Capitolo 5

Esercizi sul campionamento

5.1 Esercizio 1

Testo

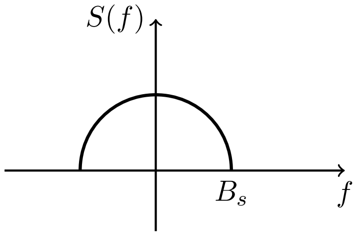
Dato il segnale $x(t) = s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ con $s(t)$ a banda limitata B_s e supponendo di introdurre il segnale $x(t)$ come ingresso di un sistema non lineare con uscita $y(t) = x^2(t)$ si calcoli:

1. la frequenza di campionamento minima per poter campionare il segnale $x(t)$ senza perdere informazione;
2. la frequenza di campionamento minima per permettere una perfetta ricostruzione di $y(t)$ a partire dai suoi campioni.

Risoluzione

Primo quesito

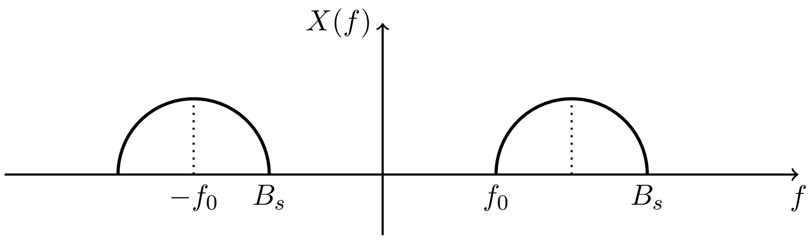
Lo spettro di $s(t)$ può essere rappresentato come:



Come primo passo si determina lo spettro del segnale $x(t)$:

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}\{x(t)\} = S(f) * \frac{1}{2} \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [S(f - f_0) + S(f + f_0)] \end{aligned}$$

Graficamente quindi $X(f)$ è:



Per il teorema del campionamento la frequenza minima di campionamento deve essere almeno due volte la banda del segnale; indicando con B_x la banda del segnale $x(t)$:

$$f_{c_{min}}|_x = 2 \cdot B_x$$

In questo caso:

$$B_x = f_0 + B_s$$

Secondo quesito

Poichè $y(t) = x^2(t)$ esiste una precisa relazione fra le bande dei due segnali:

$$B_y = 2 \cdot B_x$$

Perciò:

$$f_{c_{min}}|_y = 2 \cdot B_y = 2 \cdot 2 \cdot B_x = 4 \cdot (f_0 + B_s)$$

■

5.2 Esercizio 2

Testo

Il segnale:

$$x(t) = \frac{1}{\pi^2\, t^2} \cdot \left[\sin^2\left(\frac{\pi t B}{2}\right) - \sin^2(\pi t B)\right]$$

viene campionato. Determinare quale deve essere la minima frequenza di campionamento per ricostruire il segnale perfettamente partendo dai suoi campioni.

Risoluzione

Come primo passaggio è necessario rielaborare l'espressione di $x(t)$:

$$x(t) = \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi t B}{2}\right)}{\pi^2\, t^2} - \frac{\sin^2(\pi t B)}{\pi^2\, t^2}$$

Ricordando la trasformata notevole:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{T \cdot \sin^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi^2\, t^2}\right\} = \mathrm{tri}\,(f\,T)$$

e osservando che $T = \frac{2}{B}$ nella prima parte e $T = B$ nella seconda si può esplicitare l'espressione necessaria per usare la trasformata notevole:

$$x(t) = \frac{B}{2} \cdot \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi t B}{2}\right)}{\pi^2\, t^2} \cdot \frac{2}{B}\right] - B \cdot \left[\frac{\sin^2\left(\pi t B\right)}{\pi^2\, t^2} \cdot \frac{1}{B}\right]$$

A questo punto:

