

||| 20. Simmetria Invarianza Relatività ristretta

||| 1. Simmetria

La simmetria, intesa anche come canone di bellezza nelle opere d'arte classiche, è una caratteristica fondamentale della Natura. In Biologia, a parte altre forme di simmetria più complesse, è quasi sempre presente la simmetria bilaterale; infatti è possibile dividere un essere vivente in due parti speculari mediante un piano longitudinale (simmetria destra-sinistra). In Cristallografia la cella elementare del reticolo resta inalterata per traslazioni e rotazioni attorno ad un punto o ad un asse. Si potrebbe procedere a lungo con queste considerazioni. Per fissare le idee, consideriamo un prisma di sezione quadrata; se facciamo ruotare il prisma attorno al suo asse longitudinale di un angolo di 90° , o multiplo di questo, la configurazione risultante è simmetrica rispetto a rotazioni multiple di 90° ; diciamo che il prisma è simmetrico per tali rotazioni. La rotazione di un cilindro attorno al suo asse lascia inalterata la sua configurazione per qualunque angolo di rotazione; diciamo che il cilindro è simmetrico per rotazioni di un qualunque angolo. Le rotazioni e le traslazioni costituiscono *operazioni di simmetria*. In seguito all'operazione di simmetria l'oggetto cambia la sua posizione effettiva mentre la sua immagine resta immutata. In altri termini l'immagine è invariante rispetto all'operazione di simmetria.

Una legge fisica è definita mediante un'equazione valida in un certo riferimento; se la legge possiede una proprietà di simmetria, l'equazione deve essere valida quando il riferimento viene trasformato secondo quella proprietà di simmetria; allora l'equazione si dice invariante per tale operazione. Per quanto detto più sopra, l'analogia che se ne trae è che la legge fisica corrisponde all'*oggetto* che possiede la simmetria, mentre l'immagine dell'oggetto, ossia la grandezza osservabile, corrisponde all'*equazione* che rappresenta la legge.

Va notato che, mantenendo fermo l'oggetto, avremmo potuto ruotare l'osservatore nel verso opposto. Questo significa che invece di applicare l'operazione di simmetria alle osservabili espresse

dalla legge fisica, è possibile applicare l'operazione di simmetria, o meglio la sua inversa, alle coordinate del riferimento in cui le osservabili sono espresse. Anche in tal caso l'equazione che rappresenta la legge deve restare invariata; dunque le operazioni di simmetria sono collegate alle trasformazioni delle coordinate delle grandezze osservabili. A queste ultime possono essere applicate gran parte delle operazioni di simmetria, ma non tutte le leggi fisiche presentano ogni proprietà di simmetria. Prenderemo in considerazione le simmetrie alle quali obbediscono le leggi della Meccanica, ossia le traslazioni, le rotazioni, l'inversione della coordinata temporale, l'inversione delle coordinate spaziali (simmetria destra-sinistra) e la simmetria per trasformazioni galileane.

In Fisica la simmetria ha un ruolo estremamente importante e l'esperienza ha confermato che le leggi fondamentali possiedono un alto grado di simmetria; infatti se questa circostanza non si verificasse si potrebbero avere molti dubbi sulla validità della legge stessa. Per esempio, con la scoperta dell'antiprotone è stata confermata sperimentalmente l'esistenza dell'antimateria; tuttavia, per quanto ne sappiamo, l'Universo è composto esclusivamente da materia. Se la simmetria deve rimanere salva, dobbiamo supporre che esista un Universo formato da antimateria; allora possiamo porci il problema se la natura mostra una spiccata preferenza per la materia, ossia una asimmetria, oppure se i nostri mezzi di indagine sono così poco raffinati da non permetterci un'indagine esauriente della questione.

2. Invarianza della equazione di Newton

I vettori, come è noto, godono della proprietà di invarianza per traslazioni e rotazioni delle coordinate. Dunque qualunque legge fisica espressa da relazioni vettoriali è invariante per tali operazioni. La seconda equazione di Newton è una equazione vettoriale

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

pertanto è invariante per traslazioni e rotazioni. Può essere interessante verificare questa proprietà riferendoci alle componenti cartesiane.

INVARIANZA PER TRASLAZIONE

Consideriamo un sistema costituito da una massa collegata ad una molla ideale, figura 1. Operiamo una traslazione l del sistema dalla posizione iniziale (a) a quella finale (b). La traslazione è equivalente alla trasformazione della coordinata della massa dal riferimento con origine in O al riferimento con origine in O' :

$$x = x' + l, \quad x' = x - l.$$

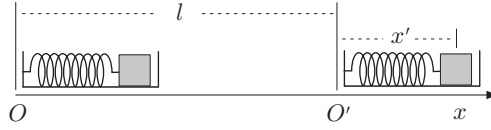


Fig. 20.1

Poiché la forza è interna al sistema, risulta anche

$$F_x = F_{x'};$$

infatti trattandosi di una forza elastica, è

$$F_x = -k(x - x_0),$$

dove x_0 è la posizione di equilibrio. Ma nel riferimento O' , si ha

$$F_{x'} = -k(x' - x'_0) = -k[(x - l) - (x_0 - l)] = -k(x - x_0).$$

Ossia $F_x = F_{x'}$. D'altra parte nel riferimento O l'equazione della dinamica è

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

nel riferimento O' :

$$F_{x'} = m \frac{d^2 x'}{dt^2} = m \frac{d^2 (x - l)}{dt^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Otteniamo una espressione identica alla precedente: la seconda legge della dinamica è invariante per traslazioni. Se il sistema nella posizione (a) esegue oscillazioni armoniche, anche nella posizione (b) eseguirà identiche oscillazioni.

INVARIANZA PER ROTAZIONE

Per dimostrare che la seconda equazione della dinamica è invariante per rotazioni, consideriamo due riferimenti cartesiani ortogonali O e O' con le origini coincidenti e supponiamo di ruotare O' di un angolo φ . Le coordinate x', y' sono legate alle coordinate x, y dalle relazioni:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo per la massa m e deriviamo due volte rispetto al tempo; per φ costante, si ha:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \cos \varphi - m \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \varphi \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \varphi + m \frac{d^2 x}{dt^2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Tenuto conto che nel riferimento O :

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2},$$

le precedenti si scrivono:

$$F_{x'} = m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_x \cos \varphi - F_y \sin \varphi$$

$$F_{y'} = m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi,$$

equivalenti alle corrispondenti relazioni del riferimento O . Riferendoci al sistema massa molla considerato, in un riferimento O' ruotato, cambiano le componenti della forza, ma le oscillazioni che compie la massa sono identiche. La forza peraltro può essere di qualsiasi altra natura, purché interna al sistema.

Se il sistema è soggetto ad una forza esterna come per esempio la gravità, per ottenere identiche oscillazioni, bisogna ruotare dello stesso angolo il sistema complessivo, costituito dalla massa soggetta alla forza elastica e dalla forza esterna. Nell'operazione di simmetria occorre sempre operare su tutte le variabili fisiche che intervengono nel fenomeno.

|| 2.1. Invarianza per inversione della coordinata temporale

In Meccanica classica il tempo è stato assunto come grandezza assoluta, ossia la coordinata temporale non muta in tutti i riferimenti in moto relativo. Resta da verificare se l'equazione fondamentale della dinamica sia ancora valida quando viene invertito il segno della variabile temporale e se dall'esame della soluzione dell'equazione sia possibile distinguere il passato e il futuro di un fenomeno. Consideriamo, per esempio, l'urto centrale elastico tra due masse uguali che procedono in verso opposto; dopo l'urto le masse invertono il loro moto e si allontanano l'una dall'altra con velocità opposte. Se filmiamo l'evento e successivamente proiettiamo il film al contrario, in modo da invertire la direzione del tempo, si osservano le due masse avvicinarsi, urtarsi e infine allontanarsi, esattamente come nella ripresa diretta. Solo se nel filmato viene visualizzato anche un orologio è possibile distinguere le successioni diretta ed inversa. Supponiamo, per semplicità, che in un riferimento O le coordinate siano x, t , mentre in un riferimento O' la coordinata temporale abbia segno opposto. Se all'istante $t = 0$ le scale dei tempi nei due riferimenti coincidono, le trasformazioni di coordinate dei riferimenti sono

$$x' = x, \quad t' = -t.$$

Se le forze sono interne al sistema, come nell'urto considerato, si ha

$$F_{x'} = F_x.$$

Tenuto conto che $dt' = -dt$, l'accelerazione nel riferimento O' è

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{dx}{dt} \right) = -\frac{d}{dt} \left(-\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Poiché le accelerazioni risultano uguali, l'equazione di Newton ha la stessa forma per inversione della variabile temporale. Nel caso in cui sia presente l'attrito, o qualunque processo dissipativo, non è possibile invertire il verso del tempo. Infatti nel riferimento O' , si ha

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} = -v.$$

Poiché, per esempio, la forza di attrito viscoso è del tipo

$$F_A = -bv,$$

nel riferimento O' è

$$F'_A = -bv' = bv = -F_A.$$

Ma si è verificato che, per inversione della variabile temporale,

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

dunque si ottiene

$$F'_A = -m \frac{d^2x'}{dt'^2}.$$

Un processo dissipativo non è invariante per inversione della variabile temporale. Questa conclusione è generale ed è legata a tutti i processi irreversibili. In tal modo si definisce la così detta *freccia del tempo*, secondo la quale nel fenomeno è possibile distinguere passato e futuro. In generale, un qualsiasi fenomeno che dipende dal verso della velocità, non è invariante per inversione della variabile temporale. L'energia cinetica, che dipende da v^2 è invariante per questa operazione di simmetria.

2.2. Inversione delle coordinate spaziali

L'inversione delle coordinate spaziali si chiama anche trasformazione di parità. Le equazioni di trasformazione sono

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad t' = t,$$

$$F_{x'} = -F_x, \quad F_{y'} = -F_y, \quad F_{z'} = -F_z.$$

Come prima, è facile dimostrare l'invarianza della seconda equazione di Newton secondo tali trasformazioni. In figura 2 è mostrato come avviene l'inversione delle coordinate spaziali; l'immagine speculare del riferimento O viene ruotata di 180° attorno all'asse x . La trasformazione di parità è rilevante in Fisica nucleare. Tuttavia esistono molti processi fisici in cui la trasformazione di parità non è verificata: si pensi ad una vite destrorsa, che non conserva la sua caratteristica se vista allo specchio.

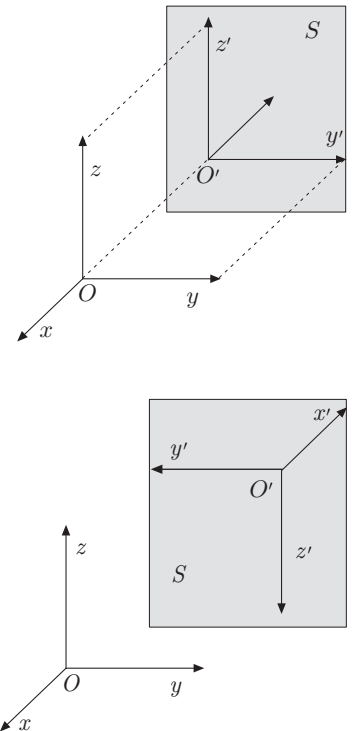


Fig. 20.2

III 3. Invarianza dell'energia potenziale

L'invarianza per traslazione e per rotazione dell'energia potenziale implica la conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Consideriamo l'energia potenziale di due particelle di coordinate x_1, x_2 . Se l'energia potenziale delle particelle è invariante per traslazione, si deve avere

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + l, x_2 + l)$$

dove l è una traslazione lungo l'asse x . La verifica è particolarmente semplice per una forma di energia potenziale del tipo:

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2.$$

Per una traslazione l , si ha

$$U(x_1 + l, x_2 + l) = [(x_1 + l) - (x_2 + l)]^2 = (x_1 - x_2)^2 \equiv U(x_1, x_2).$$

Poiché inoltre

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2},$$

si trae immediatamente:

$$F_1 = -F_2.$$

Segue che la risultante delle forze di interazione tra le particelle è nulla, come vuole la terza legge della dinamica. Dunque la quantità di moto è costante. Questo risultato si estende immediatamente a tre dimensioni, ossia al caso in cui l'energia potenziale è funzione unicamente di $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

dove $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ sono i vettori che individuano le posizioni delle particelle.

Più in generale, se l'energia potenziale è funzione delle differenze tra i vettori che individuano le posizioni delle particelle $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, l'energia potenziale è invariante per traslazioni ed è costante la quantità di moto. Dimostriamo ora l'invarianza dell'energia potenziale per rotazioni. Chiamiamo per brevità con $\mathcal{R}$ l'operatore rotazione, costituito per esempio dalle equazioni di trasformazione di coordinate, e con $\mathbf{r}$ il vettore posizione della particella. Sia $\mathcal{R}\mathbf{r}$ il vettore che si ottiene in seguito alla rotazione; l'energia potenziale è invariante per rotazioni, ossia

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = U(\mathcal{R}\mathbf{r}_1, \mathcal{R}\mathbf{r}_2, \dots, \mathcal{R}\mathbf{r}_n),$$

se U dipende dalla mutua distanza tra le particelle $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Se infatti consideriamo, come prima, l'energia potenziale di interazione tra due particelle:

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2);$$

in seguito alla rotazione i vettori $\mathcal{R}\mathbf{r}_1$, $\mathcal{R}\mathbf{r}_2$, mutano di direzione ma non muta il modulo della loro differenza $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. L'energia potenziale risulta invariante se dipende dal modulo di tale distanza. Allora la forza è diretta lungo la congiungente $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ed è una forza di interazione, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Il momento risultante di tali forze è nullo qualunque sia il polo. Si ha come conseguenza la conservazione del momento angolare.

4. Invarianza per trasformazioni galileane

Nei capitoli dedicati alla cinematica (V) e alla dinamica relativa (XI), si è trovato che il movimento di un punto materiale dipende dal riferimento, ossia che è possibile descrivere il moto in un riferimento qualsiasi applicando semplicemente le leggi di trasformazione di coordinate; in altri termini, la stessa realtà fisica può essere descritta in maniera diversa da osservatori animati di moto relativo qualsiasi. In particolare si è trovato che l'accelerazione è invariante in tutti i riferimenti inerziali, ossia per trasformazioni galileane. Si è dunque dedotto che l'equazione fondamentale della dinamica risulta invariante per tali trasformazioni.

Questo risultato merita qualche commento: la convenzione universalmente accettata che un riferimento con assi orientati verso stelle fisse costituisca un campione di riferimento inerziale, e quindi tutti gli ∞^3 riferimenti in moto traslatorio uniforme costituiscano riferimenti inerziali, va oltre le nostre attuali possibilità di verifiche sperimentali. Non è possibile, con gli attuali mezzi, misurare l'accelerazione di stelle lontane, se questa è inferiore a 10^{-6} m/s^2 . Per esempio, l'accelerazione del Sole verso il centro della nostra galassia non è nota sperimentalmente, tuttavia osservazioni sullo spostamento delle righe spettrali per effetto Doppler, fanno ritenere che la velocità del Sole sia dell'ordine di $3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$; se esso si muovesse di moto circolare uniforme rispetto al centro della galassia, stimando che la distanza R del Sole dal centro della galassia sia $3 \cdot 10^{20} \text{ m}$, l'accelerazione centripeta risulterebbe $a = v^2/R \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$. Pertanto l'esperienza non ci permette di stabilire se l'accelerazione centripeta del Sole sia maggiore di questo valore, né che il centro della galassia risulti accelerato in maniera significativa.

