove nella direzione $-x$. Nella notazione complessa si è ommesso il termine temporale $\exp(\omega t)$. Si osservi che per entrambe le soluzioni si ha

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x) = e^{ikx}e^{-ikx} = 1.$$

Ciò significa che la probabilità di trovare la particella è la stessa in tutti i punti.

PARTICELLA IN UNA BUCA DI POTENZIALE DI LUNGHEZZA l

È il problema considerato all'inizio e che ora risolviamo facendo uso dell'equazione di Schrödinger. Poiché nell'intervallo $0 < x < l$, $U = 0$, l'equazione

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{59}$$

con $k^2 = 2mE/\hbar^2$, va risolta imponendo le condizioni al contorno

$$x = 0, \quad \psi(0) = 0; \quad x = l, \quad \psi(l) = 0.$$

Soluzione della (59) sarà la funzione d'onda

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

dove A e B sono costanti. Imponendo le prima condizione al contorno, si ha

$$\psi(0) = A + B, \quad \Rightarrow \quad B = -A;$$

pertanto:

$$\psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA \sin kx = C \sin kx. \tag{60}$$

La seconda condizione al contorno impone

$$\psi(l) = C \sin kl = 0,$$

ed essendo C diversa da zero, si deve avere

$$k = \frac{n\pi}{l}, \quad \Rightarrow \quad p = \hbar k = \frac{n\pi\hbar}{l},$$

che dà i possibili valori della quantità di moto.

Sostituendo il valore di k nella (60), si ottiene la funzione d'onda che rappresenta la particella:

$$\psi(x) = C \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

e gli autovalori dell'energia

$$E_n = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} n^2,$$

come espresso dall'equazione (56). In figura 30 sono mostrate le funzioni d'onda, le densità di probabilità e le energie per $n = 1, 2, 3$.

10. Attenuazione

La propagazione delle onde elastiche nei mezzi reali è inevitabilmente soggetta a fenomeni dissipativi che, in generale, determinano conversione di energia meccanica in energia di altro genere. L'ampiezza dell'onda decresce al crescere della distanza dalla sorgente.

Consideriamo un'onda piana che si propaga lungo l'asse x e sia A l'ampiezza in corrispondenza ad una certa ascissa. Nell'intervallo $x, x+dx$, tale ampiezza si riduce di dA . Assumendo che la diminuzione relativa di A sia proporzionale allo spessore elementare dx , attraverso un coefficiente α , coefficiente di assorbimento, in formule si ha:

$$-\frac{dA}{A} = \alpha dx.$$

Fissata la condizione iniziale, $A = A_0$ per $x = 0$, e integrando la precedente si ha

$$\int \frac{dA}{A} = - \int \alpha dx, \quad \Rightarrow \quad \ln A = -\alpha x + C.$$

Essendo $C = \ln A_0$, si ottiene:

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\alpha x, \quad \Rightarrow \quad A = A_0 e^{-\alpha x}. \quad (61)$$

Il coefficiente di assorbimento ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. L'andamento della (61) è mostrato in figura 31.

La legge di attenuazione dell'intensità ovviamente risulta

$$J = J_0 e^{-2\alpha x}. \quad (62)$$

Le formule (61) e (62) sono simili a quelle che regolano l'attenuazione di altre grandezze; numero di particelle che attraversa un certo materiale, assorbimento di radiazione elettromagnetica, ecc. In ogni caso il coefficiente α dà informazioni sulle grandezze che