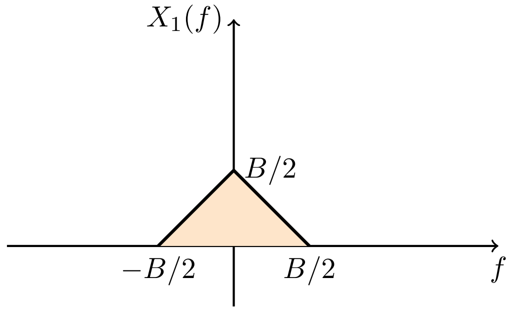
$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{B}{2} \cdot \mathrm{tri}\left(f\,\frac{2}{B}\right) - B \cdot \mathrm{tri}\left(f\,\frac{1}{B}\right)$$

Si indica con:

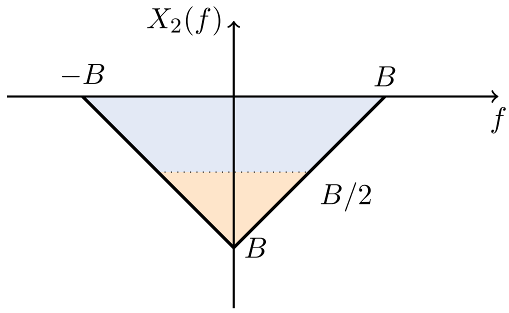
. $X_1(f) = \frac{B}{2} \cdot \mathrm{tri}\left(f\,\frac{2}{B}\right)$;

. $X_2(f) = B \cdot \mathrm{tri}\left(f\,\frac{1}{B}\right)$;

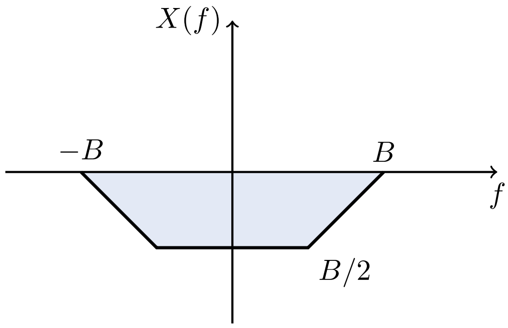
Graficamente il segnale $X_1(f)$ è:



Mentre il segnale $X_2(f)$ è:



Il risultato dell'addizione dei due segnali è il segnale $X(f)$:



Poichè la banda del segnale è B allora:

$$f_{c_{min}} = 2 \cdot B$$

■

5.3 Esercizio 3

Testo

Si considerino due segnali:

- $x_1(t)$ con banda limitata B_1;
- $x_2(t)$ con banda limitata B_2.

Si costruisca il segnale $y(t)$ come:

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Volendo campionare tale segnale, si determini quale deve essere la sua frequenza di campionamento minima.

Risoluzione

La relazione che caratterizza $y(t)$ scritta nel dominio delle frequenze è:

$$Y(f) = X_1(f) * X_2(f)$$

Per le proprietà della convoluzione nel dominio temporale la banda di $y(t)$ risulta essere:

$$B_y = B_1 + B_2$$

quindi anche nel dominio spettrale:

$$Y(f) = 0 \text{ per } |f| > (B_1 + B_2)$$

La minima frequenza di campionamento è pertanto:

$$f_{c_{min}} = 2 \cdot (B_1 + B_2)$$

■

5.4 Esercizio 4

Testo

Il segnale:

$$x(t) = 20 + 20 \sin\left(500t + \frac{\pi}{6}\right)$$

deve essere campionato e ricostruito esattamente dai suoi campioni.

Si determini:

1. quale deve essere il massimo intervallo ammissibile fra due campioni;
2. quale deve essere il minimo numero N di campioni necessari per ricostruire il segnale.