Va ancora osservato che la legge di inerzia, nota come prima legge di Newton, stabilisce che un corpo non soggetto ad alcuna forza si muove con velocità costante. Essa presuppone un metodo indipendente per stabilire se in certo riferimento agiscano forze o meno; in realtà accertare l'assenza di forze comporta verificare assenza di accelerazioni, e ciò richiede un riferimento rispetto al quale sia possibile misurare queste ultime senza ambiguità. Il problema parrebbe senza soluzione, tuttavia l'esperienza mostra

che tutte le forze di interazione, come la forza gravitazionale e le forze elettromagnetiche, diminuiscono rapidamente al crescere della distanza, almeno con l'inverso del quadrato della distanza. Pertanto possiamo ragionevolmente ritenere che un corpo molto lontano da tutti gli altri non sia praticamente soggetto ad alcuna forza e quindi non venga accelerato. Per esempio, sappiamo che l'accelerazione cui è soggetto ogni corpo sulla terra è quella di gravità; l'accelerazione dovuta alla forza gravitazionale esercitata dal Sole è soltanto $0,006 m/s^2$, perciò quella dovuta ad una stella lontana è senza dubbio trascurabile. È questo il motivo che ci permette di stabilire come riferimento inerziale un qualunque riferimento con assi orientati verso stelle fisse.

|| 4.1. Legge di conservazione della quantità di moto

Postulata la conservazione della massa e dell'energia nella sua forma più generale, consideriamo l'urto tra due particelle in un riferimento O . Supponendo che dopo l'urto le particelle siano così lontane da poter trascurare la loro interazione, la conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 + Q, \quad (1)$$

essendo V la velocità dopo l'urto e Q l'energia dissipata o energia propria del sistema, indipendente dal riferimento.

Sia O' un riferimento che trasla rispetto al primo con velocità $\mathbf{v}_t$ costante. In questo riferimento la conservazione dell'energia è espressa da:

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2 + Q. \quad (2)$$

Essendo l'energia invariante, le (1) e (2) devono essere uguali. Poiché le velocità prima e dopo l'urto risultano

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_t & \mathbf{v}_2' &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_t \\ \mathbf{V}_1' &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_t & \mathbf{V}_2' &= \mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_t, \end{aligned}$$

si consideri la relazione:

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_1' = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_t) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_t) = v_1^2 + v_t^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_t,$$

e le altre simili. Sostituendo nella (2), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_1(v_1^2 + v_t^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_t) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 + v_t^2 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_t) \\ &= \frac{1}{2}m_1(V_1^2 + v_t^2 - 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{v}_t) + \frac{1}{2}m_2(V_2^2 + v_t^2 - 2\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{v}_t) + Q. \end{aligned}$$

Questa equazione è vera purchè si abbia

$$(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_t = (m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{v}_t,$$

la quale dovendo essere soddisfatta per qualunque valore di $\mathbf{v}_t$, implica:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2,$$

che è proprio la legge di conservazione della quantità di moto. Per quanto riguarda la conservazione del momento angolare, valgono le conclusioni ottenute nel paragrafo precedente.

L'invarianza delle leggi fisiche per operazioni di simmetria è una caratteristica fondamentale della Natura e il suo studio meriterebbe maggiore approfondimento. Tuttavia, da quanto si è detto, si possono trarre conclusioni piuttosto generali. Se un fenomeno fisico obbedisce a certe leggi di simmetria, esiste sempre una grandezza che si conserva; in altri termini una simmetria implica una legge di conservazione. La conservazione della quantità di moto e del momento angolare sono conseguenza della simmetria per traslazioni e per rotazioni. La conservazione dell'energia è conseguenza della simmetria per traslazioni nel tempo; infatti si è dimostrato che l'energia totale di un sistema di particelle interagenti mediante forze che non dipendono esplicitamente dal tempo, è costante. Precisamente, la conservazione dell'energia implica l'esistenza di una grandezza, l'energia totale, che è invariante rispetto al tempo e rispetto alle coordinate; questa grandezza è dunque invariante per traslazioni spaziali e temporali. Le proprietà di simmetria sono mezzi estremamente potenti; infatti le leggi di conservazione sono indipendenti dalla particolare traiettoria e, spesso, dalla forza. Una legge di conservazione può fornire risultati generali, senza entrare nei dettagli delle equazioni del moto.

5. Velocità della luce

La velocità della luce nel vuoto è una delle costanti fondamentali della Fisica; essa è la velocità con cui si propagano le onde elettromagnetiche nel vuoto, indipendentemente dalla loro frequenza. Nel corso dei secoli la velocità della luce è stata misurata da molti scienziati, con metodi sempre più raffinati. Il valore della velocità della luce nel vuoto, ottenuto con i metodi più avanzati e oggi universalmente accettato, è

$$c = (2,997925 \pm 0,000003) \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Dal punto di vista storico, appare opportuno ricordare due esperienze fondamentali. Già in epoche antecedenti al XVII secolo gli scienziati ritenevano che la velocità di propagazione dei segnali luminosi avesse un valore finito; tuttavia la conferma sperimentale venne solo nel 1676, quando Roemer ne misurò il valore osservando le anomalie delle eclissi di Io, la luna più vicina a Giove. L'eclisse di Io avviene ogni 42 ore, quando Giove si frappone tra

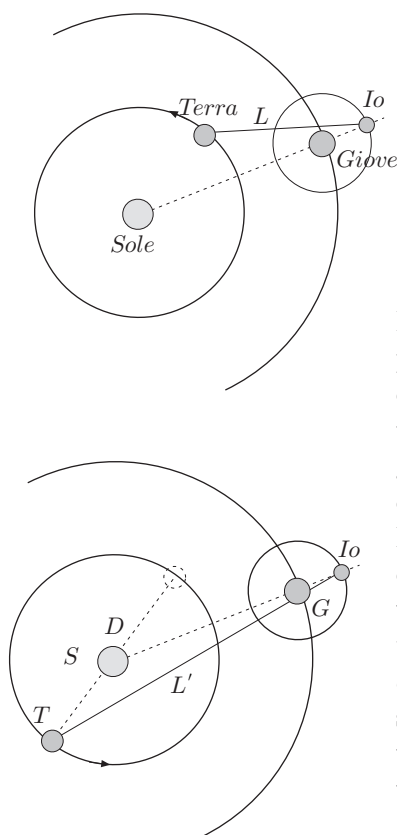


Fig. 20.3

il Sole e la sua luna. A causa della velocità finita della luce, questo fenomeno viene osservato dalla Terra con un ritardo $\Delta t = L/c$, dove L è la distanza Io-Terra, figura 3. Dopo sei mesi la Terra si trova nella posizione diametralmente opposta a quella iniziale, dove $L' \approx L + D$, dunque il ritardo del segnale luminoso diventa

$$\Delta t' \approx \frac{L}{c} + \frac{D}{c}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t' - \Delta t = \frac{D}{c}.$$

Roemer durante sei mesi di osservazioni, misurò un ritardo complessivo $\Delta t' - \Delta t$ di circa 20 minuti, valore corrispondente al tempo che impiega la luce per attraversare una distanza uguale al diametro dell'orbita terrestre intorno al Sole. Poiché D non era noto con grande accuratezza, ricavò il valore $c = 214300 \text{ km/s}$. La misura di Bradley (1725), è basata sull'osservazione dell'aberrazione della luce di una stella lontana. Una stella allo zenit, ossia sulla verticale del luogo di osservazione, nel corso di un anno sembra muoversi lungo un'orbita quasi circolare. Questo moto apparente è una conseguenza diretta del valore finito della velocità della luce, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, e del moto di rivoluzione della terra che avviene su un'orbita pressoché circolare, con velocità $v = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$; la velocità della terra nella rotazione attorno al proprio asse è 100 volte minore, dunque trascurabile.

Per spiegare il fenomeno dell'aberrazione, di solito si adduce l'analogia di un uomo che cammina nella pioggia, che si suppone cada verticalmente; tanto più velocemente l'uomo procede, tanto più inclinato deve tenere l'ombrello per potersi riparare. La velocità della pioggia rispetto all'uomo in moto, è sempre maggiore della sua velocità effettiva. Tuttavia non è corretto interpretare il fenomeno in termini di velocità relativa, perché vedremo che la velocità della luce non dipende dal riferimento. È dunque più opportuno citare la spiegazione del fenomeno dovuta allo stesso Bradley.

La direzione di una stella, rispetto alla verticale terrestre, può essere stabilita osservando la stella attraverso un tubo sottile, agli estremi del quale sono disposti due traguardi, analogamente a quanto avviene negli ordinari telescopi. Si supponga che un raggio di luce proveniente da una stella si propaghi lungo CA , in direzione ortogonale al segmento AB , figura 4. Se l'osservatore è fermo in A , la stella, sia che la luce abbia velocità finita oppure infinita, appare lungo la direzione CA . Immaginando che la luce si propaghi da C ad A con velocità c finita e che l'osservatore si muova da B verso A con velocità v , il raggio di luce e l'osservatore giungeranno in A nello stesso istante, se il rapporto tra c e v è uguale al rapporto tra i segmenti CA e BA ; infatti essendo $CA = ct$ e $BA = vt$, si ha $CA/BA = c/v$. Supponendo che il segmento BC sia il tubo considerato sopra, la "particella" di luce

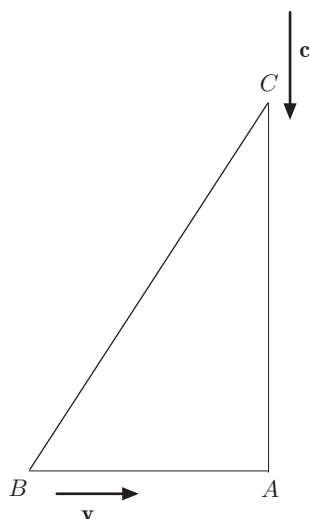


Fig. 20.4

che parte da C potrà colpire l'occhio dell'osservatore durante il suo moto da B ad A , solo se il tubo è inclinato di un angolo θ tale da rispettare i rapporti suddetti. Dunque il tubo o il telescopio non punta nella direzione vera della stella. L'angolo di inclinazione, o aberrazione della stella è dato dalla relazione

$$\tan \theta = \frac{v}{c}, \quad (3)$$

dove v è la velocità di rivoluzione della terra. Siccome quest'ultima è molto minore di c , sostituendo il valore sopra riportato, risulta $\tan \theta \approx \theta = 20,5''$. Poiché la velocità della terra cambia continuamente di direzione durante l'anno, l'aberrazione della stella cambia di conseguenza e il moto apparente di una stella allo zenit risulta pressoché circolare. Bradley progettò un telescopio che poteva essere inclinato con estrema precisione rispetto alla verticale e condusse una serie molto accurata di osservazioni dell'aberrazione della stella γ -Draconis, che si trova allo zenit alla latitudine di Londra. Da queste misure ricavò che il diametro angolare dell'orbita apparente di questa stella è uguale a $40,5''$ e dalla (3) ricavò il valore della velocità della luce. Va osservato che nell'astronomia di quell'epoca esisteva una notevole incertezza sulla misura della parallasse di una stella, descritta nel capitolo I, perché non era noto il fenomeno dell'aberrazione; fu merito di Bradley distinguere in maniera netta i due fenomeni. D'altra parte i valori trovati per la parallasse sono sempre molto minori di quelli dell'aberrazione.

6. Esperienza di Michelson-Morley

In conformità alle trasformazioni galileane, detta c la velocità della luce in un riferimento fisso e v_t la velocità di trascinamento di un riferimento inerziale, la velocità della luce rispetto a tale riferimento, dovrebbe essere:

$$v = c \pm v_t, \quad (4)$$

secondo che il moto avvenga verso la sorgente luminosa o in quello opposto. In Fisica classica la (4) è valida per le onde elastiche e nelle situazioni ordinarie. Se intervengono segnali luminosi l'esperienza mostra che si ha sempre

$$v = c,$$

per qualunque riferimento, indipendentemente dalla velocità di trascinamento. Questo risultato è il fondamento della teoria della relatività.

Nel XIX secolo, una volta riconosciuta la natura ondulatoria della luce, in analogia alle onde elastiche, si riteneva che esistesse un mezzo di caratteristiche straordinarie che permettesse la

propagazione delle onde luminose. Infatti, poiché tali onde sono trasversali, il mezzo avrebbe dovuto avere un modulo di rigidità elevatissimo e una densità estremamente piccola, in accordo con la formula che esprime la velocità della propagazione ondosa in un mezzo elastico; inoltre avrebbe dovuto essere perfettamente trasparente. Questo mezzo fu chiamato *etere cosmico*. Lo stesso Maxwell riteneva che *se viene trasmessa energia, in un certo tempo, da un corpo a un altro, deve esserci un mezzo che contiene l'energia dopo che essa ha lasciato il primo corpo e prima che abbia raggiunto il secondo*.

Dunque secondo le trasformazioni galileane la velocità della luce, in un riferimento in moto rispetto all'etere, dovrebbe essere diversa da quella misurata nel riferimento solidale con l'etere in quiete, in modo da verificare la (4). In particolare, se la terra si muovesse rispetto all'etere senza perturbarlo, la velocità della luce rispetto alla terra dovrebbe dipendere dalla direzione di propagazione. Infatti, nel riferimento solidale con la terra, la velocità di propagazione di un raggio luminoso dovrebbe essere $c - v_t$ oppure $c + v_t$ secondo che esso si propaghi nel verso concorde con la velocità orbitale v_t della terra, oppure in verso opposto. Se la luce si propagasse in direzione ortogonale a v_t , la velocità della luce rispetto all'osservatore terrestre dovrebbe essere $\sqrt{c^2 - v_t^2}$.

Poiché $v_t/c \approx 10^{-4}$, si capisce che la velocità della luce nel riferimento terrestre dovrebbe differire di molto poco da quella nel riferimento fisso con l'etere. Ammettendo dunque valide le trasformazioni galileane, una semplice esperienza che in linea di principio possa rivelare la dipendenza della velocità della luce dal moto della terra, potrebbe consistere nella misura dei tempi che impiega un impulso luminoso nel percorrere una distanza nota, una volta nel verso concorde a v_t , e successivamente in verso opposto. Nel primo caso la velocità della luce rispetto alla terra dovrebbe risultare $c + v_t$, nel secondo $c - v_t$. Tuttavia poiché $c \gg v_t$ la misura dei tempi con la necessaria precisione, può comportare seri problemi. Oggi, con gli impulsi laser estremamente brevi e con gli orologi atomici di cui si dispone, questo tipo di esperimento è possibile.