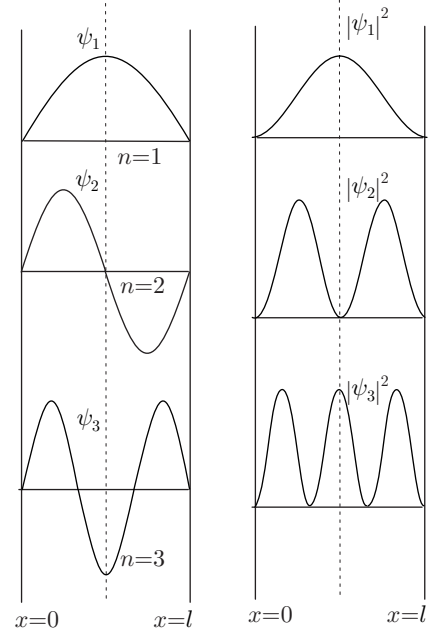


Fig. 19.30

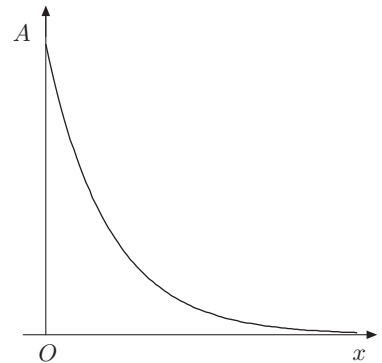


Fig. 19.31

determinano l'attenuazione e l'esperienza mostra che gli effetti dissipativi dipendono dalla frequenza dell'onda. Tra le cause che danno origine all'attenuazione, possiamo citare: la viscosità del mezzo, scambi termici tra le parti del mezzo, ossia condensazioni e rarefazioni non perfettamente adiabatiche, fenomeni di risonanza dell'assorbimento, che si possono verificare quando la frequenza dell'onda è dell'ordine dei MHz , e coincide con la frequenza di vibrazione propria delle molecole del mezzo. Si può pertanto affermare che lo studio dell'assorbimento della radiazione, in generale, costituisce un potente mezzo d'indagine della struttura della materia.

11. Principio di Huygens

La propagazione di un'onda è stata finora descritta in conformità al tipo di sorgente e alle proprietà del mezzo. È possibile tuttavia determinare l'onda in un punto del mezzo, ossia le sue grandezze caratteristiche: ampiezza, intensità e fase, senza un riferimento diretto alla sorgente. Questa possibilità è stabilita dal principio di Huygens e dalla successiva teoria di Kirchhoff.

Ricordiamo che la superficie d'onda è definita come il luogo dei punti in cui l'onda ha la stessa fase ad un determinato istante. Se l'onda è piana e la sua equazione è $\psi(vt - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r})$, la superficie d'onda avrà equazione

$$vt - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} = \text{cost},$$

che corrisponde ad un piano perpendicolare al versore $\hat{\mathbf{u}}$; analogamente, le onde sferiche hanno superfici d'onda, anch'esse sferiche, espresse da $vt - r = \text{cost}$.

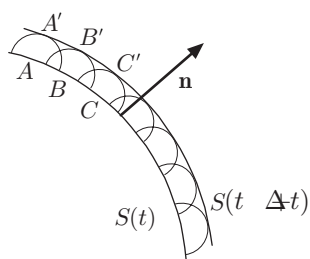


Fig. 19.32

Il principio o costruzione di Huygens (1624-1695) è fondato sulla caratteristica fondamentale della propagazione ondosa, ossia sul fatto che la superficie d'onda è costituita dal luogo dei punti in cui le particelle del mezzo hanno lo stesso spostamento. Precisamente, figura 32, consideriamo le particelle $A, B, C, \dots$, investite dalla superficie d'onda S , all'istante t ; ogni particella diventa sorgente di onde sferiche elementari o onde secondarie che, all'istante $t + \Delta t$ raggiungono le particelle immediatamente successive $A', B', C' \dots$; queste ultime subendo lo stesso spostamento, formano la nuova superficie d'onda S' , involuppo delle onde elementari. Il processo si ripete e dà luogo alla propagazione attraverso il mezzo. Si osservi che le onde elementari hanno due superfici involuppo; una interna e l'altra esterna che è quella atta a descrivere la propagazione. Nel caso delle onde elettromagnetiche questa costruzione è ancora valida, ma non ha il semplice significato meccanico che le abbiamo attribuito. Infatti le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto dove non esistono particelle che

vibrano; tuttavia esse soddisfano all'equazione delle onde, dove al posto dello spostamento va sostituito il campo elettromagnetico.