Risoluzione

Lo spettro del segnale $x(t)$ è:

$$X(f) = 20 \cdot \delta(f) + \frac{20}{2j} \cdot [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \cdot \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}}$$

Siccome:

$$500 = \omega_0 = 2\pi f_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f_0 = \frac{500}{2\pi} = 79.6\,\mathrm{Hz}$$

Primo quesito

La frequenza minima di campionamento è:

$$f_{c_{min}} = 2 \cdot f_0 = 159.2\,\mathrm{Hz}$$

Pertanto il tempo massimo di intervallo fra due campioni non può essere superiore a:

$$T_{c_{max}} = \frac{1}{f_{c_{min}}} = \frac{1}{159.2\,\mathrm{Hz}} = 0.00628\,\mathrm{s} = 6.28\,\mathrm{ms}$$

Secondo quesito

Poichè il periodo massimo è pari a 6.28 ms il segnale si può ricostruire con almeno:

$$N = \frac{1\,\mathrm{s}}{T_{c_{max}}} = \frac{1\,\mathrm{s}}{0.00628\,\mathrm{s}} = 159.24$$

Il numero di campioni non può essere un numero decimale perciò si prende l'intero inferiore:

$$N = 159$$

■

5.5 Esercizio 5

Testo

Si consideri il segnale:

$$y(t) = x(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

dove:

- $x_1(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$;
- $x_2(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi N f_0 t)$.

Supponendo $x(t)$ strettamente limitato in banda, con $B = 1\,\mathrm{kHz}$ e che $y(t)$ deve essere campionato in modo tale da essere ricostruito perfettamente con una frequenza $f_c = 10\,\mathrm{kHz}$, si determinino f_0 e N in modo tale che:

- i segnali di ingresso siano perfettamente separati;
- si abbia una perfetta ricostruzione di $y(t)$;
- N sia massimo.

Risoluzione

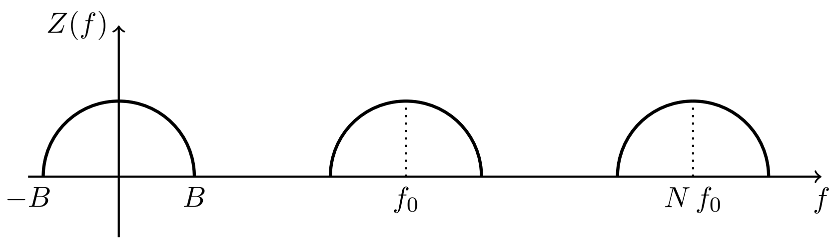
Analiticamente:

$$y(t) = x(t) \cdot [1 + \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi N f_0 t)]$$

Il suo spettro è quindi:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) * \left[\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - N f_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}\delta(f - N f_0)\right] = X(f) + \frac{1}{2} \cdot X(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot X(f + f_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot X(f - N f_0) + \frac{1}{2} \cdot X(f + N f_0) \end{aligned}$$

Graficamente:



Come si può vedere dal grafico i segnali sono spettralmente separati solo se:

$$f_0 \geq 2 \cdot B$$

Inoltre per ricostruire perfettamente il segnale occorre che:

$$f_c \geq 2 \cdot B_y = 2 \cdot (N\, f_0 + B)$$

Con queste due equazioni a sistema si possono ricavare f_0 ed N:

$$\begin{cases} f_0 \geq 2 \cdot B \\ f_c \geq 2 \cdot (N\, f_0 + B) \end{cases} = \begin{cases} f_0 \geq 2\,\mathrm{kHz} \\ N f_0 + B \leq \dfrac{f_c}{2} \end{cases} = \begin{cases} f_0 \geq 2\,\mathrm{kHz} \\ N \leq \dfrac{f_c}{2 f_0} - \dfrac{B}{f_0} \end{cases}$$

I parametri f_c e B sono noti; imponendo $f_0 = 2\,\mathrm{kHz}$:

$$N \leq \frac{10\,\mathrm{kHz}}{2 \cdot 2\,\mathrm{kHz}} - \frac{1\,\mathrm{kHz}}{2\,\mathrm{kHz}} = \frac{10}{4} - \frac{1}{2} = 2$$

■