Nel 1881 A. Michelson, con altri collaboratori, iniziò una serie di famose esperienze volte a confermare queste ipotesi. Poiché, in quel tempo, le misure dirette dei tempi e della lunghezza di un impulso luminoso presentavano difficoltà notevoli, Michelson ideò un metodo interferometrico, col quale era possibile misurare differenze di percorso ottico molto piccole con una precisione molto elevata. L'interferometro di Michelson-Morley è schematizzato in figura 5. Un raggio di luce, proveniente da una sorgente monocromatica S , incide su una lamina semitrasparente A dove, in parte viene inviato sullo specchio B e in parte sullo specchio C . I raggi BA e CA riflessi dagli specchi, giunti in A , vengono uno parzial-

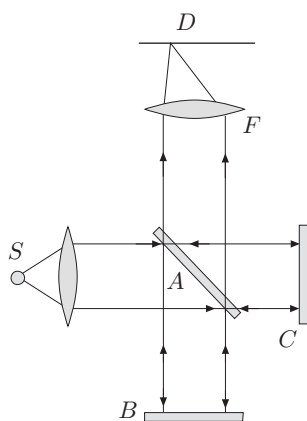


Fig. 20.5

mente trasmesso, l'altro parzialmente riflesso; questi ultimi infine si sovrappongono lungo AD , dove un sistema focalizzante F permette di osservare le frange di interferenza su uno schermo. Il percorso di tali raggi nella figura è relativo al riferimento solidale con la Terra, dove l'interferometro è in quiete. Nel riferimento fisso con l'etere, il raggio proveniente da A e incidente sullo specchio B , a causa del moto di trascinamento, inciderà sullo specchio quando questo si troverà in B' e giungerà sulla lamina semitrasparente quando questa si trova in A' , come mostrato in figura 6. Detta $v_t \Delta t_1$ la semidistanza AA' , si ha

$$(AB')^2 = (v_t \Delta t_1)^2 + (AB)^2, \quad c^2 \Delta t_1^2 = v_t^2 \Delta t_1^2 + (AB)^2,$$

da cui:

$$\Delta t_1 = \frac{AB}{\sqrt{c^2 - v_t^2}}, \quad \Delta t = 2\Delta t_1 = \frac{2AB}{\sqrt{c^2 - v_t^2}},$$

che è il tempo impiegato dalla luce per percorrere il tratto $AB'A'$. Più semplicemente, se si ammettono valide le trasformazioni galileiane, la velocità della luce nel riferimento solidale con l'interferometro è proprio $\sqrt{c^2 - v_t^2}$.

Analogamente, nel riferimento solidale con l'interferometro, il tempo che il raggio AC impiega nel percorso di andata e ritorno è dato da

$$\Delta t' = \frac{AC}{c - v_t} + \frac{AC}{c + v_t} = 2AC \frac{c}{c^2 - v_t^2}.$$

Supponendo che $AB = AC = L$, bracci dell'interferometro uguali, e trascurando i termini del quarto ordine, il tempo impiegato dal raggio AB si può scrivere

$$\Delta t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v_t^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v_t^2/c^2}} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_t^2}{c^2}\right).$$

Analogamente il tempo impiegato dal raggio AC si può esprimere come

$$\Delta t' = 2L \frac{c}{c^2 - v_t^2} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v_t^2}{c^2}\right).$$

Si trova che $\Delta t' > \Delta t$, ossia il raggio AC è più lento del raggio AB , pertanto la differenza tra i due tempi risulta

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{L}{c} \frac{v_t^2}{c^2}.$$

A causa della differenza di cammino ottico che ne segue, si dovrebbero osservare frange di interferenza dovute al moto di trascinamento della Terra rispetto all'etere.

Tuttavia per poter evidenziare tale effetto occorreva introdurre un elemento aggiuntivo. In realtà è praticamente impossibile realizzare l'uguaglianza dei bracci dell'interferometro, perciò

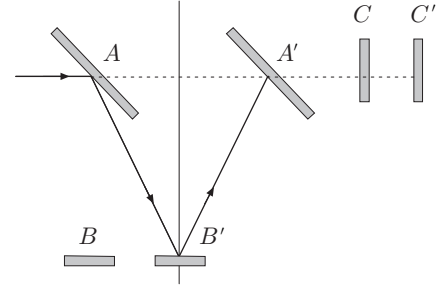


Fig. 20.6

inizialmente era presente una certa figura di interferenza. Ruotando l'interferometro di 90° il raggio AB diventa più lento ed AC più veloce. I cammini ottici vengono scambiati e di conseguenza si dovrebbe avere uno spostamento delle frange di interferenza uguale a

$$2L \frac{v_t^2}{c^2}.$$

Il numero di frange spostate è quindi

$$\Delta N = \frac{2L}{\lambda} \frac{v_t^2}{c^2},$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce impiegata.

Su un percorso $L = 11 \text{ m}$, corrispondente a $2 \cdot 10^7$ lunghezze d'onda della luce gialla del sodio, $5500 \text{ \AA}$, si avrebbe uno spostamento di 0,4 frange. Con sorpresa non fu osservato alcun spostamento che eccedesse in maniera significativa gli errori sperimentali. Omettiamo per brevità la descrizione dettagliata dell'esperienza che, a pieno titolo, può essere annoverata tra le esperienze fondamentali della Fisica classica. Essa è stata ripetuta nei decenni successivi dallo stesso Michelson e da altri ricercatori, nelle condizioni più svariate e usando radiazione di diversa natura; ad alte quote, sotto la superficie terrestre, in diversi continenti e in stagioni differenti; usando luce stellare, luce laser e raggi gamma. Il risultato è stato sempre concorde nell'escludere l'esistenza dell'etere come supporto atto alla propagazione della radiazione elettromagnetica. Con la fraseologia in uso all'inizio del secolo, non fu rivelato alcun *vento d'etere* che potesse essere percepito dall'osservatore terrestre, in moto rispetto all'etere in quiete.

6.1. Velocità limite

Il risultato negativo dell'esperienza di Michelson suggerisce che la velocità della luce è indipendente dal moto del riferimento in cui viene misurata. Se dunque c è invariante in tutti i riferimenti inerziali, il problema successivo è quello di verificare se in qualche fenomeno fisico si possano raggiungere velocità maggiori di c o se questa costituisce una velocità limite. L'opportunità di una verifica sperimentale di questo problema si trova nello studio del moto di particelle cariche in un acceleratore; infatti non esiste alcun principio classico che impedisca alle particelle, soggette a differenze di potenziale sempre più elevate, di raggiungere velocità arbitrariamente grandi.

L'esperienza della velocità limite è stata eseguita al M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology) nei primi anni 60 da W. Bertotti. Essa consiste nell'osservare come varia la velocità di un fascio di elettroni, al variare dell'energia cinetica che assumono,

quando sono soggetti ad un campo elettrostatico. Classicamente, detta ΔV la differenza di potenziale, q la carica ed m la massa della particella, vale la relazione

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V,$$

da cui si ricava

$$v^2 = \frac{2}{m}q\Delta V = \frac{2}{m}T;$$

la relazione tra v^2 e T è lineare. Schematicamente, gli elettroni provenienti da un acceleratore di Van de Graaff, venivano introdotti in un tubo sotto vuoto, lungo $8,4\text{ m}$, in cui non era presente campo elettrico; pertanto al suo interno la velocità degli elettroni risulta costante, figura 7. In realtà tale tubo era costituito da un acceleratore lineare, che permetteva di raggiungere una energia finale di 15 MeV ($1\text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ J}$). Il fascio di elettroni uscenti dal Van de Graaff era costituito da “pacchetti” di elettroni brevissimi emessi a frequenza costante che, colpendo due elettrodi disposti all’inizio e alla fine del tubo ne determinavano una variazione di tensione. Gli impulsi di tensione così ottenuti venivano visualizzati con un oscilloscopio, sincronizzato con la frequenza di ripetizione dei pacchetti, fornendo una misura diretta del tempo di transito e quindi della velocità degli elettroni. I risultati dell’esperienza sono mostrati in figura 8, dove è evidente che l’andamento di v^2 in funzione di T , non è lineare, ma tende ad assumere il valore asintotico c^2 . Va menzionato che inoltre l’energia cinetica degli elettroni era controllata in modo indipendente, con metodi calorimetrici.

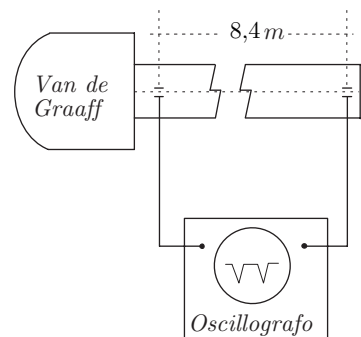


Fig. 20.7

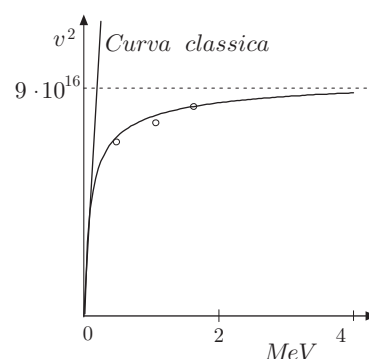


Fig. 20.8

7. Postulati della relatività ristretta

Come s’è visto nel corso dello studio della Meccanica, le leggi di Newton sono invarianti per trasformazioni galileane; pertanto nessuna esperienza di meccanica è in grado di rivelare differenze nei fenomeni che avvengono in ogni riferimento inerziale. Di conseguenza non è possibile rivelare il moto assoluto di un riferimento inerziale rispetto ad un riferimento privilegiato.

Le leggi fisiche devono restare invariate quando si passi da un osservatore O inerziale ad un altro O' in moto rettilineo e uniforme rispetto al primo. Ciò non vuol dire che le misure simultanee, fatte da O e da O' di uno stesso fenomeno, danno lo stesso risultato, ma significa che le relazioni tra le misure fatte da O coincidono con le relazioni tra le misure fatte da O' . È dunque spontaneo chiedersi se queste conclusioni siano valide anche per i fenomeni elettromagnetici o se qualcuno di questi fenomeni ci possa permettere di rivelare il moto assoluto di un riferimento rispetto ad un qualche riferimento privilegiato, ossia rispetto all’etere cosmico. Infatti le

leggi dell'elettromagnetismo, essendo dipendenti dalla velocità dei corpi carichi, non dovrebbero essere invarianti per trasformazioni galileane. In altri termini dobbiamo supporre che le leggi dell'elettromagnetismo non siano valide in ogni riferimento inerziale, oppure ritenere che le trasformazioni galileane non siano adatte e quindi abbandonare i concetti di tempo assoluto e di lunghezza assoluta, legati a tali trasformazioni. Se il fenomeno fisico dipende dalla velocità, la legge che lo descrive avrebbe espressioni diverse in ogni riferimento in moto.

Questa circostanza appare evidente se si considera una particella carica, in quiete nel riferimento O ; si osserva, come è noto, un campo elettrico radiale. In un riferimento O' , in moto rispetto al primo, con velocità v_t parallela all'asse delle x , la particella appare muoversi con velocità $-v_t$, e poiché una carica in moto equivale ad una corrente elettrica, l'osservatore solidale con O' osserva una corrente elettrica che, a sua volta, genera un campo magnetico. Pertanto nel riferimento O' si osservano sia un campo elettrico che un campo magnetico. Le leggi che descrivono il campo elettrico e il campo magnetico appaiono diverse nei due riferimenti. Analogamente la forza esercitata dal campo magnetico $\mathbf{B}$ su una carica q in moto, in un riferimento O , è data dalla legge di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$; nel riferimento O' , in moto con velocità $\mathbf{v}_t$, la velocità della carica risulta $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_t$, quindi la forza è diversa dalla precedente. Si potrebbe concludere che le leggi dell'elettromagnetismo non siano invarianti per trasformazioni galileane; di conseguenza la luce, che è un'onda elettromagnetica, si dovrebbe propagare con velocità diversa in ogni riferimento in moto relativo uniforme.

Poiché né le leggi della meccanica né l'esperienza di Michelson riescono a rivelare alcuna differenza della velocità della luce nei riferimenti inerziali, Einstein nel 1905 propose l'invarianza delle leggi fisiche in tutti i riferimenti in moto relativo uniforme, enunciando il seguente postulato:

a) Tutte le leggi della fisica sono le stesse in ogni riferimento inerziale.

D'altra parte le equazioni di Maxwell, da cui derivano le leggi di propagazione dei segnali elettromagnetici, appartengono alle leggi della Fisica, pertanto un secondo postulato è il seguente:

b) La velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni riferimento inerziale ed ha il valore $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Se tali postulati sono veri, le trasformazioni di coordinate non possono essere quelle galileane. La ricerca di trasformazioni adatte porta alle trasformazioni di Lorentz le quali, come vedremo, per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, si riducono a quelle di Galilei. L'invarianza della velocità della luce impone di abbandonare i concetti classici di spazio e di tempo assoluto; il fatto che un segnale luminoso abbia la stessa velo-

cità comunque ci allontaniamo o ci avviciniamo ad esso è al di fuori della nostra intuizione, ma ciò comporta che la misura degli intervalli di tempo e la misura delle lunghezze dipendano dal riferimento. Non è sufficiente dare le coordinate di una particella in funzione del tempo, uguale per tutti gli osservatori, come in fisica classica, ma considerare coordinata spaziale e coordinata temporale intimamente legate ad un *evento* che si verifica nello spazio-tempo. In relatività un riferimento è costituito dalle coordinate spaziali, ad ognuna delle quali è associato un orologio che fissa la coordinata temporale dell'evento nello spazio-tempo. Naturalmente tutti gli orologi del riferimento devono essere sincronizzati con un orologio, principale, situato nell'origine delle coordinate. Secondo questa nuova concezione, due eventi possono avvenire:

- 1) Nello stesso posto e nello stesso tempo. Questi eventi sono *simultanei*: nel tempo e nello spazio.
- 2) Nello stesso posto ma in tempi diversi.
- 3) In posti diversi ma nello stesso tempo; questo è il caso di eventi solo simultanei.
- 4) In posti diversi e in tempi diversi.

La sincronizzazione degli orologi di un riferimento si può ottenere mediante un segnale luminoso emesso nel punto medio del segmento che congiunge l'orologio principale con l'orologio legato all'evento. Poiché la velocità del segnale luminoso è costante, i due orologi risultano sincronizzati se entrambi registrano lo stesso tempo quando il segnale luminoso li raggiunge. Come conseguenza si deduce che la *simultaneità è relativa*; ossia due eventi simultanei in certo riferimento non sono tali in un riferimento in moto rispetto al primo.

|| 7.1. Sincronizzazione degli orologi

La sincronizzazione degli orologi di un riferimento va effettuata tenendo presente il caso 3) del paragrafo precedente. Il metodo sperimentale che, in linea di principio, permette di sincronizzare gli orologi, in quiete in un riferimento, discende dall'invarianza della velocità della luce. Come si è detto, due orologi in un certo riferimento, risultano sincronizzati, se segnano lo stesso tempo quando vengono raggiunti da un segnale luminoso che parte dal punto medio del segmento che li congiunge.