Nella seconda metà del secolo scorso la costruzione di Huygens fu rielaborata da Kirchhoff (1824-1887) in una teoria che comprende qualunque propagazione ondosa. Senza entrare in dettagli che vengono svolti più opportunamente in ottica, questa teoria stabilisce che, noti i valori di $\psi(\mathbf{r}, t)$ in tutti i punti di una generica superficie chiusa S che include le sorgenti σ , figura 33, è possibile ricavare l'onda risultante in un punto P dello spazio esterno alla superficie mediante l'equazione:

$$\psi(P, t) = \int_S f(\theta) \frac{\psi(vt - r)}{r} dS. \quad (63)$$

L'interpretazione della (63) è piuttosto semplice: il termine $\psi(vt - r)/r$ rappresenta un'onda sferica emessa dall'elemento di superficie dS all'istante $t - r/v$, che ha raggiunto P all'istante t ; il termine $f(\theta)$ è un fattore direzionale che indica come le onde elementari non abbiano la stessa ampiezza in tutte le direzioni. Infatti detto θ l'angolo tra la normale all'elemento dS ed il vettore che indica la posizione del punto rispetto a dS , è

$$f(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta).$$

L'ampiezza massima corrisponde a $\theta = 0$, propagazione in avanti; l'ampiezza minima a $\theta = \pi$, propagazione all'indietro. Pertanto l'onda in P è data dal contributo delle onde sferiche emesse da ogni elemento della superficie chiusa che contiene le sorgenti, alle quali dunque non è necessario fare alcun riferimento.

In realtà l'espressione di $\psi(P, t)$ è leggermente più complicata della (63), che in ogni caso risulta adatta alle considerazioni che verranno fatte; va inoltre detto che, svolgendo la teoria generale, si trova che occorre moltiplicare per il fattore $-i$, il quale indica che le onde elementari vengono emesse con una fase uguale a $-\pi/2$.

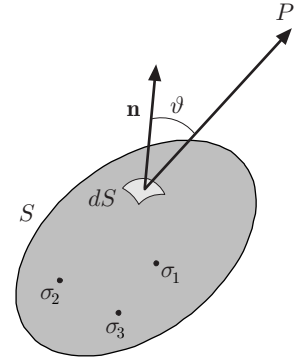


Fig. 19.33

12. Diffrazione

I fenomeni di diffrazione nella propagazione ondosa sono molto comuni. Sappiamo che è possibile udire suoni da una sorgente posta dietro un ostacolo che intercetta la propagazione diretta, per raggi, verso il nostro orecchio; un'onda in acqua si "sparpaglia" oltre una diga frangiflutti, ecc. In genere questi fenomeni si verificano quando un'onda, nel propagarsi, è distorta da un ostacolo che ha dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda. L'ostacolo può essere uno schermo con una apertura, di grandezza confrontabile con la lunghezza d'onda, che permette il passaggio di una piccola porzione del fronte d'onda incidente o viceversa un oggetto, di dimensioni che rispettano i criteri suddetti, che impe-

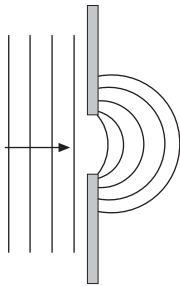


Fig. 19.34

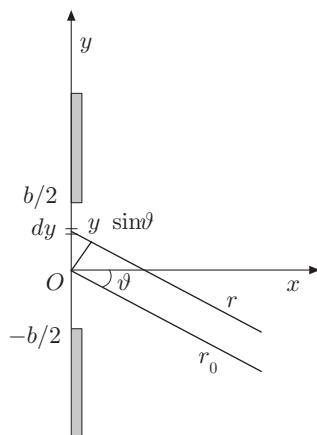


Fig. 19.35

disce la propagazione di una piccola porzione del fronte d'onda. In figura 34 è mostrata la diffrazione di un'onda piana, prodotta sulla superficie di un liquido, incidente su uno schermo in cui è praticata una piccola apertura.

I fenomeni di diffrazione danno luogo a massimi e minimi di intensità o meglio a una ridistribuzione dell'intensità, come avviene per l'interferenza. Anzi si può affermare che sostanzialmente interferenza e diffrazione sono la stessa cosa; solo che l'interferenza è determinata da due o più sorgenti, la diffrazione è il risultato dell'interferenza dell'onda con se stessa. Distinguiamo la diffrazione in due categorie: *diffrazione di Fraunhofer* e *diffrazione di Fresnel*. Nella prima l'onda incidente è piana; la figura di diffrazione viene osservata a distanza sufficientemente grande, così da poter assumere piana anche l'onda diffratta; nella seconda o l'onda incidente è sferica oppure l'onda diffratta viene osservata in un particolare punto dello spazio, ovvero sono verificate entrambe le condizioni. La sede più appropriata per studiare questi fenomeni, che hanno bisogno di una adeguata elaborazione matematica, è l'ottica. Ci limiteremo pertanto ad esaminare la diffrazione di Fraunhofer prodotta da una fenditura rettangolare, come tipico esempio di applicazione della formula di Kirchhoff.

