

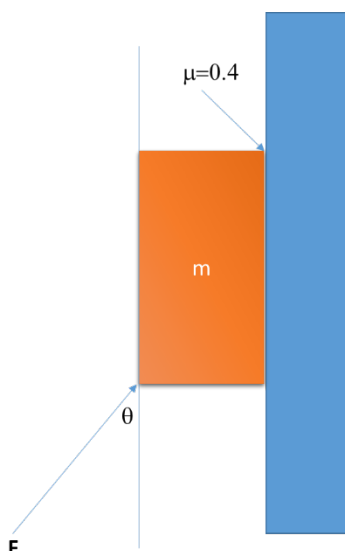
Compito A

Nome e Matr. _____

Esercizio 1

Un blocco di massa $m=10\text{ kg}$ è sorretto dalla forza esterna F come mostrato in figura. In condizioni di equilibrio, si determini:

- La reazione normale al piano verticale in funzione di F e θ .
- Il valore dell'angolo che minimizza l'intensità della forza F necessaria a mantenere il blocco in equilibrio ed il corrispondente valore del modulo della forza



Sol.

Scegliamo un sistema di coordinate con l'asse x positivo uscente dal muro e l'asse y positivo verso l'alto. Le equazioni del moto del blocco sono:

$$ma_x = N - F \sin \theta$$

$$ma_y = F \cos \theta - mg + F_a$$

Da cui segue subito:

$$N = F \sin \theta$$

$$F_a = mg - F \cos \theta \Rightarrow \mu N = \mu F \sin \theta = mg - F \cos \theta$$

Da cui ricaviamo il modulo della forza applicata:

$$F = \frac{mg}{\mu \sin \theta + \cos \theta}$$

Minimizziamo questa funzione, massimizzando il denominatore:

$$\frac{d}{d\theta}(\mu \sin \theta + \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \arctan \mu \cong 21.8^\circ$$

Il valore corrispondente della forza è:

$$F = \frac{mg}{\cos \theta (1 + \mu \tan \theta)} = \frac{mg}{\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} (1 + \mu^2)} = \frac{mg}{\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} (1 + \mu^2)} = \frac{mg}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cong 91N$$

Esercizio 2

Un blocco di massa $m_1=2\text{kg}$ scivola lungo un piano privo di attrito alla velocità di $v_1=10\text{m/s}$. Davanti a questo blocco, sulla stessa linea e nello stesso verso, si muove con $v_2=3\text{m/s}$ un secondo blocco di massa $m_2=5\text{kg}$. Una molla, con costante elastica $k=1.12\text{ N/mm}$, è attaccata sul retro di m_2 . Quando i due blocchi si urtano la molla si comprime. Determinare:

- la massima compressione della molla
- le velocità dei due blocchi dopo l'intero processo di urto.

Sol.

(a) nel sistema agiscono soltanto forze interne e dunque si conserva la quantità di moto totale dalla quale si ricava la velocità del centro di massa del sistema:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_{cm} = cte \Rightarrow V_{cm} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 5 \text{ m.s}^{-1} \quad (1)$$

Nell'istante di massima compressione λ della molla i due blocchi si muovono come un unico corpo con velocità V_{cm} . Applicando la legge di conservazione dell'energia meccanica, poiché le forze in gioco sono conservative, prima dell'urto e nel momento di massima compressione si ottiene:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{cm}^2 + \frac{1}{2} k \lambda^2 \quad (2)$$

dalla quale si ricava:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) V_{cm}^2}{k}} = 25\text{cm} \quad (3)$$

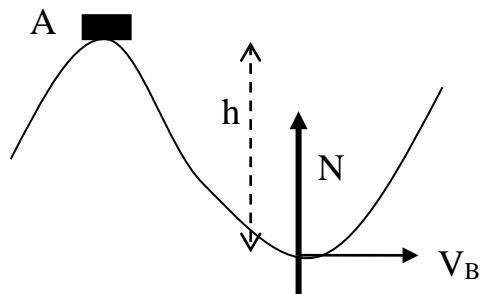
(b) siano v_1' e v_2' le velocità dopo l'intero processo che è un urto unidimensionale elastico. Applicando le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia si ottengono:

$$\begin{cases} v_1' &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2 = 0 \text{ m.s}^{-1} \\ v_2' &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2 = 7 \text{ m.s}^{-1} \end{cases} \quad (4)$$