Per capire come orologi sincronizzati in dato riferimento non risultano più sincronizzati in un riferimento in moto rispetto al primo, consideriamo due orologi C_1, C_2 già sincronizzati sul marciapiedi di una stazione, accanto al quale sosta un vagone. Su questo sono disposti altri due orologi C'_1, C'_2 in esatta corrispondenza con i primi e sincronizzati allo stesso modo, figura 9. Supponiamo che il vagone si muova; è evidente che il segnale luminoso, emesso dal punto medio M del segmento che congiunge gli orologi sul

marciapiedi, raggiunge C'_1 prima che C_1 e C'_2 dopo di C_2 , figura 10. Segue che gli orologi sul vagone, sincronizzati tra loro, non possono segnare lo stesso tempo di quelli che si trovano sul marciapiedi. La sincronizzazione degli orologi dipende dal riferimento; ciò significa che due eventi che sono simultanei nel riferimento O' , non risultano simultanei se le misure di tempo vengono effettuate nel riferimento O .

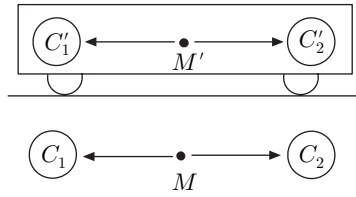


Fig. 20.9

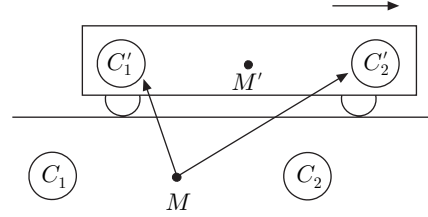


Fig. 20.10

7.2. Deduzione diretta della dilatazione dei tempi

Postulata l'invarianza della velocità della luce, consideriamo due osservatori O ed O' in moto relativo lungo l'asse x , con velocità v , con i rispettivi orologi sincronizzati. Nell'istante in cui le origini O ed O' dei riferimenti coincidono, viene emesso un segnale luminoso in direzione di uno specchio S solidale con O' , disposto sull'asse y' ed orientato ortogonalmente ad esso come in figura 11. Se L è la distanza dello specchio dall'origine, l'intervallo di tempo di andata e ritorno del segnale, nel riferimento O' è

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}.$$

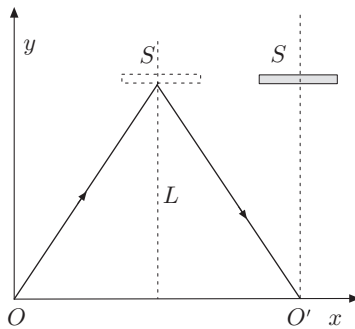
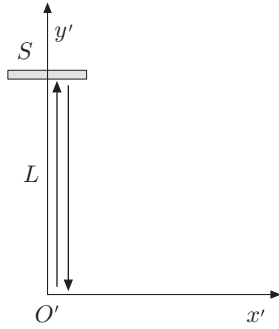


Fig. 20.11

Nel riferimento O , il segnale luminoso incontrerà l'asse delle x alla distanza $v\Delta t$ dall'origine, dopo aver percorso il cammino OSO' . Poiché anche per l'osservatore O la velocità della luce è invariante, si ha

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + L^2,$$

da cui si ricava:

$$\Delta t = \frac{2L}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

L'osservatore O misura intervalli di tempo tanto più lunghi quanto più elevata è v ; si ha dunque una dilatazione dei tempi. Si osservi che per velocità ordinarie il termine v^2/c^2 è trascurabile e gli intervalli di tempo misurati dai due osservatori si possono considerare uguali.

8. Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo un riferimento O fisso ed un riferimento O' mobile che trasla con velocità v uniforme, parallela all'asse x , come in figura 12. Le trasformazioni galileiane di coordinate diretta ed inversa, sono espresse dalle relazioni:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' & y &= y' & z &= z' & t &= t' \\ x' &= x - vt & y' &= y & z' &= z & t' &= t. \end{aligned}$$

Le equazioni di trasformazione da ricercare, valide nella relatività ristretta, devono rispettare i postulati di Einstein, ossia devono garantire l'invarianza delle leggi della Fisica e della velocità della luce in ogni riferimento inerziale. Esse possono essere stabilite in vari modi; in ogni caso devono essere lineari, ossia non devono contenere termini del tipo x'^2 , t'^2 , oppure $x't'$, Appare perciò ragionevole prendere in considerazione forme lineari del tipo

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad (5)$$

dove γ è una funzione che può dipendere solo da v . Inoltre, poiché le precedenti devono essere simmetriche, γ deve essere la stessa in entrambe le equazioni e dunque una funzione *pari* di v . Va notato che si è indicato con t' il tempo misurato nel riferimento O' . Tenendo conto del fatto che la velocità della luce è invariante, consideriamo un segnale luminoso emesso nell'istante in cui le origini O , O' dei riferimenti coincidono. Disposto un rivelatore lungo l'asse di traslazione dei riferimenti, secondo l'osservatore O il segnale ha percorso, dall'origine al rivelatore, una distanza

$$x = ct.$$

Analogamente, per l'osservatore O' , il segnale ha percorso una distanza

$$x' = ct'.$$

Poiché le coordinate (x, t) , (x', t') si riferiscono allo stesso evento, arrivo del segnale luminoso al rivelatore, per le (5), devono sussistere le relazioni

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') \\ ct' &= \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt). \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro, si ottiene:

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2),$$

da cui:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

avendo posto, come di consueto, $\beta = v/c$.

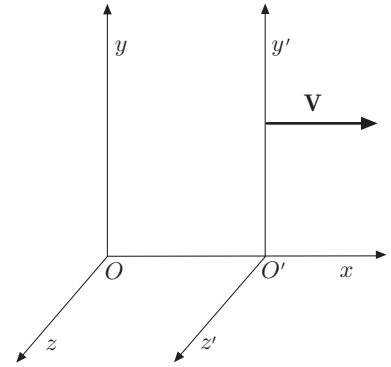


Fig. 20.12

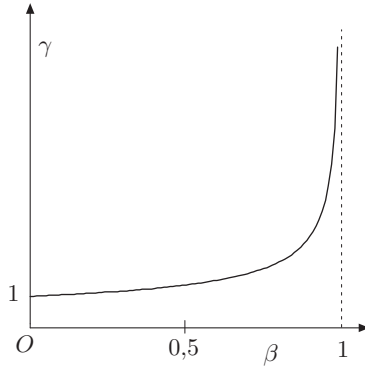


Fig. 20.13

In figura 13 è mostrato l'andamento di γ in funzione di β . Le (5) si possono scrivere:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x' + vt'), \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - vt), \quad (6)$$

che per $v \ll c$ si identificano con le trasformazioni di Galilei.

Dalle (6) si ricavano le trasformazioni per i tempi; infatti dalla seconda si ha:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt,$$

che sostituita nella prima, fornisce:

$$t = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \frac{x'}{v} + \gamma t' = \gamma \beta^2 \frac{x'}{v} + \gamma t',$$

da cui:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right).$$

Analogamente si ottiene la trasformazione inversa:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right).$$

Allora le trasformazioni di Lorentz dirette sono:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right), \quad (7)$$

quelle inverse:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right). \quad (8)$$

Esse sono lineari in x e t e si riducono a quelle galileane per $v \ll c$.

Osserviamo che le trasformazioni dei tempi si possono scrivere:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'), \quad ct' = \gamma(ct - \beta x); \quad (9)$$

poiché ct , ct' sono spazi percorsi da un segnale luminoso, le precedenti mostrano l'intimo legame che sussiste tra spazio e tempo. Si noti che per ottenere le trasformazioni inverse, basta scambiare le variabili non accentate con quelle accentate e viceversa e cambiare il segno della velocità di trascinamento, in quanto O' vede traslare O in verso opposto.

Consideriamo due riferimenti O ed O' in moto relativo; nell'istante $t = t' = 0$ in cui le origini coincidono, una sorgente di luce puntiforme, posta nell'origine, emette un segnale il cui fronte d'onda è sferico, che per l'osservatore O ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

L'osservatore O' vede anch'esso un fronte d'onda sferico, di equazione

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

I fronti d'onda, come si può facilmente verificare applicando le (7) o le (8), risultano invarianti per trasformazioni di Lorentz.

Dalle (7) e (8) si trae facilmente che gli orologi sincronizzati in un riferimento non sono sincronizzati con quelli di un altro riferimento in moto; due eventi simultanei in O non lo sono più in O' . Consideriamo infatti due eventi E_1, E_2 , di coordinate (x_1, t_1) e (x_2, t_2) in O . Supponendo che in O gli eventi siano simultanei, $t_1 = t_2$, ma che $x_1 \neq x_2$, la presenza nell'ultima delle (8) del termine vx/c^2 mostra che nel riferimento O' gli eventi non sono più simultanei; risulta infatti

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\gamma \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1).$$

Si dimostra ora facilmente la dilatazione dei tempi. Si consideri un orologio di coordinata x'_0 , fisso in O' e l'intervallo di tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, misurato da tale orologio. Nel riferimento O i tempi risultano

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_0 \right), \quad t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_0 \right),$$

ossia:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1) = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10)$$

È importante notare che la proposizione è simmetrica per un orologio di coordinata x_0 , fisso in O . Con procedimento analogo si trova:

$$\Delta t' = \gamma (t_2 - t_1) = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (11)$$

Le relazioni (10) e (11) sono perfettamente coerenti; non esistono riferimenti privilegiati e dunque gli effetti sono simmetrici. Infatti l'intervallo di tempo $\Delta t'$ che compare nella (10) è misurato da un singolo orologio, in quiete in O' , ossia è l'intervallo di tempo proprio. Viceversa, per misurare l'intervallo di tempo Δt , occorrono due orologi in quiete in O , sincronizzati tra loro, e posti nelle posizioni che occupa O' all'inizio e alla fine dell'intervallo $\Delta t'$. Nella (11) la situazione è perfettamente simmetrica.

|| 8.1. Contrazione delle lunghezze

Consideriamo un'asta di lunghezza L' , disposta lungo l'asse x' , in quiete rispetto ad O' . Gli estremi dell'asta hanno coordinate x'_1 ed x'_2 , quindi si ha

$$L' = x'_2 - x'_1.$$

Nel riferimento O si deve aver cura di misurare le coordinate x_1 e x_2 degli estremi nel medesimo istante t^* ; infatti esse variano a

causa del moto di O' rispetto ad O . Si ha

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt^*), \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt^*),$$

e sottraendo:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1), \quad \Rightarrow \quad L' = \gamma L.$$

La lunghezza L misurata in O , è data da

$$L = \frac{L'}{\gamma} = L' \sqrt{1 - \beta^2}; \quad (12)$$

essa risulta minore della lunghezza propria L' , come determinata da misure in O' , dove l'asta è in quiete. Si verifica facilmente che la contrazione delle lunghezze è simmetrica rispetto ad O' .

8.2. Paradosso dei gemelli

La dilatazione dei tempi ha dato luogo al famoso paradosso dei gemelli. Due gemelli A e B celebrano il loro compleanno sulla Terra; poi B sale su un veicolo spaziale che lo trasporta, a una velocità $v = 0,99c$, fino ad una stella distante 4 anni luce. Il veicolo spaziale inverte subito la rotta e ritorna sulla Terra; secondo gli orologi della Terra questo viaggio ha la durata di 8 anni; quindi A sarà più vecchio di otto anni, quando incontra nuovamente B . Quest'ultimo ha tratto vantaggio della dilatazione dei tempi; infatti rispetto agli orologi solidali con la Terra, gli orologi del veicolo spaziale marciano più lentamente, secondo il fattore

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - (0,99)^2} = 0,14.$$

Pertanto gli 8 anni registrati sulla Terra corrispondono soltanto a $8 \cdot 0,14 = 1,1$ anni registrati nel veicolo spaziale. A bordo è rallentato anche il ritmo biologico, pertanto B è invecchiato di soli 1,1 anni rispetto agli 8 di A . Il paradosso nasce se si prendono in considerazione gli intervalli di tempo rispetto al veicolo spaziale. Poiché le (10) e (11) sono perfettamente simmetriche, in questo riferimento la Terra è in moto e quindi gli orologi ad essa legati marciano più lentamente; A dovrebbe essere più giovane di B . La soluzione del paradosso va ricercata nel fatto che le equazioni di trasformazione dei tempi sono valide nei riferimenti inerziali. Il riferimento della Terra è con buona approssimazione inerziale, perciò il calcolo della dilatazione dei tempi nel veicolo spaziale si può ritenere valido. Ma il riferimento del veicolo non è inerziale; esso deve decelerare in prossimità della stella, arrestarsi e poi accelerare verso la Terra. Pertanto il paradosso deriva dall'uso improprio delle formule della dilatazione dei tempi. Una analisi più accurata stabilisce che gli orologi della Terra marciano più lentamente, finché il veicolo spaziale ha velocità costante, ma che

marciano più velocemente quando il veicolo spaziale rallenta o accelera in prossimità della stella. Comunque il risultato netto è che B risulta più giovane di A .

8.3. Esperimento di Hafele e Keating (1971)

Questo esperimento impiega orologi macroscopici e velocità di trascinamento molto minori della velocità della luce; tuttavia, grazie alla precisione degli orologi atomici, è possibile mettere in evidenza l'effetto relativistico. Si consideri un riferimento O con origine nel centro della Terra e due orologi A e B ; il primo fisso nel riferimento O , il secondo solidale con la Terra e quindi ruotante con essa, in corrispondenza all'equatore, figura 14. L'orologio A misura il periodo di rotazione della Terra di 24 ore, B compie ogni 24 ore un giro non inerziale; quindi è in ritardo rispetto ad A ogni volta che lo incontra. La velocità di trascinamento di B è piccolissima rispetto alla velocità della luce, $v \ll c$. Detta L la lunghezza dell'equatore, la durata di un giro misurata da A è

$$t = \frac{L}{v}.$$

La stessa durata misurata da B risulta

$$t' = t\sqrt{1 - \beta^2} \approx t \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \right) = \frac{L}{v} - \frac{1}{2}\beta^2 \frac{L}{v},$$

dunque il ritardo di B rispetto ad A risulta

$$t - t' = \frac{L}{2} \frac{v}{c^2},$$

proporzionale a v . Se un orologio B_1 viaggia nel verso concorde con la rotazione terrestre, il suo ritardo sarà maggiore di quello di B ; analogamente un orologio B_2 che viaggia in senso contrario alla rotazione terrestre, avrà un ritardo inferiore a quello di B . Il ritardo complessivo di B_1 rispetto a B_2 è la somma dei due.

In pratica l'esperienza consiste nel misurare i tempi registrati da due orologi atomici, posti su aerei che viaggiano una volta verso est ed una volta verso ovest, e confrontarli con l'orologio standard del NBS (National Bureau of Standards) di Washington, che corrisponde all'orologio B . Il ritardo misurato dagli sperimentatori fu di $342 \pm 13 \text{ ns}$, in accordo con la previsione teorica.

