

CAPITOLO 9 – MAGNETISMO

Richiami di magnetismo nel vuoto (segue dalla dispensa).

Se una densità di corrente $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ è in un campo di induzione $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, allora la forza sulla distribuzione è

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

La legge base dell'induzione magnetica si può scrivere in forma generale per una densità di corrente $\mathbf{J}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}'$$

Analogamente a quanto fatto per il campo elettrico, possiamo scrivere

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}',$$

da cui segue che (prima legge della magnetostatica)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Dalla stessa equazione integrale, si ricava

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

Usando la proprietà $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \left(\nabla \cdot \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) - \int \nabla^2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right]$$

Il primo termine della relazione si scrive

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) &= -\nabla' \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \Rightarrow \nabla \left(\nabla \cdot \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) \\ &= -\nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} -\nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3\mathbf{x}' &= -\nabla \left[\int \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right] \\ &= -\nabla \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \mathbf{ndS} + \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \end{aligned}$$

Per correnti stazionarie, $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0$, per cui tutto il primo termine è identicamente nullo.

Il secondo termine della relazione diventa

$$-\int \nabla^2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = -\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

Ma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Rightarrow -\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = 4\pi \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \\ &= 4\pi\mathbf{J}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

In definitiva, la seconda equazione di Maxwell per correnti stazionarie

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Di conseguenza, la legge di Ampère risulta essere

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 i$$

Si osservi che tale ultima legge può dedursi anche da quella di Biot – Savart per un filo indefinito. Si ricordi, infatti che il modulo del campo indotto dal filo vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i \Rightarrow \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \frac{\mu_0}{2\pi R} i dL$$

Poiché $dL = R d\theta$, allora

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \int \frac{\mu_0}{2\pi} i d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} i \int d\theta$$

Su un percorso chiuso, le alternative sono 2.

- Se il percorso non concatena anche il filo stesso, tale integrale risulta nullo, in quanto gli estremi di integrazione coincidono.
- Se il percorso concatena anche il filo stesso, tale integrale viene calcolato con gli estremi che variano tra 0 e 2π , per cui la circuitazione vale proprio $\mu_0 i$.

Effetto Hall nella teoria di Drude

Supponiamo che un elettrone abbia impulso $\mathbf{p}(t)$. La sua velocità sarà $\mathbf{p}(t)/m$, mentre la densità di corrente che ne deriva vale

$$\mathbf{J} = -\frac{ne\mathbf{p}(t)}{m}$$

Supponiamo che in un tempo dt sia avvenuta una collisione tra due elettroni. Quindi, dato l'impulso $\mathbf{p}(t)$ all'istante t , calcoliamo l'impulso al tempo $t + dt$. Per far ciò, supponiamo che la probabilità di collisione sia pari a dt/τ , allora la probabilità che al tempo $t + dt$ non

vi sia stata collisione è pari a $1 - dt/\tau$. In caso di collisione, invece, la velocità dell'elettrone è determinata dalle forze $f(t)$ che esso subisce, e, quindi, dall'impulso $f(t)dt$ che esso acquista.

Il contributo di impulso degli elettroni che non collidono tra t e $t + dt$ vale

$$d\mathbf{p}_1 = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \mathbf{p}(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \left[\mathbf{p}(t) + \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} dt \right] = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) [\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)dt]$$

Eseguendo i prodotti e trascurando i termini di ordine superiore al secondo, si ottiene

$$d\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)dt - \frac{\mathbf{p}(t)dt}{\tau}$$

Il contributo degli elettroni che hanno subito una collisione è

$$d\mathbf{p}_2 = \frac{dt}{\tau} \mathbf{f}(t)dt$$

Tale contributo, essendo del secondo ordine, risulta trascurabile rispetto al precedente, per cui l'incremento di impulso può essere scritto nel seguente modo:

$$\mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t) = \mathbf{f}(t)dt - \frac{\mathbf{p}(t)dt}{\tau} \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t) - \frac{\mathbf{p}(t)}{\tau}$$

Come esempio di applicazione di questo risultato, consideriamo un cavo che trasporta corrente in un campo di induzione magnetica \mathbf{B} . Per l'applicazione di tale campo, gli elettroni subiscono una forza data dal risultante della forza elettrica F_E e quella magnetica F_B .

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}(t)}{m} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\mathbf{p}(t)}{\tau}$$

Ipotizziamo che $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ e $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, per cui scomponiamo l'equazione differenziale appena scritta lungo i tre assi x , y e z (vedi figura 1).

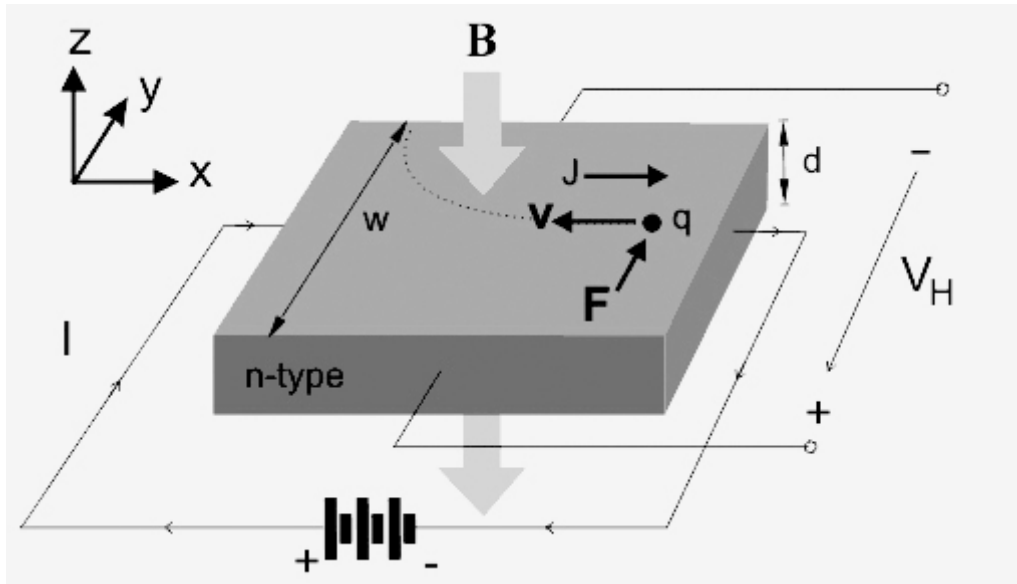


Figura 1 – Il circuito con gli assi coordinati di riferimento.