Esercizio 3

In un Luna Park un tratto di montagne russe ha la forma mostrata in figura. Un carrello, di massa $m=500$ kg, arriva nel punto A con velocità $v_A=5$ m/s e scivola senza attrito fino al punto B che si trova ad un dislivello più in basso $h=10$ m. Determinare:

1. la velocità v_B nel punto B;
2. se nel punto B la rotaia ha un raggio di curvatura $r = 12$ m determinare la reazione vincolare esercitata quando il carrello vi giunge.



Sol.

(a) per trovare la velocità del carrello nel punto B possiamo utilizzare la conservazione dell'energia perché la forza peso è conservativa e la reazione vincolare non compie lavoro (assenza di attrito):

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh} \approx 14.9 \text{ m/s} \quad (1)$$

(b) nel punto B le forze (reazione vincolare \vec{N} e peso $m\vec{g}$) sono dirette lungo la verticale. Proiettando la seconda legge di Newton e tenendo conto dell'espressione dell'accelerazione radiale si ottiene:

$$N - mg = m \frac{v_B^2}{r} \Rightarrow N = mg + m \frac{v_B^2}{r} = mg \left(1 + 2\frac{h}{r}\right) + m \frac{v_A^2}{r} \approx 1.4 \cdot 10^4 \text{ N} \quad (2)$$

C.d.S. Ingegneria Edile – Gruppo J → Z

Esonero di Fisica Generale I del 6/5/2016

Compito B

Nome e Matr. _____

Esercizio 1

Un pendolo semplice di lunghezza $l = 2\text{m}$ e massa $m = 1\text{ kg}$ viene abbandonato, con velocità iniziale nulla, quando il filo forma con la verticale un angolo di 90° . Nel punto più basso la massa urta un blocco fermo di massa $M = 5\text{ kg}$. Supponendo l'urto elastico determinare:

- la velocità v_0 del pendolo all'istante prima dell'urto;
- la velocità V del blocco subito dopo l'urto e l'altezza h alla quale risale il pendolo dopo l'urto.

Sol.

Esercizio 1

(a) per trovare la velocità del pendolo al momento dell'urto è sufficiente applicare il teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = m g l \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 g l} \approx 6.3\text{ m/s} \quad (1)$$

(b) nell'urto il momento della quantità di moto rispetto al punto di sospensione del pendolo, e siccome l'urto è elastico si conserva anche l'energia cinetica. Dette v e V le velocità del pendolo e del blocco subito dopo l'urto si ha:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ m v_0 l = m v l + M V l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \left(\frac{2m}{m+M}\right) v_0 \approx 2.1\text{ m/s} \\ v = \left(\frac{m-M}{m+M}\right) v_0 \approx -4.2\text{ m/s} \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

(c) $v \leq 0$ il pendolo rimbalza all'indietro, l'altezza massima raggiunta si ritrova sempre con il teorema dell'energia cinetica:

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -m g h \Rightarrow h = \frac{v^2}{g} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 l \approx 89\text{ cm} \quad (3)$$

Esercizio 2

Un carrello di massa $M = 200\text{ kg}$ si muove con velocità costante pari a 72 Km/h . Ad un certo istante una persona di 50 kg , in piedi sulla parte posteriore del carrello, salta giù dal carrello con velocità

relativa al carrello subito dopo il salto di modulo $u = 5 \text{ m/s}$ e direzione parallela al binario. Si determini:

- il rapporto tra le velocità del carrello e della persona dopo il salto
- il lavoro compiuto dalla persona per eseguire il salto

Sol.