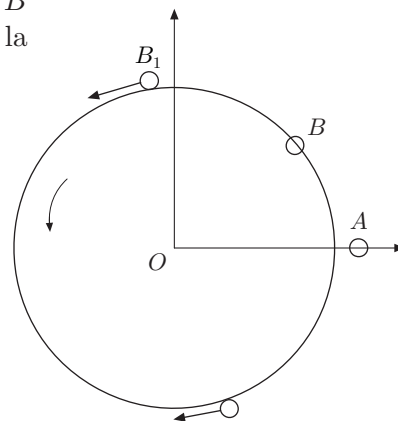


Fig. 20.14

8.4. Decadimento di particelle elementari instabili

Il decadimento delle particelle elementari instabili permette di evidenziare chiaramente la dilatazione del tempo. Proprietà intrinseca delle particelle instabili è la *vita media* τ , la quale rappresenta il tempo caratteristico del decadimento; essa è per convenzione definita nel riferimento in cui la particella è in quiete. Non è possibile predire quando una determinata particella decade;

quindi solo una vita mediata su un gran numero di particelle ha un significato riproducibile. La probabilità P che al tempo t , una particella decada nell'intervallo di tempo $\delta t \ll \tau$ successivo a t , è data da

$$P = \frac{\delta t}{\tau}.$$

Nel caso di un grande numero di particelle, la probabilità che nell'intervallo di tempo δt , ne decadano N è $NP = N\delta t/\tau$. Questo decadimento causa una diminuzione del numero di particelle uguale a

$$-\delta t \frac{dN}{dt};$$

perciò uguagliando

$$N \frac{\delta t}{\tau} = -\delta t \frac{dN}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau},$$

ed integrando, si ottiene

$$N = N_0 e^{-t/\tau},$$

dove N_0 è il numero di particelle all'istante $t = 0$. Questa equazione rappresenta il numero di particelle che non hanno subito decadimento in un riferimento in quiete; il grafico di tale legge è un esponenziale decrescente, come si è già trovato in situazioni analoghe.

Il numero di particelle che decadono nell'intervallo di tempo Δt è dato da

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\Delta t/\tau}).$$

Supponiamo di osservare un insieme di particelle che decadono, nel riferimento del laboratorio, mentre viaggiano con velocità v ; l'intervallo di tempo Δt è più lungo di quello misurato nel riferimento delle particelle, ossia $\Delta t = \gamma \Delta t'$, pertanto il numero di particelle che non sono decadute è dato dall'equazione

$$N = N_0 e^{-\Delta t'/\tau} = N_0 e^{-\Delta t/\gamma\tau}.$$

La vita media si è dilatata del fattore γ . Gli esperimenti di Farley e collaboratori (1972) mostrano chiaramente l'allungamento della vita media apparente dei muoni o mesoni μ . Queste particelle subatomiche possono essere generate nella collisione della radiazione cosmica con le particelle dell'alta atmosfera oppure mediante acceleratori nucleari; esse decadono spontaneamente generando un elettrone e due particelle neutre, dette neutrini. Un muone ha carica elettrica $\pm e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, massa 208 unità atomiche di massa, vita media propria $\tau = 1,5 \cdot 10^{-6} s$. Gli autori citati hanno sperimentato con un fascio di muoni prodotto dal sincrotrone del CERN a Ginevra; queste particelle erano costrette a muoversi, nell'anello di accumulazione del sincrotrone, di moto circolare con velocità prossima a quella della luce. La vita media misurata nel riferimento del laboratorio, è stata di $26,49 \mu s$, contro quella prevista dalla formula (10), di $26,69 \mu s$. Si osservi che la dilatazione del tempo è confermata anche se il riferimento del muone non è inerziale. Questo risultato è generale, come nel paradosso dei gemelli, nelle esperienze con orologi non inerziali e nelle esperienze su particelle cariche, animate di velocità relativistiche e deviate da campi magnetici.

9. Cronotopo

La cinematica relativistica mostra che nel passaggio da un riferimento ad un altro in moto relativo traslatorio uniforme, l'espressione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2,$$

o, se si vuole

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz. Un evento caratterizzato dalle coordinate spaziali e da quella temporale, cioè che si verifica nel posto (x, y, z) e al tempo t , può essere rappresentato con un punto in uno spazio a quattro dimensioni, *spazio-tempo* o *cronotopo*. In questo spazio il quadrato della distanza tra due eventi infinitamente vicini, di coordinate (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ è dato dalla seguente espressione differenziale

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (13)$$

anch'essa invariante per trasformazioni di Lorentz. Possiamo dunque dare un significato geometrico intrinseco allo spazio-tempo, di cui la (13) rappresenta la metrica, negandolo separatamente allo spazio e al tempo.

Se in un evento le coordinate x, y, z , che ne danno la posizione, sono costanti, mentre varia la coordinata temporale, nello spazio-tempo otteniamo una linea che si chiama *linea temporale*. Se invece è costante la coordinata temporale, otteniamo lo spazio geometrico euclideo. Si ottiene una linea dello spazio-tempo assegnando:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

equazioni che definiscono, in cinematica relativistica, la *linea di universo* dell'evento. In particolare, se la linea che congiunge due eventi è una *geodetica* dello spazio-tempo, il movimento della particella è rettilineo uniforme. Si tenga presente che nello spazio ordinario, la geodetica è definita come la linea di minimo percorso che congiunge due punti. Il percorso di una particella non soggetta a forze, nello spazio ordinario è rettilineo; la particella si muove lungo una geodetica. Se la particella è vincolata su un piano liscio, la geodetica è ancora una retta; se è vincolata su una sfera liscia la geodetica sarà un arco di circonferenza. In virtù del segno negativo che compare nella (13), nello spazio-tempo possono esserci linee reali a lunghezza nulla, circostanza che non è verificata nello spazio euclideo. In particolare possono esserci geodetiche, rette, di lunghezza nulla; in tal caso risulta

$$cdt = dl, \quad c = \frac{dl}{dt}.$$

In corrispondenza si ha un moto rettilineo uniforme con velocità della luce. Le geodetiche di lunghezza nulla del cronotopo danno la propagazione dei segnali luminosi.

Poiché nessun movimento avviene con velocità superiore a quella della luce, si deve avere $dl/dt \leq c$. Ne segue $c^2 dt^2 \geq dl^2$, ossia

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl \geq 0.$$

Il quadrato dell'elemento d'arco di una linea dello spazio-tempo,

congiungente due eventi reali, non è mai negativo.

Nello spazio-tempo vanno dunque distinte linee a ds^2 positivo, nullo oppure negativo. Le prime sono linee corrispondenti ad eventi che avvengono con velocità minore di quella della luce; tra esse vi sono le linee temporali. Le seconde sono linee a lunghezza nulla, segnali luminosi; le ultime non corrispondono ad alcun evento reale. Per chiarire il significato di spazio-tempo, consideriamo il moto unidimensionale di una particella in un diagramma spazio-temporale (*diagramma di Minkowski*). Tale diagramma è costituito dagli assi x e t , mutuamente ortogonali. La linea di universo di una particella è una successione di eventi tali che ognuno di essi, costituito dalla posizione x e dall'istante t , è legato al precedente da un rapporto di causalità; in cinematica classica, la linea di universo di una particella non è altro che la linea oraria del moto. Consideriamo tre punti A , B e C , equidistanti e in quiete, sull'asse x di un riferimento O , figura 15. Le linee di universo di questi punti sono rette parallele all'asse dei tempi, corrispondenti a $x = cost$. Supponiamo che all'istante $t = 0$, dal punto B venga lanciato un segnale luminoso che si propaga in entrambi i versi dell'asse x . Le linee di universo di questi segnali sono espresse dalle rette di equazioni $x = x_B \pm ct$, perciò l'arrivo dei segnali in A e C è rappresentato dalle intersezioni A_1 , C_1 di tali rette con le linee di universo di A e C . La simmetria del fenomeno assicura la simultaneità degli eventi A_1 , C_1 .

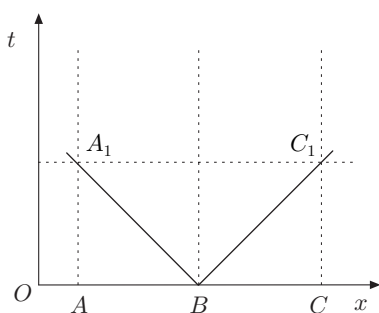


Fig. 20.15

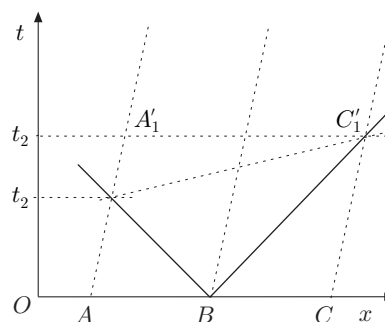


Fig. 20.16

Supponiamo ora che i punti A, B, C siano in quiete, in un riferimento O' che trasla lungo x con velocità v uniforme, rispetto ad O . In questo riferimento le linee di universo di A, B, C risultano inclinate, ed il segnale inviato da B all'istante $t = 0$, a causa dell'invarianza di c , è sempre rappresentato dalla coppia di rette $x = x_B \pm ct$. Però, come si può osservare dalla figura 16, le intersezioni di tali rette con le linee di universo di A e C , non sono su una parallela all'asse x , ossia gli eventi A'_1 , C'_1 non risultano simultanei per l'osservatore in O . In altri termini, il segnale giunge in A prima che in C perché, come giudica l'osservatore O ,

A si muove verso il segnale, mentre C si allontana da esso. Ma il riferimento O' è equivalente al riferimento O , perciò gli eventi A'_1 , C'_1 , data l'invarianza di c , devono risultare simultanei in O' . Questo requisito viene soddisfatto da una particolare scelta degli assi x', t' . L'asse t' rappresenta la linea $x' = 0$, ossia la linea di universo dell'origine di O' ; infatti questo riferimento trasla rispetto ad O con velocità v e la posizione della sua origine è rappresentata in O dall'equazione $x = vt$, supponendo che all'istante $t = 0$, le origini dei riferimenti coincidano. L'asse x' deve corrispondere all'equazione $t' = 0$, dunque ogni retta di equazione $t' = cost$ è parallela all'asse x' . Pertanto se, come in figura 17, gli eventi A'_1 , C'_1 simultanei in O' , devono appartenere ad una parallela all'asse x' . Quindi l'asse x' è individuato dalla parallela a questa retta, passante per l'origine. L'inclinazione degli assi x', t' rispetto agli assi x, t ovviamente non è reale, ma è una comoda rappresentazione bidimensionale della spazio-tempo quadridimensionale. Nel diagramma di Minkowski, un evento E è rappresentato dalle coordinate x, t di O e dalle coordinate x', t' di O' , come in figura 18.

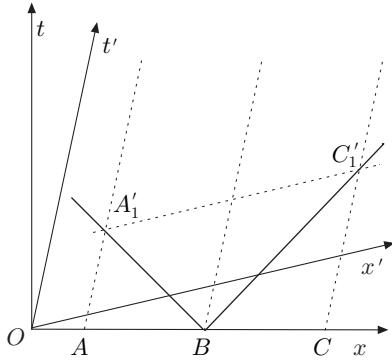


Fig. 20.17

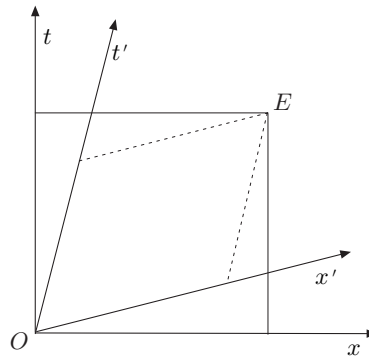


Fig. 20.18

Poiché il legame tra le coordinate deve essere lineare, come specificato nel paragrafo 8, porremo:

$$x = ax' + bt', \quad x' = ax - bt, \quad (14)$$

che, per $v \ll c$ devono coincidere con le trasformazioni galileane.

Osserviamo che il moto dell'origine del riferimento O , misurato in O' , si ottiene ponendo nella prima $x = 0$; analogamente il moto dell'origine di O' , misurato in O , si ottiene ponendo nella seconda $x' = 0$, cioè

$$x' = -\frac{b}{a}t', \quad x = \frac{b}{a}t.$$

Poiché le velocità dei riferimenti sono opposte, il rapporto b/a deve essere uguale alla velocità relativa v dei riferimenti. Se ora consideriamo un segnale luminoso, emesso all'istante $t = 0$,

quando le origini dei riferimenti coincidono, per l'invarianza di c , si ha

$$x = ct, \quad x' = ct';$$

e sostituendo nella (14):

$$ct = (ac + b)t', \quad ct' = (ac - b)t.$$

Moltiplicando membro a membro, eliminando il tempo e ricordando che $b/a = v$, si ottiene:

$$c^2 = a^2(c^2 - v^2), \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Il coefficiente a coincide col fattore γ , e poiché $b = \gamma v$, sostituendo nelle (14), si ottengono le trasformazioni di Lorentz. Per mezzo del diagramma di Minkowski è semplice determinare la distanza spazio-temporale tra due eventi, figura 19. Si consideri l'evento E_1 di coordinate:

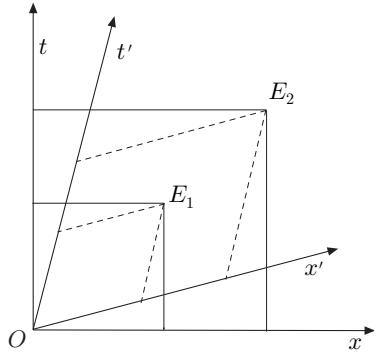


Fig. 20.19

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - vt_1), & t'_1 &= \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) \\ x_1 &= \gamma(x'_1 - vt'_1), & t_1 &= \gamma\left(t'_1 - \frac{v}{c^2}x'_1\right), \end{aligned}$$

e l'evento E_2 di coordinate:

$$\begin{aligned} x'_2 &= \gamma(x_2 - vt_2), & t'_2 &= \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) \\ x_2 &= \gamma(x'_2 - vt'_2), & t_2 &= \gamma\left(t'_2 - \frac{v}{c^2}x'_2\right). \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \\ t'_2 - t'_1 &= \gamma[(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2], \end{aligned}$$

e le inverse. Si lascia al lettore la dimostrazione della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze nel diagramma x - t .

È conveniente introdurre un altro diagramma in cui al posto dell'asse t si sostituisce l'asse ct ; pertanto su entrambi gli assi, x e ct rappresentano lunghezze. Se la scala di tali lunghezze è uguale, la linea di universo di un segnale luminoso, emesso in $x = 0$ e all'istante $t = 0$, a causa dell'invarianza di c , biseca sempre l'angolo formato dagli assi; nel riferimento O tale linea è inclinata di 45° rispetto agli assi. In figura 20 sono rappresentati i riferimenti O, O', O'' , le cui origini, agli istanti iniziali, coincidono. Le velocità di traslazione del secondo e del terzo riferimento sono rispettivamente positiva e negativa rispetto al primo. In virtù del fatto che

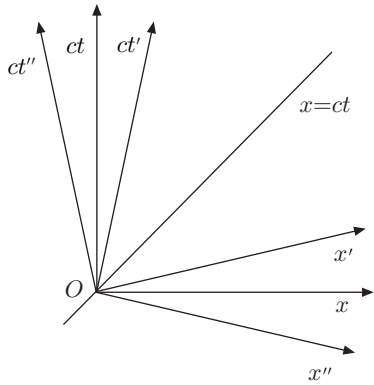


Fig. 20.20

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = s^2,$$

è un invariante di Lorentz, in ogni riferimento in moto relativo uniforme, risulta invariante anche l'intervallo spazio-temporale Δs tra due eventi:

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta s)^2.$$

Lo spazio-tempo del diagramma di Minkowski presenta zone distinte, delimitate dalle linee $x = \pm ct$, linee di universo di segnali luminosi che si propagano in verso opposto, figura 21. Nello spazio x, y, t tali linee si trovano sulla falda di un cono, detto *cono di luce*. Gli eventi rappresentati nelle zone indicate *passato* e *futuro* corrispondono ad eventi reali; gli eventi rappresentati nelle zone esterne al cono di luce, non corrispondono ad eventi reali.