Consideriamo un'onda piana che incide su una fenditura, di altezza b e lunghezza L , praticata su uno schermo. In conformità alla (63), possiamo scegliere una superficie chiusa, contenente la sorgente e di cui una parte sia costituita dalla fenditura. Con buona approssimazione si può assumere che solo questa parte della superficie costituisca il luogo dei punti sorgenti di onde sferiche elementari, mentre il resto sia perfettamente opaco. Stabilito un riferimento con origine nel centro della fenditura, come in figura 35, suddividiamo la fenditura in elementi di superficie $dS = Ldy$ paralleli. Tali elementi costituiscono le sorgenti di onde sferiche che, per maggiore semplicità nei calcoli, scriviamo con la notazione esponenziale:

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}, \quad (64)$$

dove A/r è l'ampiezza alla distanza r dalle sorgenti. Se non ci fossero effetti di diffrazione l'onda che attraversa la fenditura si propagherebbe solo attraverso la sezione da essa delimitata; l'intensità sarebbe diversa da zero solo per $\theta = 0$. Poiché viceversa sono presenti tali effetti, si avrà una distribuzione angolare dell'intensità, figura di diffrazione. Supponiamo che gli angoli θ siano piccoli e che la diffrazione venga osservata a una distanza grande dalla fenditura, come richiede la condizione di Fraunhofer. Allora possiamo ritenere che il fattore di obliquità $f(\theta)$ sia pressoché costante e che il termine A/r non vari sensibilmente rispetto all'e-

spenziale del numeratore. In conformità a queste ipotesi la (63) diventa

$$\psi = C \int_S e^{i(kr - \omega t)} dS, \quad (65)$$

dove C comprende i fattori costanti anzidetti. Dalla figura risulta

$$r = r_0 + y \sin \theta,$$

dove r_0 corrisponde ad $y = 0$; pertanto la (65) si scrive

$$\psi = CLe^{ikr_0} e^{-i\omega t} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} dy.$$

Omettendo il termine $\exp(-i\omega t)$ e integrando, si ottiene

$$\begin{aligned} \psi &= CLe^{ikr_0} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} dy = \frac{CLe^{ikr_0}}{ik \sin \theta} [e^{iky \sin \theta}]_{-b/2}^{+b/2} \\ &= \frac{2CLe^{ikr_0}}{2ik \sin \theta} [e^{i(kb \sin \theta)/2} - e^{-i(kb \sin \theta)/2}] \\ &= bCLe^{ikr_0} \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2}. \end{aligned}$$

Indicando con $\beta = (kb \sin \theta)/2$, l'intensità risulta

$$J = J_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}.$$

In figura 36 è mostrato l'andamento dell'intensità relativa J/J_0 in funzione di $(b \sin \theta)/\lambda$; essa risulta massima per $\beta = 0$, nulla per $\beta = \pm n\pi$, oppure per $(b \sin \theta)/\lambda = \pm n$, ossia per

$$b \sin \theta = \pm n\lambda,$$

che è la formula elementare per la diffrazione prodotta da una fenditura.

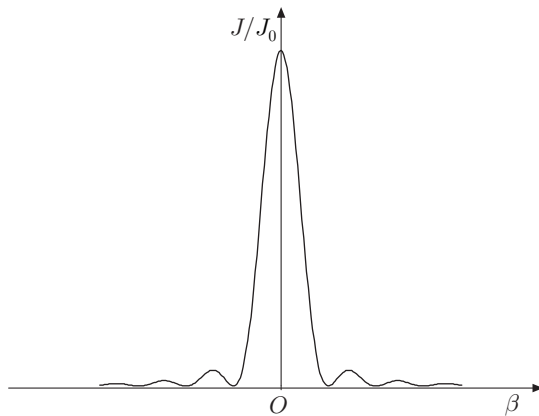


Fig. 19.36