Per la conservazione della quantità di moto si avrà:

$$(M + m)V_0 = MV + mv$$

Ma la velocità della persona nel sistema di laboratorio vale:

$$v = V - u$$

E dunque si ha:

$$(M + m)V_0 = MV + m(V - u) = V(M + m) - mu \Rightarrow V = V_0 + \frac{m}{(M + m)}u \cong 20 \text{ms}^{-1}$$

E per la velocità della persona si ha:

$$v = V - u = V_0 + \frac{m}{(M + m)}u - u = V_0 + u\left(\frac{m}{M + m} - 1\right) = V_0 - u\left(\frac{M}{M + m}\right) \cong 16 \text{ms}^{-1}$$

Il rapporto vale:

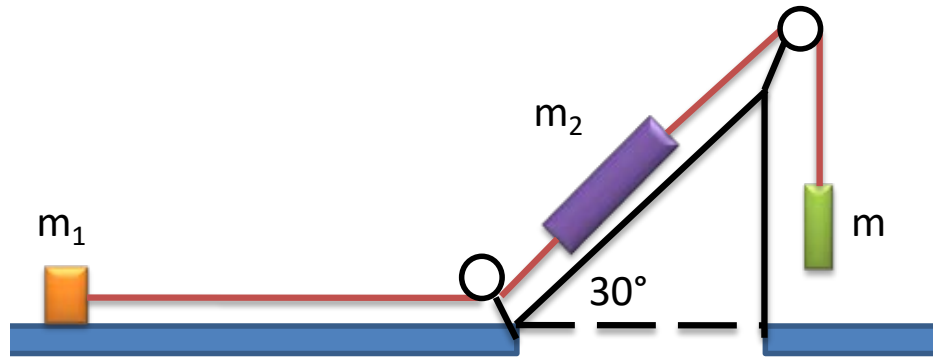
$$\frac{V}{v} = \frac{V_0 + \frac{m}{(M + m)}u}{V_0 - u\left(\frac{M}{M + m}\right)} = \frac{V_0(M + m) + mu}{V_0(M + m) - Mu} \cong 1.4$$

Per calcolare il lavoro basta determinare la differenza di energia cinetica totale del sistema:

$$L = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M + m)V_0^2 \cong 500 \text{J}$$

Esercizio 3

Tre corpi di masse $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 10 \text{ kg}$ e m sono collegati come in figura. Le masse dei fili e delle carrucole sono trascurabili. Tra i corpi e le superfici di appoggio c'è attrito con coefficienti di attrito statico e dinamico pari a 0.12 e 0.10



Si determini:

- il valore massimo di m per il quale sussiste l'equilibrio
- il valore dell'angolo (supposto variabile) che massimizza l'accelerazione dei corpi e le corrispondenti tensioni dei fili nel caso $m = 2m_{\max}$

Sol.

Orientando l'ascissa curvilinea da sinistra verso destra con verso positivo verso la massa m , le equazioni dei tre corpi si scrivono:

$$m_1 a = \tau_1 - \mu_s m_1 g$$

$$m_2 a = -\tau_1 + \tau_2 - \mu_s m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha$$

$$m a = -\tau_2 + m g$$

In situazione di equilibrio, imponendo nell'ultima equazione in particolare che $a \leq 0$

$$\tau_1 = \mu_s m_1 g$$

$$m g \leq \tau_2 \Rightarrow m \leq \frac{\tau_2}{g}$$

$$0 = -\tau_1 + \tau_2 - \mu_s m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\mu_s m_2 g \cos \alpha + m_2 g \sin \alpha + \mu_s m_1 g = \tau_2 \Rightarrow$$

$$m \leq \mu_s m_2 \cos \alpha + m_2 \sin \alpha + \mu_s m_1 \cong \mu_s m_1 \sqrt{3} + m_1 + \mu_s m_1 \cong 6.6 \text{ kg}$$