Infatti la quantità $(\Delta s)^2$, come s'è detto, può essere positiva, nulla o negativa. Nel primo caso, $c\Delta t > \Delta x$ e $c\Delta t' > \Delta x'$, gli eventi E_1, E_2 di figura 21, si verificano con velocità minore di quella della luce e si trovano l'uno nel cono di luce dell'altro; è possibile disporre il riferimento O' in modo che l'asse ct' sia parallelo alla congiungente E_1, E_2 . Ciò significa che in O' gli eventi si verificano nello *stesso posto*, ma in tempi differenti; l'intervallo spazio-temporale tra gli eventi si dice *tipo-tempo* e si ha una possibile relazione di causalità.

Analogamente, se $c\Delta t < \Delta x$ e $c\Delta t' < \Delta x'$, gli eventi E_1, E_2 si verificano con velocità maggiore di quella della luce e si trovano l'uno al di fuori del cono di luce dell'altro; disponendo il riferimento O' in modo che l'asse x' sia parallelo all'intervallo spazio-temporale, gli eventi risultano simultanei in O' , ma avvengono in posti diversi. In tal caso l'intervallo spazio-temporale tra gli eventi si dice *tipo-spazio* ed è esclusa qualunque relazione di causalità. Si tenga presente però che la teoria della relatività non ammette eventi che si verificano con velocità maggiore di c . Infine, come si è detto, $\Delta s = 0$ corrisponde ad eventi che si propagano con velocità uguale a c ; tali eventi si dicono *tipo-luce*. Negli eventi tipo-tempo la quantità

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = s^2,$$

è positiva; pertanto tutti gli eventi E separati da un evento E_0 che si verifica nell'origine, da una distanza spazio-temporale s^2 costante, sono rappresentati dall'iperbole mostrata in figura 22; si noti la diversità delle coordinate nei riferimenti O e O' . Analogo ragionamento si potrebbe fare per gli eventi tipo-spazio, considerando l'iperbole di equazione:

$$x^2 - (ct)^2 = s^2.$$

Questo tipo di ragionamento permette di fissare l'unità di misura dei riferimenti O ed O' che ovviamente non è la stessa. Per esem-

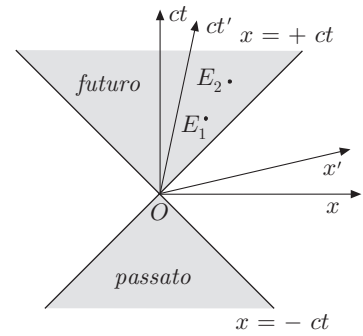


Fig. 20.21

Sostituendo l'espressione di γ , si ottiene

$$\tau' = \tau \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

oppure, in termini di frequenza o lunghezza d'onda:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \lambda' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda. \quad (15)$$

Se il ricevitore si muove verso la sorgente, i segni al numeratore e al denominatore vengono scambiati.

Si osservi che la (15) unifica le formule dell'effetto Doppler classico e non distingue se la sorgente si allontana dal ricevitore o viceversa; in relatività le situazioni sono perfettamente simmetriche. Si verifica immediatamente che, per $v \ll c$, la (15) si identifica con le formule classiche.

La più straordinaria manifestazione dell'effetto Doppler consiste nel fenomeno dello spostamento verso il rosso, *red shift*, dello spettro della luce emessa da galassie lontane. Lo spettro della luce di una galassia è uno spettro continuo; tuttavia sono state osservate alcune righe di assorbimento scure, dovute all'assorbimento dei gas più esterni, più freddi, della galassia. In particolare due di tali righe, le cosiddette righe *H* e *K* di assorbimento dell'atomo di calcio, si distinguono nettamente. Queste righe, se la sorgente è in quiete, si trovano nell'ultravioletto, ma risultano nettamente spostate verso il rosso se la galassia si allontana. È stato osservato che nello spettro della luce proveniente dalla galassia Hydra, la lunghezza d'onda della riga *H* risulta spostata da 3940 Å, corrispondente all'atomo in quiete, a 4750 Å. Dalla (15) si ottiene

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{(\lambda'/\lambda)^2 - 1}{(\lambda'/\lambda)^2 + 1},$$

e poiché $\lambda'/\lambda = 1,2$, risulta $\beta \approx 0,2$, da cui si ricava $v = \beta c \approx 6 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, che è la velocità di allontanamento della galassia. Sistematiche osservazioni su numerose galassie, hanno condotto Hubble, nel 1919, a formulare la famosa teoria dell'Universo in espansione.

10. Trasformazioni della velocità

Dalle trasformazioni di Lorentz si ottengono facilmente le trasformazioni della velocità. Dalle (7), differenziando si ha

$$dx = \gamma(dx' + V dt'), \quad dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx'\right),$$

da cui:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + (V/c^2) dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + (V/c^2) v'_x} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma[dt' + (V/c^2) dx']} = \frac{v'_y}{1 + (V/c^2) v'_x} \sqrt{1 - \beta^2} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z}{1 + (V/c^2) v'_x} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Le trasformazioni inverse si ottengono mediante le (8), oppure

dalle precedenti:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - (V/c^2)v_x} \\ v'_y &= \frac{v_y}{1 - (V/c^2)v_x} \sqrt{1 - \beta^2} \\ v'_z &= \frac{v_z}{1 - (V/c^2)v_x} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Si osservi che per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, le precedenti si riducono alle trasformazioni galileane.

Se si considera un segnale luminoso che si propaga lungo x' , $v'_x = c$, si ottiene

$$v_x = \frac{c + V}{1 + (V/c^2)c} = c;$$

La velocità del segnale, nel riferimento O , è ancora c , in accordo col postulato di Einstein. Se $v_y = c$, $v_x = 0$, si ha

$$v'_x = -V, \quad v'_y = c\sqrt{1 - \beta^2},$$

e

$$\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{V}{c\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Quest'ultimo risultato esprime la relazione relativistica dell'aberrazione di una stella allo zenit, data classicamente dalla (3). Infatti consideriamo il riferimento O in cui la stella è ferma, dove la luce emessa si osserva lungo l'asse z , $x = y = 0$, e il riferimento O' solidale con la terra, che si muove con velocità v_t nella direzione x . La traiettoria della luce si ricava dalle (8), ponendo $x = 0$:

$$x' = \gamma\beta ct, \quad z' = z = ct, \quad ct' = \gamma ct.$$

L'angolo di aberrazione o di inclinazione è allora dato da

$$\tan \theta = \frac{-x'}{z'} = \gamma\beta = \frac{v_t}{c\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

11. Legge di inerzia

Si considerino due eventi E_1, E_2 , rappresentati nello spazio-tempo da due punti di coordinate x_1, y_1, z_1, t_1 e x_2, y_2, z_2, t_2 . Il moto per inerzia, in assenza di forze, di una particella che all'istante t_1 si trova nel posto di coordinate x_1, y_1, z_1 e all'istante t_2 nel luogo di coordinate x_2, y_2, z_2 è rappresentato dalla geodetica dello spazio-tempo che passa per i due eventi. Questa linea, come insegnano i principi variazionali della Meccanica, segna il percorso tra i due eventi per il quale si annulla la variazione del percorso stesso:

$$\delta \int ds = 0. \quad (18)$$

Le trasformazioni di Lorentz lasciano inalterato il valore di δs , dunque la precedente ha carattere invariante, come richiesto dalle leggi relativistiche. Poiché dalla (13) si ha

$$ds = \sqrt{c^2 - \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} dt = \sqrt{c^2 - v^2} dt,$$

la (18) si scrive:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (\sqrt{1 - \beta^2}) dt = 0.$$

Ma:

$$\delta (\sqrt{c^2 - v^2}) = - \frac{v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

ed essendo

$$\delta v_x = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x, \quad \delta v_y = \delta \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \delta y, \quad \delta v_z = \delta \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \delta z,$$

risulta:

$$\delta (\sqrt{c^2 - v^2}) = - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left[v_x \frac{d}{dt} \delta x + v_y \frac{d}{dt} \delta y + v_z \frac{d}{dt} \delta z \right].$$

Integrando per parti, si ricava:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} \delta x + \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} \delta y + \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} \delta z \right]_{t_1}^{t_2} \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta x + \left(\frac{d}{dt} \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta y \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{d}{dt} \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta z \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Ma δx , δy , δz , sono nulli in corrispondenza agli eventi, perché la geodetica, per ipotesi, passa per E_1 , E_2 . Quindi affinché la precedente sia verificata, qualunque siano δx , δy , δz , che devono solo soddisfare le condizioni agli estremi, deve essere:

$$\frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0. \quad (19)$$

Da queste si trae:

$$\frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} = cost, \quad \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = cost, \quad \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} = cost.$$

Quadrando e sommando:

$$\frac{v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = cost,$$

e quindi

$$v^2 = cost, \quad \Rightarrow \quad v_x = cost, \quad v_y = cost, \quad v_z = cost.$$

La particella, in assenza di forze, si muove di moto uniforme. Le equazioni (19) sono analoghe a quelle che si traggono dall'equazione della dinamica classica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, qualora fosse $\mathbf{F} = 0$; infatti si avrebbe

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = 0, \quad \frac{d}{dt}(mv_y) = 0, \quad \frac{d}{dt}(mv_z) = 0.$$

Confrontando le relazioni precedenti con le (19), possiamo affermare che, nell'ambito relativistico, la legge di inerzia è espressa formalmente dalla relazione classica

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0,$$

purché si assuma come massa una quantità m proporzionale a $1/\sqrt{c^2 - v^2}$. Indicando con m_0c il coefficiente di proporzionalità, possiamo porre

$$m = \frac{m_0c}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

ovvero:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (20)$$

che definisce la *massa relativistica*.

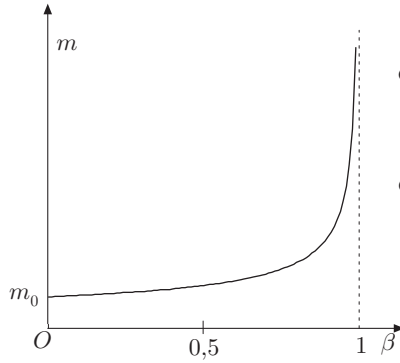


Fig. 20.24

La massa relativistica non è costante, ma cresce con la velocità dal valore m_0 , massa a riposo, al valore ∞ per $v \rightarrow c$, figura 24. Per velocità ordinarie m è praticamente costante e coincide con m_0 ; è però fondamentale sottolineare che la massa, invariante fondamentale della dinamica classica, nella dinamica relativistica è funzione della velocità.

Il comportamento della massa relativistica è conforme al postulato della velocità della luce; infatti, classicamente, una forza costante agente per un tempo sufficientemente lungo dovrebbe impartire ad un corpo una velocità illimitata, mentre l'esperienza della velocità limite mostra il contrario. La variazione della massa di una particella con la velocità, è stata verificata sperimentalmente in una grande varietà di fenomeni. Per esempio i raggi β di alcune sostanze radioattive hanno velocità dell'ordine di $2,97 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ e quindi $v/c = 0,99$, da cui $m = 7,09 m_0$. Nelle macchine acceleratrici, appena le particelle raggiungono velocità prossime a quelle della luce, occorrono forze enormi per potere aumentare ulteriormente la loro energia cinetica, che peraltro deve sempre essere inferiore a quella corrispondente alla velocità limite.

Segue immediatamente la definizione di quantità di moto relativistica:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v}. \quad (21)$$

Si osservi che nella formula (21) v rappresenta il modulo della velocità della particella: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, e non la velocità

del riferimento, come indicato in precedenza; si ritiene cioè che v sia la velocità del riferimento legato alla particella. Tuttavia, se non sussistono ambiguità, indicheremo ancora con γ il fattore $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

In figura 25 è mostrato l'andamento della quantità di moto relativistica e della quantità di moto classica, in funzione di $\beta = v/c$. L'unità di misura delle ordinate è m_0c , perché la quantità di moto, in modulo, si può scrivere

$$p = m_0c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

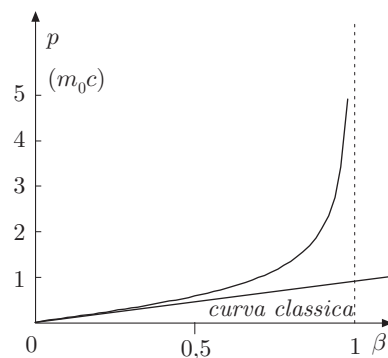


Fig. 20.25

12. Legge fondamentale della dinamica relativistica

Come conseguenza delle conclusioni del paragrafo precedente, si deduce che la legge della dinamica relativistica va espressa nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

dove m è la massa relativistica. Derivando si ha:

$$\frac{dm}{dv} \frac{dv}{dt} \mathbf{v} + m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (22)$$

Moltiplicando scalarmente per il versore $\boldsymbol{\tau}$, tangente alla traiettoria e successivamente per il versore $\hat{\mathbf{n}}$ della normale principale alla traiettoria, ricordando che $dv/dt = a_t$, accelerazione tangenziale, si ricava:

$$\left(\frac{dm}{dv} + m \right) a_t = F_t, \quad ma_n = F_n.$$

Ponendo:

$$m_l = \frac{dm}{dv}v + m, \quad (23)$$

le precedenti si scrivono:

$$m_l a_t = F_t, \quad ma_n = F_n, \quad (24)$$

relazioni del tutto analoghe a quelle della meccanica classica. Nella seconda delle (24) compare la massa relativistica m , equazione (20), definita anche *massa trasversale*, e nella prima la *massa longitudinale*, che per la (23) risulta

$$m_l = \frac{m_0}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}},$$

maggiore della massa relativistica.

13. Teorema dell'energia cinetica

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ l'equazione (22), si ottiene:

$$\frac{dm}{dt}v^2 + \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}v^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Moltiplicando per dt , si ottiene il lavoro elementare:

$$d\mathcal{L} = v^2 dm + \frac{1}{2} m d(v^2). \quad (25)$$

Dalla (20) si ha

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2} \Rightarrow v^2 = c^2 \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2} \right), \quad (26)$$

quindi

$$d(v^2) = 2c^2 m_0^2 \frac{dm}{m^3}. \quad (27)$$

Sostituendo le (26) e (27) nella (25), si ottiene:

$$d\mathcal{L} = c^2 dm = d(mc^2),$$

ovvero

$$\mathcal{L} = \Delta(mc^2) = \Delta mc^2. \quad (28)$$

Sappiamo che in dinamica classica il lavoro di una forza è uguale alla variazione di energia cinetica, $\mathcal{L} = \Delta T$; se è lecito estendere questo teorema alla dinamica relativistica, allora l'energia cinetica deve avere una espressione del tipo

$$T = mc^2 + k,$$

dove k è una costante, la quale, per il significato di T , deve essere nulla per $v = 0$. Tenendo presente l'espressione della massa relativistica, che per velocità nulla si riduce alla massa a riposo, scriveremo

$$T = (m - m_0)c^2. \quad (29)$$

Si osservi che per velocità modeste, la (20) diventa:

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right),$$

e, sostituendo nella (29), l'energia cinetica assume la forma consueta $T = m_0 v^2 / 2$. Per $v \rightarrow c$ l'energia cinetica tende ad infinito; ne discende che per portare una particella dalla quiete alla velocità della luce, occorre compiere un lavoro infinito. Si riconosce ancora che la velocità della luce è una velocità limite, irraggiungibile dai corpi materiali. La (29) mostra che l'aumento di massa di un corpo, per effetto del moto, è proporzionale alla sua energia cinetica:

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{T}{c^2}.$$

Viceversa è possibile attribuire una massa inerziale all'energia cinetica, data da T/c^2 e, in generale, una massa inerziale

$$\Delta m = \frac{E}{c^2},$$

ad ogni altra forma di energia E . Pertanto scriveremo:

$$E = \Delta mc^2.$$

Viceversa alla massa m può essere attribuita l'energia:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc^2 = \gamma m_0 c^2. \quad (30)$$

In particolare, in condizioni di quiete, l'energia

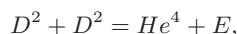
$$E = m_0 c^2, \quad (31)$$

è detta energia intrinseca o a riposo. L'energia cinetica allora risulta:

$$T = (m - m_0)c^2 = E - E_0. \quad (32)$$

Pertanto dobbiamo considerare massa ed energia come aspetti diversi di una medesima essenza; contrariamente a quanto avviene in meccanica classica, dove si ha separatamente conservazione della massa e dell'energia di un sistema isolato, in meccanica relativistica si conserva la somma della massa e dell'energia, espressa in termini di massa. L'esperienza conferma largamente queste deduzioni. In figura 26 è mostrato l'andamento di E e dell'energia cinetica classica in funzione di $\beta = v/c$, cosicché $T = (1/2)m_0 c^2 \beta^2$. L'unità di misura delle ordinate è $m_0 c^2$.

Nella reazione



che si pensa di impiegare nei reattori a fusione, viene liberata l'energia E . Le masse a riposo del deuterio e dell'elio sono rispettivamente $m_0^{(D)} = 2,0147 \text{ a.m.u.}$ e $m_0^{(He)} = 4,0039 \text{ a.m.u.}$; a.m.u. è l'unità di massa atomica, uguale a $1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. La massa del deuterio, prima della reazione, è $4,0294 \text{ a.m.u.}$, mentre la massa dell'elio ottenuto, $4,0039 \text{ a.m.u.}$. La differenza di massa è $\Delta m = 0,0255 \text{ a.m.u.}$, quindi l'energia liberata nella reazione, risulta

$$E = \Delta mc^2 = 0,0255 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 0,3809 \cdot 10^{-11} \text{ J}.$$

Per ogni mole di elio prodotto, si ha un'energia complessiva

$$E_T = N_A E,$$

essendo N_A il numero di Avogadro. Perciò:

$$E_T = 6,0225 \cdot 10^{23} \cdot 0,3809 \cdot 10^{-11} = 2,294 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

Poiché $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$, si ottiene anche:

$$E_T = 6,37 \cdot 10^5 \text{ kWh!!}$$

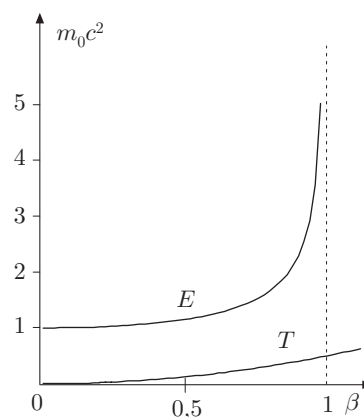


Fig. 20.26

|| 13.1. Altra deduzione della massa relativistica

È noto che la quantità di moto di un sistema si conserva per trasformazioni galileane; verificheremo la validità di tale principio nel caso in cui le velocità delle particelle interagenti siano prossime a quella della luce, velocità relativistiche, come di solito avviene nelle macchine acceleratrici: ciclotroni, sincrotroni...

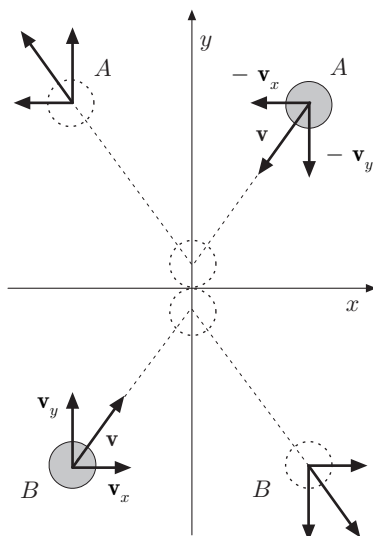


Fig. 20.27

Consideriamo l'urto obliquo elastico classico tra due particelle A e B di ugual massa e animate di velocità opposte, mostrato in figura 27, prima e dopo l'urto. È evidente che la quantità di moto $\mathbf{p}$ del sistema è costante e pari a zero, prima e dopo l'urto. Classicamente la variazione della componente p_y di A, è uguale a $+2mv_y$ e la variazione della stessa componente di B è uguale a $-2mv_y$. La variazione totale è nulla; lo stesso si verifica per le variazioni delle componenti p_x .

Consideriamo ora un riferimento O' in moto lungo l'asse x , con velocità di trascinamento V uguale alla componente v_x della velocità della particella B, prima dell'urto. Un osservatore in tale riferimento vede l'urto come in figura 28, dove le componenti della velocità, formule (17), risultano:

$$\begin{aligned} v'_x(A) &= -\frac{2v_x}{1 + v_x^2/c^2} & -v'_y(A) &= -\frac{v_y}{1 + v_x^2/c^2} \sqrt{1 - v_x^2/c^2} \\ v'_x(B) &= 0 & v'_y(B) &= \frac{v_y}{1 - v_x^2/c^2} \sqrt{1 - v_x^2/c^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che una definizione in cui la quantità di moto sia semplicemente proporzionale alla velocità, attraverso la massa inerziale, costante, non può soddisfare la conservazione della quantità di moto in ogni riferimento. Si potrebbe concludere che la conservazione della quantità di moto non sia invariante per trasformazioni di Lorentz, oppure che si debba ridefinire la quantità di moto; quest'ultima alternativa appare la più plausibile. Si è formalmente ammesso che la massa è funzione della velocità secondo l'equazione (20). Per giustificare questa proposizione esaminiamo il seguente esperimento concettuale (gedanken experiment), proposto da Lewis e Tolman.

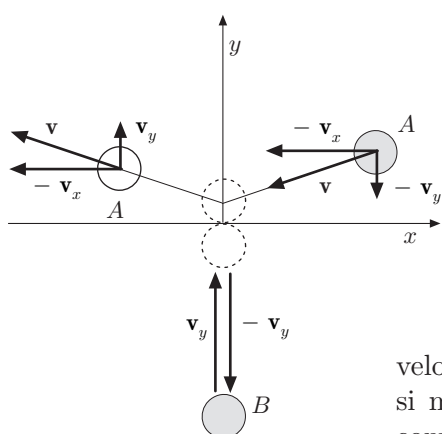


Fig. 20.28

Si considerino due riferimenti O ed O' in moto con velocità relativa v uniforme, parallela all'asse x . Un osservatore in O lancia una particella A con velocità v_0 parallela all'asse y , misurata in O . Un secondo osservatore nel riferimento O' , lancia una particella B identica, con velocità $-v_0$, parallela all'asse y' , misurata in O' , in modo tale che le particelle collidano elasticamente. Si supponga che v_0 sia molto minore della velocità dei riferimenti; ciascuno dei due osservatori vedrà la propria particella rimbalzare con la velocità esattamente invertita. Supponendo che il riferimento O' si muova verso destra, l'osservatore solidale con O vedrà l'urto come in figura 29, mentre l'osservatore solidale con O' vedrà l'urto come in figura 30.

Esaminiamo il fenomeno nel riferimento O : le componenti della velocità della particella A secondo x sono nulle, prima e dopo l'urto, mentre quelle secondo y sono rispettivamente v_0 e

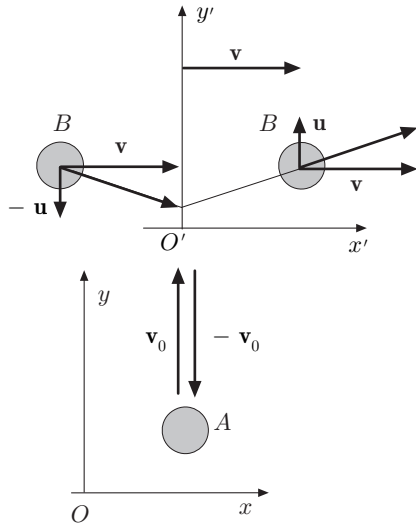


Fig. 20.29

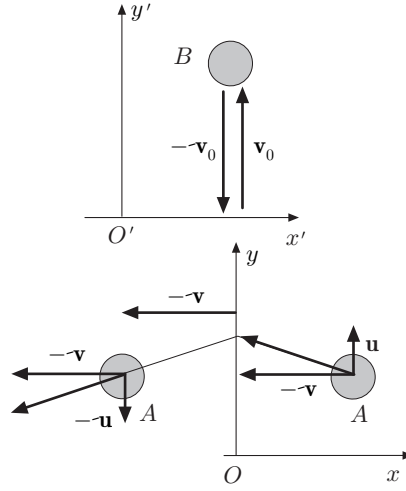


Fig. 20.30

$-v_0$. La componente della velocità secondo x della particella B si mantiene inalterata e uguale a v , prima e dopo l'urto, mentre le componenti secondo y sono rispettivamente $-v_y(B) = -u$ e $v_y(B) = u$. Inoltre dalla seconda delle (17), tenuto conto che $v'_y(B) = -v_0$ e $v'_x(B) = 0$, si ha

$$u = v_y(B) = -v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (33)$$

Nel riferimento O' i ruoli di A e di B risultano scambiati e il segno di v è negativo; infatti la simmetria del fenomeno è completa ruotando la figura 29 di 180° . Si osserva inoltre che nell'uno o nell'altro riferimento, la velocità di ciascuna particella rimane immutata dopo l'urto ed è pari a v_0 oppure $w = \sqrt{u^2 + v^2}$. Pertanto, essendo le particelle identiche e, per ipotesi, le masse funzioni della velocità, la conservazione della componente della quantità di moto secondo y , prima e dopo l'urto, è data da:

$$m(v_0)v_0 - m(w)u = -m(v_0)v_0 + m(w)u,$$

da cui:

$$\frac{m(w)}{m(v_0)} = \frac{v_0}{u}. \quad (34)$$

Ma si è supposto che $v_0 \ll v$ e si può ritenere che v_0 possa essere piccola quanto si vuole, perciò la quantità inerziale $m(v_0)$ tende alla massa a riposo. Inoltre dalla (33) segue che $u \ll v$, e quindi $w \approx v$; dunque la (34), a meno del segno, diventa:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

e la quantità di moto:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

che per $v \ll c$ si riduce alla quella classica $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$. Nell'urto considerato si è considerato la conservazione della componente della quantità di moto secondo x . Le componenti della quantità di moto secondo y , sono rispettivamente

$$p_y(A) = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad p_y(B) = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)/c^2}}.$$

Tenuto conto della (33), si ha:

$$p_y(B) = \frac{m_0 v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 - [v_0^2(1 - v^2/c^2) + v^2]/c^2}} = -\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Pertanto

$$p_y(A) = -p_y(B).$$

La quantità di moto è completamente conservata.

|| 13.2. Altra deduzione dell'energia relativistica

L'identità:

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = 1,$$

che si può scrivere:

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1,$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz, essendo il secondo membro una costante. Moltiplicando ambo i membri per $m_0^2 c^4$, si ha

$$m_0^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_0^2 c^4.$$

Osservando che il quadrato della quantità di moto, definita dalla (21), è

$$p^2 = m_0^2 c^2 \beta^2 \gamma^2,$$

la precedente diventa:

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (35)$$

Poiché la massa a riposo è una costante anche la quantità $m_0^2 c^4$ è una costante, quindi invariante per trasformazioni di Lorentz.

Ma la grandezza $m_0^2 c^4 \gamma^2$ non è altro che l'energia totale relativistica, equazione (30); dunque la (35) diventa:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (36)$$

Più semplicemente la relazione precedente può essere ricavata dalla

$$E = \gamma m_0 c^2,$$

equazione (30), tenendo presente che, per la (21), è

$$p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 \gamma^2 v^2.$$

Moltiplicando quest'ultima per c^2 e sottraendo da E^2 , si ottiene

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0 c^4 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4.$$

La (36), che lega l'energia e la quantità di moto, dipende solamente dalla massa a riposo del corpo ed è invariante per trasformazioni di Lorentz, essendo m_0 una quantità invariante per tali trasformazioni. Ciò significa che, se in un riferimento O' la quantità di moto è p' e l'energia E' , risulta sempre

$$E'^2 - p'^2 c^2 = E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (37)$$

In particolare, per una particella in quiete, $p = 0$, si ottiene la relazione già stabilita $E = m_0 c^2$.

14. Trasformazione della quantità di moto e dell'energia

In un riferimento O , le componenti della quantità di moto e l'energia di una particella sono date dalle espressioni:

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (38)$$

mentre in un riferimento O' che trasla con velocità V uniforme rispetto al primo, dalle:

$$p'_x = \frac{m_0 v'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad p'_y = \frac{m_0 v'_y}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}. \quad (39)$$

Inoltre:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = v'_z = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (40)$$

Osserviamo che

$$\gamma(v') = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v'_x/c)^2 - (v'_y/c)^2}}, \quad (41)$$

e che, per la (40), i termini sotto radice si possono esprimere come segue:

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{v'_x}{c}\right)^2 &= 1 - \frac{(v_x - V)^2/c^2}{(1 - v_x V/c^2)^2} = \frac{(1 - v_x V/c^2)^2 - (v_x - V)^2/c^2}{(1 - v_x V/c^2)^2} \\ &= \frac{(1 - v_x^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 - v_x V/c^2)^2}, \end{aligned} \quad (42)$$

e

$$\left(\frac{v'_y}{c}\right)^2 = \frac{(1 - V^2/c^2)v_y^2/c^2}{(1 - v_x V/c^2)^2}.$$

Sottraendo la precedente dalla (42), si ottiene:

$$1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2 = \frac{(1 - v^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 - v_x V/c^2)^2}.$$

Quindi la (41) diventa:

$$\gamma(v') = \gamma(V)\gamma(v)(1 - v_x V/c^2). \quad (43)$$

Siamo ora in grado di ricavare le trasformazioni di p'_x , p'_y ed E' , equazioni (39). Tenendo presente la (43) e la (40), si ha:

$$p'_x = \gamma(v')m_0 v'_x = \gamma(V)\gamma(v)m_0(v_x - V),$$

ossia:

$$p'_x = \gamma(V) \left(p_x - \frac{V}{c^2} E \right). \quad (44)$$

Analogamente si ottiene:

$$p'_y = \gamma(v)m_0 v_y,$$

ovvero:

$$p'_y = p_y; \quad (45)$$

lo stesso vale per p'_z .