Quando il sistema è in moto si ha:

$$m_1 a = \tau_1 - \mu_d m_1 g$$

$$m_2 a = -\tau_1 + \tau_2 - \mu_d m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha$$

$$2m_{\max} a = -\tau_2 + 2m_{\max} g$$

Sommando la prima e la terza e riscrivendo la seconda si ha:

$$m_2 a = -\tau_1 + \tau_2 - \mu_d m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha \Rightarrow \tau_1 - \tau_2 = -m_2 a - \mu_d m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha$$

$$m_1 a + 2m_{\max} a = \tau_1 - \tau_2 + 2m_{\max} g - \mu_d m_1 g \Rightarrow \tau_1 - \tau_2 = m_1 a + 2m_{\max} a - 2m_{\max} g + \mu_d m_1 g$$

Eguagliando si avrà:

$$\begin{aligned}
-m_2 a - \mu_d m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha &= m_1 a + 2m_{\max} a - 2m_{\max} g + \mu_d m_1 g \\
a(m_1 + 2m_1 + 2m_{\max}) &= 2m_{\max} g - \mu_d m_1 g - 2\mu_d m_1 g \cos \alpha - 2m_1 g \sin \alpha \Rightarrow \\
a &= \frac{2m_{\max} g - \mu_d m_1 g - 2\mu_d m_1 g \cos \alpha - 2m_1 g \sin \alpha}{(m_1 + 2m_1 + 2m_{\max})}
\end{aligned}$$

Derivando rispetto all'angolo e ponendo a zero si ha:

$$\frac{da}{d\alpha} = 2\mu_d m_1 g \sin \alpha - 2m_1 g \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \mu_d \sin \alpha - \cos \alpha = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\mu_d} \Rightarrow \alpha \cong 84^\circ$$

Sostituendo nell'espressione dell'accelerazione e tenendo conto che

$$m_{\max} = m_1 (\mu_s \sqrt{3} + 1 + \mu_s)$$

si ha:

$$a^* = g \frac{2(\mu_s (\sqrt{3} + 1) + 1) - \mu_d (1 + 2 \cos \bar{\alpha}) - 2 \sin \bar{\alpha}}{(3 + 2(\mu_s \sqrt{3} + 1 + \mu_s))} \approx 0.097 g \cong 0.95 m s^{-2}$$

Infine avremo:

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \tau_2 &= -2m_1 a_{\max} - 2\mu_d m_1 g \cos \bar{\alpha} - 2m_1 g \sin \bar{\alpha} = \\
&= -2m_1 (a_{\max} + \mu_d g \cos \bar{\alpha} + g \sin \bar{\alpha}) \cong -10 * (0.95 + 0.1 + g \sin \bar{\alpha}) \cong 108 N
\end{aligned}$$

Compito C

Nome e Matr. _____

Problema 1

Una pallina di massa $m=10\text{g}$ scivola su una guida rettilinea orizzontale scabra. Alla velocità $v=50\text{m/s}$, la pallina ne urta un'altra identica, inizialmente ferma sulla guida, e vi rimane attaccata. Determinare:

1. l'energia dissipata nell'urto;
2. la distanza percorsa dalle palline prima di fermarsi se il coefficiente d'attrito dinamico vale $\mu = 0,4$;
3. la distanza percorsa dalle palline se l'urto fosse stato perfettamente elastico.

Sol.

Esercizio 1

(a) la velocità v_f del sistema dopo l'urto, supposto completamente anelastico, si ottiene dalla conservazione della quantità di moto:

$$m v + 0 = (m + m) v_f \Rightarrow v_f = \frac{1}{2} v = 25 \text{ m/s} \quad (1)$$

Pertanto l'energia dissipata corrisponde alla variazione di energia cinetica nell'urto:

$$E_{diss.} = \Delta K = \frac{1}{2} (2m) v_f^2 - \frac{1}{2} m v^2 = -\frac{1}{4} m v^2 \approx -6,25 \text{ J} \quad (2)$$

(b) la distanza percorsa sul piano orizzontale scabro prima di fermarsi si può ricavare dal teorema dell'energia cinetica ricordando che l'unica forza che compie lavoro è quella di attrito radente:

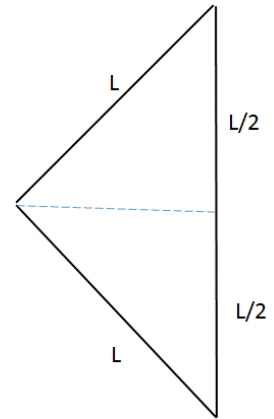
$$0 - \frac{1}{2} (2m) v_f^2 = -\mu (2m) g D \Rightarrow D = \frac{v_f^2}{2\mu g} = \frac{v^2}{8\mu g} \approx 80 \text{ m} \quad (3)$$

(c) se l'urto fosse elastico, dalle leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica si ricava che la prima pallina si ferma e la seconda parte con velocità v uguale a quella della precedente. E dunque si può ricavare la distanza percorsa dalla seconda pallina prima di fermarsi:

$$0 - \frac{1}{2} m v^2 = -\mu m g D^* \Rightarrow D^* = \frac{v^2}{2\mu g} \approx 320 \text{ m} \quad (4)$$

Problema 2

Come mostrato in figura, una pallina da 1.5 kg è collegata da due fili ideali, di uguale lunghezza $L = 2$ m ad un'asta. Durante la rotazione supposta uniforme, i fili si tendono e formano insieme all'asta un triangolo equilatero. Se il modulo della tensione superiore vale 40 N, determinare:



- il modulo della tensione del filo inferiore
- la velocità con cui ruota la palla
- il valore ~~massimo~~ minimo della massa della pallina affinché la tensione inferiore sia un quarto di quella superiore

Sol.

Esercizio 1 Durante la rotazione dell'asta il moto della pallina è circolare uniforme pertanto la risultante delle forze agenti deve essere una forza centripeta. Con le notazioni della figura, in cui $\theta = 30^\circ$ perchè il triangolo è equilatero, possiamo scrivere la legge di Newton e le sue proiezioni:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_c \Rightarrow \begin{cases} T_1 \cos \theta + T_2 \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \\ T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta - mg = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Pertanto possiamo ricavare:

(a) la tensione del filo inferiore:

$$T_2 = T_1 - \frac{mg}{\sin \theta} \approx 10,6 \text{ N} \quad (2)$$

(b) tenendo conto che $R = l \cos \theta$, la velocità della pallina:

$$v = \sqrt{\frac{(T_1 + T_2) \cdot l \cdot \cos^2 \theta}{m}} \approx 7,1 \text{ m/s} \quad (3)$$

(c) Tenuto conto della (2) si ha:

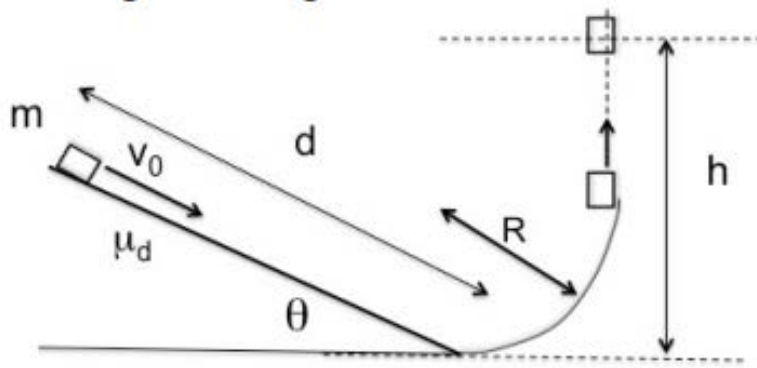
$$T_2 = T_1 - \frac{mg}{\sin \theta} \leq \frac{1}{4} T_1 \Rightarrow \frac{3}{4} T_1 \leq \frac{mg}{\sin \theta} \Rightarrow m \geq \frac{3}{4} \frac{T_1}{g} \sin \theta \cong 1.53$$

Si tratta quindi in realtà di un valore minimo

Problema 3. Un punto di massa m viene lanciato con una certa velocità iniziale in discesa lungo un tratto $d = 10$ m di un piano scabro con coefficiente di attrito $= 0.3$ e inclinato di un angolo di 30° rispetto all'orizzontale. Arrivato nel punto più basso il punto percorre una guida liscia a forma di quarto di circonferenza di raggio R e raggiunge il punto finale prosegue lungo la verticale in moto di caduta libera raggiungendo la quota $h = 8$ m rispetto alla base del piano inclinato.

Determinare:

- il valore minimo della velocità iniziale che consente al punto di raggiungere la quota h
- se la velocità iniziale è maggiore di un fattore $\sqrt{2}$ della minima trovata al punto precedente, la nuova quota massima raggiunta dal punto
- la reazione vincolare in un punto generico della conca se anche essa presenta lo stesso coefficiente di attrito



Sol.

(1) per trovare la velocità v_h quando si raggiunge la quota h finale possiamo sfruttare il teorema dell'energia cinetica in cui i lavori delle forze valgono: $W_{peso} = m g d \sin \theta - m g h$ e $W_{attr.} = -\mu_d m g d \cos \theta$, e otteniamo:

$$\frac{1}{2} m v_h^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g d \sin \theta - m g h - \mu_d m g d \cos \theta \quad (8)$$

$$\Rightarrow v_h^2 = v_0^2 + 2 g d \sin \theta - 2 g h - 2 \mu_d g d \cos \theta \geq 0 \quad (9)$$

Il raggiungimento della quota h si formalizza affermando che risulta $v_h^2 \geq 0$ e dunque:

$$(A) v_0^2 \geq +2g [h - d(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)] = v_{0min}^2 \Rightarrow v_{0min} \approx 10,5 \text{ m/s}$$

(2) con i nuovi valori dei parametri possiamo stimare:

$$(A) v_0' = \sqrt{2} v_{0min}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{2v_{0min}^2 + 2gd(\sin - \mu_d \cos \theta)}{2g} = h + [h - d(\sin - \mu_d \cos \theta)] \approx 13,6 \text{ m}$$

(3) La reazione vincolare in un punto generico vale:

$$m \frac{v^2(\alpha)}{R} = N(\alpha) - mg \cos \alpha$$

Dove α è l'angolo formato dal raggio passante per la posizione del corpo e la verticale. Quando il corpo è alla base $\alpha = 0^\circ$. La velocità si ricava dal teorema dell'energia cinetica:

$$m \frac{v^2(\alpha)}{2} - m \frac{v^2(0)}{2} = mgR(1 - \cos \alpha) - \mu_s R \int_0^\alpha N(\theta) d\theta$$

$$\text{Da cui: } R \frac{N(\alpha) - mg \cos \alpha}{2} - m \frac{v^2(0)}{2} = mgR(1 - \cos \alpha) - \mu_s R \int_0^\alpha N(\theta) d\theta$$

$$\text{Semplificando si ha: } N(\alpha) + 2\mu_s \int_0^\alpha N(\theta) d\theta = 2mg \left(1 - \frac{\cos \alpha}{2} \right) + m \frac{v^2(0)}{R}$$

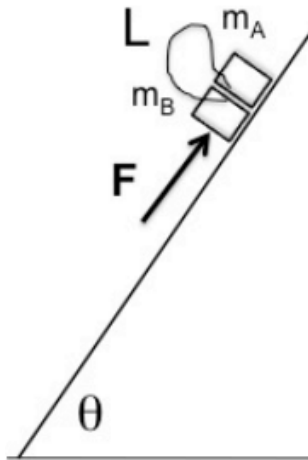
Compito D

Nome e Matr. _____

Esercizio 1

Due punti materiali A e B di massa $m_A = 0.5 \text{ kg}$ e $m_B = 2 \text{ kg}$, sono uniti tra loro da un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L . I due corpi giacciono su un piano scabro inclinato di un angolo $\theta = 50^\circ$ rispetto all'orizzontale, e inizialmente sono mantenuti fermi da una forza F di modulo 20 N , orientata come in figura ed applicata a B. I coefficienti di attrito, uguali per attrito statico e dinamico, tra i corpi A e B ed il piano inclinato valgono $\mu_A = 0.25$ e $\mu_B = 0.15$. All'istante $t=0$ si toglie la forza F e i due corpi iniziano a scendere. All'istante $t^* = 1.5 \text{ s}$, il filo che unisce i due corpi si tende. Determinare:

- il modulo, direzione e verso della forza di attrito statico che agisce complessivamente sui due corpi A e B quando sono fermi;
- la lunghezza L del filo (usare opportunamente le equazioni orarie dei due punti)



Sol.