L'energia E' assume la forma:

$$E' = \gamma(v')m_0 c^2 = \gamma(V)\gamma(v)(1 - v_x V/c^2)m_0 c^2,$$

e, per la (38),

$$E' = \gamma(V)(E - V p_x). \quad (46)$$

La quantità di moto nel riferimento O' risulta combinazione lineare della quantità di moto e dell'energia nel riferimento O . Se in quest'ultimo energia e quantità di moto si conservano, altrettanto avverrà in O' .

Va notato che la conservazione dell'energia relativistica totale, implica che il principio di conservazione può essere applicato in ogni processo, sia che si tratti di energia meccanica sia che intervengano altre forme di energia interna; per esempio nell'urto anelastico parte dell'energia cinetica è trasformata in energia di quiete. Si osservi che le trasformazioni ricavate sono analoghe alle trasformazioni delle coordinate spaziali e temporale, equazioni (8). Le trasformazioni inverse si ottengono cambiando $-V$ con $+V$:

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma(V) \left(p'_x + \frac{V}{c^2} E' \right), & p_y &= p'_y, & p_z &= p'_z \\ E &= \gamma(V) \left(E' + \frac{V}{c^2} p'_x \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Dalle

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}, \quad E = \gamma m_0 c^2,$$

si ricava la relazione

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}. \quad (48)$$

Se nella (36) $m_0 = 0$, si ottiene

$$E = pc, \quad p = \frac{E}{c},$$

e la (48) dà $v = c$. Una particella con massa a riposo nulla, si muove con la velocità della luce, uguale per qualunque osservatore. In molti fenomeni, dove la natura quantistica della luce ha rilevanza, possiamo attribuire alla radiazione elettromagnetica un comportamento corpuscolare; tali corpuscoli sono chiamati *fotoni* o *quanti di luce*. Essi hanno energia $E = pc$, e poiché l'energia è legata alla frequenza dalla relazione di Planck, $E = h\nu$, si ha

$$E = h\nu = pc, \quad p = \frac{h\nu}{c}.$$

Ad un fotone di energia E è attribuita una quantità 'a di moto E/c che, per esempio, può essere trasferita nell'interazione con la materia, e massa inerziale

$$m = \frac{E}{c^2}.$$

15. Trasformazioni dell'accelerazione e della forza

Le trasformazioni delle componenti dell'accelerazione in riferimenti in moto relativo uniforme, si ricavano dalle trasformazioni della velocità, equazioni (16) e (17). Il procedimento, anche se laborioso, è elementare; per esempio, differenziando la prima delle (16) si ha

$$\begin{aligned} dv_x &= \frac{dv'_x}{1 + (V/c^2)v'_x} - \frac{v'_x + V}{[1 + (V/c^2)v'_x]^2} \frac{V dv'_x}{c^2} \\ &= \frac{dv'_x}{\gamma^2 [1 + (V/c^2)v'_x]^2}, \end{aligned}$$

ed essendo

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right) = \gamma \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right) dt',$$

si ricava

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{a'_x}{\gamma^3 [1 + (V/c^2)v'_x]^3}. \quad (49)$$

Analogamente per le altre componenti; il lettore può verificare che:

$$a_y = a_z = \frac{a'_y}{\gamma^2 [1 + (V/c^2)v'_x]^2} - \frac{(V/c^2)v'_y a'_x}{\gamma^2 [1 + (V/c^2)v'_x]^3}. \quad (50)$$

Come si può osservare le equazioni precedenti sono piuttosto complicate e non sono invarianti, come vuole la Meccanica classica, in riferimenti inerziali. Inoltre, poiché Einstein sviluppò la teoria della relatività generale sulla equivalenza tra un riferimento accelerato e un riferimento in un campo gravitazionale, hanno un interesse piuttosto limitato.

Esaminiamo ora il problema della trasformazione delle forze. Consideriamo una particella animata di velocità $\mathbf{v}$ rispetto al riferimento del laboratorio, ma in quiete nel riferimento proprio. Poiché vale la (22), scriviamo le variazioni della quantità di moto e del tempo. Dalle (47) si ha:

$$\Delta p_x = \gamma \left(\Delta p'_x + \frac{v}{c^2} \Delta E' \right), \quad \Delta p_y = \Delta p'_y, \quad \Delta p_z = \Delta p'_z.$$

Ma dalla (37),

$$E' = \sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2},$$

e tenendo presente che il riferimento mobile è il riferimento proprio della particella, in cui $p' = 0$, risulta $\Delta E' = 0$; dunque:

$$\Delta p_x = \gamma \Delta p'_x. \quad (51)$$

D'altra parte, gli intervalli di tempo sono legati dalla relazione

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma},$$

pertanto, dividendo la (51) per Δt , si ottiene

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}. \quad (52)$$

Malgrado la diversità delle misure della massa e dell'accelerazione nei due riferimenti, la misura della componente lungo x della forza è la stessa. La componente secondo y , uguale alla componente secondo z , tenuto conto della relazione tra i tempi, è data da:

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_y}{dt'}. \quad (53)$$

Le componenti secondo y e secondo z della forza si trasformano secondo il fattore $1/\gamma$. Le (52) e (53) sono molto importanti in elettromagnetismo.

Per ottenere le espressioni più generali delle componenti della forza, si procede nel solito modo. Per la (44) e l'ultima delle (8):

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dp'_x/dt}{dt'/dt} = \frac{\gamma[dp_x/dt - (V/c^2)dE/dt]}{\gamma[1 - (V/c^2)dx/dt]},$$

ossia

$$F'_x = \frac{F_x - (V/c^2)dE/dt}{1 - (V/c^2)v_x}. \quad (54)$$

Ma per la (37):

$$E^2 = c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + m_0 c^4;$$

differenziando:

$$E \frac{dE}{dt} = c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{F},$$

ed essendo $E = mc^2$:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Pertanto la (54) diventa:

$$F'_x = \frac{F_x - (V/c^2) \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1 - (V/c^2) v_x}. \quad (55)$$

Nello stesso modo si dimostra che:

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}. \quad (56)$$

16. Principio di equivalenza

In Dinamica si è considerato il problema dell'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale. Le esperienze di Galilei avevano indicato che, trascurando la resistenza dell'aria, tutti i corpi in prossimità della superficie terrestre, sono soggetti alla stessa accelerazione g . Questa esclusiva caratteristica della forza di gravità, comporta che la forza peso F_g dipende solamente dalla massa del corpo. Indicando con m_g la massa del corpo, si ha

$$\mathbf{F}_g = m_g \mathbf{g}.$$

D'altra parte, detta m_i la massa inerziale, per la seconda equazione della dinamica, si deve avere

$$\mathbf{F}_g = m_i \mathbf{a};$$

perciò, confrontando con la precedente, si ottiene:

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i} \mathbf{g}.$$

Si potrebbe supporre che il rapporto m_g/m_i dipenda dalla composizione chimica e da altre caratteristiche fisiche del corpo; tuttavia l'esperienza mostra che l'accelerazione è la stessa per tutti i corpi, pertanto tale rapporto deve essere costante. Se si scelgono le unità di misura del SI, il rapporto m_i/m_g è uguale ad uno.

Tuttavia questo tipo di misura non è sufficientemente precisa; lo stesso Newton condusse una serie di esperienze con pendoli della stessa lunghezza ma con masse costituite da materiali diversi. Se le masse inerziale e gravitazionale fossero diverse, dall'equazione della dinamica del pendolo,

$$m_i \mathbf{a} = m_g \mathbf{g},$$

per il periodo di oscillazione si dedurrebbe:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i l}{m_g g}}.$$

Le esperienze di Newton mostrarono, con la precisione di una parte su mille, che il periodo di tutti i pendoli di uguale lunghezza è sempre lo stesso ed è indipendente dalle masse e dal materiale di cui erano costituite.

Successivamente analoga esperienza fu ripetuta da Bessel, il quale trovò lo stesso risultato, con una precisione di una parte su $6 \cdot 10^6$. Eötvös nel 1890 iniziò una serie di misure che continuò per circa 25 anni, dimostrando l'equivalenza con una precisione di una parte su 10^8 . Nelle esperienze di Eötvös due sferette di materiale diverso, ma di uguale massa gravitazionale, sono disposte agli estremi di una sbarretta, sospesa per il centro ad un sottile filo di quarzo che può compiere torsioni elastiche. In sostanza l'apparato è analogo alla bilancia di torsione, descritta a proposito dell'esperienza di Cavendish. Il sistema è soggetto alla forza di gravità $m_g g$ e, a causa della rotazione terrestre, alla componente orizzontale della forza centrifuga $m_i \omega^2 R_T \cos \lambda$, dove λ è la latitudine, figura 31. Se le masse inerziali delle sferette fossero diverse, a causa dell'azione non equilibrata della forza centrifuga, il filo di sospensione si dovrebbe torcere di un certo angolo, che può essere misurato col metodo della leva ottica. Ruotando il sistema di 180° , la torsione dovrebbe avvenire in senso opposto. Si osserva che il sistema non si sposta dalla posizione di equilibrio iniziale, o almeno vi ritorna; infatti il conseguimento dell'equilibrio in una bilancia di torsione richiede molte ore; si conclude dunque che l'azione della forza centrifuga sulle due masse è esattamente uguale. Eötvös confrontò 8 diversi materiali con il platino e trovò che il rapporto

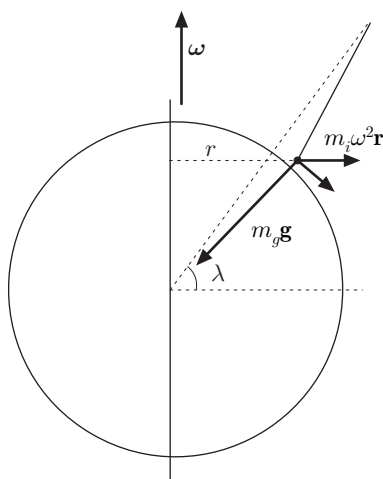


Fig. 20.31

$$\frac{m_i^{(Pt)}}{m_g^{(Pt)}} = \frac{m_i}{m_g},$$

era lo stesso per tutti i materiali esaminati. Il rapporto, come s'è detto, è uguale ad uno, qualora si scelgano le unità del SI. Recenti esperienze di Dicke hanno dimostrato l'uguaglianza della massa inerziale e della massa gravitazionale con una precisione di una parte su 10^{11} .

Il risultato di queste esperienze permette di affermare che: *un osservatore non può distinguere se il suo riferimento si trova in un campo gravitazionale uniforme, oppure se il riferimento è soggetto ad una accelerazione costante.*

Questa proposizione è nota come *principio di equivalenza*. La gravitazione e l'inerzia dunque non sono proprietà diverse della materia, ma sono due aspetti differenti di una caratteristica universale di tutta la materia.

Il fondamento della relatività generale, conseguenza di questo principio, è stato proposto da Einstein nel 1915, in questi termini: *le leggi della Fisica devono essere formulate in modo tale che sia impossibile distinguere tra un campo gravitazionale uniforme ed un riferimento soggetto ad accelerazione costante.*

Un osservatore e tutti gli oggetti in un ascensore chiuso in caduta libera, ascensore di Einstein, non risentono alcuna forza, a meno che nell'ascensore non agiscano altre forze diverse dalla gravità. Lo stesso accade in un satellite orbitante; i corpi all'interno del satellite appaiono privi di peso perché tutti soggetti alla stessa accelerazione.

17. Alcune conseguenze

Massa gravitazionale dei fotoni

Si è stabilito che la massa inerziale di un fotone risulta $h\nu/c^2$. L'esperienza permette di affermare che esso possiede anche massa gravitazionale. Consideriamo un fotone, di frequenza ν , ad una quota h dalla superficie della terra; dopo aver percorso tale quota, l'energia del fotone aumenta di mgh , quindi la sua energia diventa:

$$h\nu' = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gh.$$

Supponendo che la massa inerziale del fotone resti costante durante il percorso, quando raggiunge la superficie della terra, la frequenza diventa:

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right),$$

con una variazione percentuale

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = gh/c^2.$$

Questa variazione è estremamente piccola; il suo ordine di grandezza è 10^{-15} . Tuttavia è stata misurata da Pound e Rebka, usando una sorgente di raggi γ . Si deduce inoltre che un fotone emesso a distanza infinita, quando raggiunge la terra, ha frequenza:

$$\nu' = \nu \left(1 + G \frac{M_T}{R_T c^2} \right),$$

dove M_T , R_T sono la massa e il raggio della terra. Viceversa un fotone emesso da una stella, verrà osservato a distanza infinita con una frequenza:

$$\nu' = \nu \left(1 - GM_S/R_S c^2 \right),$$

con ovvio significato dei simboli. Il segno negativo discende dal fatto che nello sfuggire al campo gravitazionale della stella, il fotone perde energia. La frequenza osservata è minore di quella emessa; l'effetto è noto come *spostamento gravitazionale verso il rosso*, e non va confuso con lo spostamento Doppler.

Deflessione della luce dovuta al Sole

A causa della massa gravitazionale attribuita al fotone, un raggio di luce che passa in prossimità di un corpo celeste, è deviato dalla sua traiettoria dal campo gravitazionale esistente. L'angolo di deviazione può essere calcolato per mezzo della teoria della relatività, ma è possibile ottenerne l'ordine di grandezza con considerazioni classiche.

Supponiamo che il raggio di luce passi in prossimità della superficie del sole, alla distanza r_0 dal suo centro. Fissato un riferimento come in figura 32,

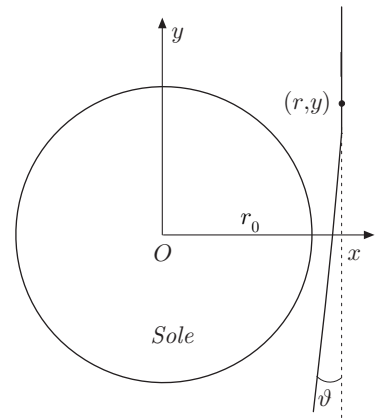


Fig. 20.32

la componente F_x della forza che agisce su un fotone, nel punto (r, y) è data da

$$F_x = -GM_S m_f \frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}},$$

dove M_S , m_f sono le masse del sole e del fotone. Applicando il teorema dell'impulso, il valore finale della componente della velocità del fotone secondo x , è data da

$$m_f v_x = \int F_x dt = \frac{1}{c} \int F_x dy,$$

ossia:

$$v_x = -2G \frac{M_S r_0}{c} \int_0^\infty \frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} = -2G \frac{M_S}{c r_0}.$$

Per $r_0 = R_S$, raggio del sole, si ottiene

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{v_x}{c} = 2G \frac{M_S}{R_S c^2} = 0,87''.$$

L'esperienza è stata compiuta osservando la deviazione della luce di una stella che appare in prossimità del bordo del sole, durante una sua eclissi. Il valore della deflessione ottenuto è, come ordine di grandezza, in accordo con quello previsto dalla teoria della relatività.