(a) all'equilibrio possiamo scrivere che si annulla la somma delle forze applicate al sistema, visto come un unico blocchetto di massa $m_A + m_B$:

$$(m_A + m_B) \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_s + \vec{F} = 0 \quad (1)$$

Proiettando lungo la direzione del piano orientata verso il basso si ottiene:

$$+ (m_A + m_B) \cdot g \cdot \sin \theta + F_s - F = 0 \Rightarrow F_s = F - (m_A + m_B) \cdot g \cdot \sin \theta \approx +1,2 \text{ N} \quad (2)$$

notare il segno positivo che significa che l'attrito impedisce ai blocchi di salire.

(b) levando la forza \vec{F} , poiché $\tan \theta \approx 1,19 \geq \mu_A, \mu_B$, i due blocchetti inizieranno a scendere lungo il piano, ma con accelerazioni diverse visto che $\mu_A \neq \mu_B$. Nella discesa lungo un piano inclinato con attrito l'accelerazione è costante, si ricava semplicemente dalla legge di Newton e vale $a = g(\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta)$, nel nostro caso risulta:

$$\begin{cases} a_A = g(\sin \theta - \mu_A \cdot \cos \theta) \approx 5,93 \text{ m/s}^2 \\ a_B = g(\sin \theta - \mu_B \cdot \cos \theta) \approx 6,56 \text{ m/s}^2 \end{cases} \Rightarrow a_B \geq a_A \quad (3)$$

Questo significa che il corpo B scende più velocemente di A, i due punti si distanziano fino a quando la loro distanza ($d \equiv x_B - x_A$) non raggiunge la lunghezza del filo L che si tende. Questo avviene all'istante t^* , impostando le equazioni orarie otteniamo:

$$\begin{cases} x_A^* = \frac{1}{2} a_A t^{*2} \\ x_B^* = \frac{1}{2} a_B t^{*2} \end{cases} \Rightarrow d^* = x_B^* - x_A^* \equiv L \Rightarrow L = \frac{1}{2} (a_B - a_A) t^{*2} \approx 0,71 \text{ m} \quad (4)$$

Esercizio 2

Due palline, di massa $m_1=10\text{g}$ e $m_2=30\text{g}$, sono collegate da un filo che tiene in compressione di $\delta=4\text{cm}$ una molla di costante $k=4 \text{ N/cm}$. Il sistema è disposto su un piano orizzontale, a un certo istante il filo si spezza e le palline partono con velocità v_1 e v_2 . Dopo un breve tratto la prima pallina risale per un tratto d lungo un piano inclinato di $\theta=45^\circ$ rispetto all'orizzontale, trascurando ogni attrito:

- 1) Determinare le velocità v_1 e v_2 ;
- 2) Determinare la distanza d percorsa in salita lungo il piano inclinato;
- 3) Potendo variare a piacere m_2 , quali sono i massimi valori $v_{1\text{max}}$ e d_{max}

(1) per trovare le velocità possiamo applicare al nostro sistema delle due palline: (a) la legge di conservazione della quantità di moto lungo l'asse orizzontale $P_x^{(ini)} = P_x^{(fin)}$ perché la risultante delle forze esterne si annulla (la forza elastica è interna); (b) la legge di conservazione dell'energia meccanica $E_{tot}^{(ini)} = E_{tot}^{(fin)}$ perché non ci sono forme di dissipazione:

$$\begin{cases} 0 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \\ 0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \delta^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = +\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \sqrt{\frac{k \cdot \delta^2}{m_1 + m_2}} \approx +6,9 \text{ m/s} \\ v_2 = -\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sqrt{\frac{k \cdot \delta^2}{m_1 + m_2}} \approx -2,3 \text{ m/s} \end{cases} \quad (1)$$

(2) per determinare il tratto d percorso lungo il piano applichiamo il teorema dell'energia cinetica fra l'istante di inizio della salita ($v = v_1$) e quello di arresto ($v = 0$):

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -m_1 g d \sin \theta \Rightarrow d = \frac{v_1^2}{2g \sin \theta} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{k \cdot \delta^2}{2m_1 g \sin \theta} \approx 3,45 \text{ m} \quad (2)$$

(3) dalle relazioni precedenti si evince che, fissato m_1 , la velocità v_1 cresce se $m_2 \nearrow$ e dunque il valore massimo si ottiene per $m_2 \rightarrow \infty$ per il quale $\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \rightarrow 1$. I valori massimo sono:

$$v_{1max} = \sqrt{\frac{k \cdot \delta^2}{m_1}} \approx 8,0 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad d_{max} = \frac{k \cdot \delta^2}{2m_1 g \sin \theta} \approx 4,60 \text{ m} \quad (3)$$

Esercizio 3

Un veicolo spaziale di massa $M=500\text{kg}$ viaggia con velocità costante ad una distanza $d=100 \text{ km}$ da un asteroide approssimativamente sferico di massa $m'=10^{15} \text{ kg}$ e raggio $R = 10 \text{ km}$. Ad un certo istante, per modificare la propria velocità v_0 ed allontanarsi dall'asteroide, emette molto rapidamente un getto di gas in direzione contraria al suo moto e con una velocità, relativa al veicolo in moto subito prima dell'espulsione del gas, $u=50 \text{ m/s}$. Determinare:

a) l'aumento di velocità del veicolo se la massa espulsa vale $m = 10\text{kg}$

b) supponendo che la velocità iniziale fosse la metà di quella acquisita dopo l'espulsione del gas, si determini se il veicolo spaziale poteva evitare di espellere il gas per sfuggire effettivamente all'attrazione dell'asteroide

Sol.

a) Supponendo che l'emissione di gas sia istantanea, possiamo imporre la conservazione della quantità di moto. Si ha:

$$Mv_0 = m(v_0 - u) + (M - m)v_f \Rightarrow v_f = \frac{Mv_0 - m(v_0 - u)}{(M - m)} = \frac{(M - m)v_0 + mu}{(M - m)}$$

dove abbiamo indicato con v_f la velocità del veicolo dopo aver espulso la massa di gas. La velocità del gas dopo esser stato espulso è proprio $(v_0 - u)$. Risolvendo si ha:

$$v_f - v_0 = \left(\frac{m}{M - m} \right) u \cong 1 \text{ m/s}$$

b) supponendo che $v_f = 2v_0$ si ha:

$$v_f = 2 \left(\frac{m}{M-m} \right) u \cong 2m / s$$

Per sapere se questa velocità è sufficiente a far allontanare il veicolo dall'asteroide applichiamo la conservazione dell'energia dall'istante in cui il veicolo acquista la nuova velocità fino a quando raggiunge una distanza tale da non risentire più dell'attrazione dell'asteroide. Si ha:

$$\frac{1}{2}(M-m)v_f^2 - \frac{G(M-m)m_1}{R+d} = \frac{1}{2}(M-m)v_\infty^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v_f^2 \geq \frac{Gm_1}{R+d}$$

$$\Rightarrow v_f \geq \sqrt{\frac{2Gm_1}{R+d}} \cong \sqrt{\frac{2 * 6.67 * 10^{-11} * 10^{15}}{110 * 10^3}} \cong 1.1ms$$

Per cui adesso la velocità è sufficiente per far uscire il veicolo dalla zona di attrazione dell'asteroide, ma prima no, per cui doveva per forza espellere il gas