$$\begin{aligned}\frac{dp_x(t)}{dt} &= -e \left(E_x + \frac{p_y(t)B_z}{m} \right) - \frac{p_x(t)}{\tau} \\ \frac{dp_y(t)}{dt} &= -e \left(E_y - \frac{p_x(t)B_z}{m} \right) - \frac{p_y(t)}{\tau} \\ \frac{dp_z(t)}{dt} &= -\frac{p_z(t)}{\tau}\end{aligned}$$

Ricordando le espressioni della densità di corrente e della conducibilità elettrica

$$J = -\frac{nep(t)}{m} \quad e \quad \sigma = \frac{ne^2\tau}{m},$$

moltiplicando per gli opportuni fattori, si ottengono le espressioni

$$\begin{aligned}-\frac{ne\tau}{m} \frac{dp_x(t)}{dt} &= -\sigma E_x + \frac{e\tau B_z J_y(t)}{m} + J_x(t) \\ -\frac{ne\tau}{m} \frac{dp_y(t)}{dt} &= -\sigma E_y - \frac{e\tau B_z J_x(t)}{m} + J_y(t) \\ \frac{dp_z(t)}{dt} &= -\frac{p_z(t)}{\tau}\end{aligned}$$

Definendo la frequenza di ciclotrone come

$$\omega_c = \frac{eB_z}{m}$$

e nell'ipotesi di corrente continua, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -\sigma E_x + \omega_c \tau J_y + J_x = 0 \\ -\sigma E_y - \omega_c \tau J_x + J_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_x + \omega_c \tau J_y = \sigma E_x \\ -\omega_c \tau J_x + J_y = \sigma E_y \end{cases}$$

Il sistema appena scritto permette di osservare una componente di campo elettrico in direzione trasversa al filo anche in assenza di corrente trasversa. Tale fenomeno prende il nome di effetto Hall.

Conducibilità vs frequenza.

[...]

Potenziale vettore.

Abbiamo visto che

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

In analogia a quanto fatto in elettrostatica per il potenziale elettrostatico, possiamo definire un potenziale vettore \mathbf{A} tale che $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}$. Il vettore potenziale sarà del tipo

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' + \nabla\psi$$

Si osservi che, qualunque sia la funzione scalare ψ , è sempre $\nabla \times \nabla\psi = \mathbf{0}$. L'introduzione di tale funzione scalare, d'altronde, è utile per l'aggiunta di un grado di libertà per la scelta del potenziale vettore senza cambiare il campo $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Quindi la quarta equazione di Maxwell si scrive

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

La scelta di ψ è tale che (gauge di Coulomb)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\psi) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0$$

Forza agente su una spira percorsa da corrente in un campo.

Sia data una spira quadrata nel piano Oxy sottoposta ad un campo di induzione magnetica

$\mathbf{B} = (B, 0, 0)$ come nella figura 2.

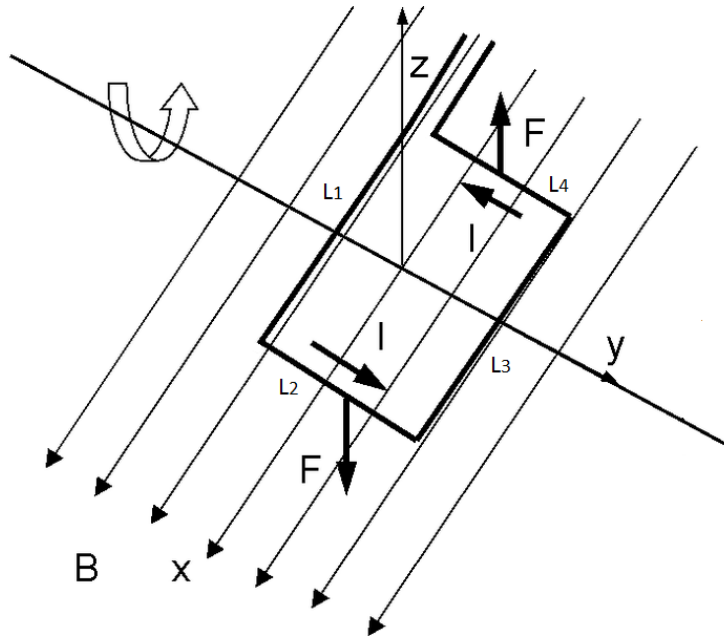


Figura 2 – Spira percorsa da corrente in un campo.

Le forze che si inducono per il passaggio di corrente sono le seguenti:

$$\mathbf{F}_1 = Id\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \mathbf{F}_3 = Id\mathbf{L}_3 \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_2 = Id\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{F}_4 = Id\mathbf{L}_4 \times \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$$

Poiché le forze \mathbf{F}_2 ed \mathbf{F}_4 sono forze uguali e contrarie applicate alla distanza dL , esse generano un momento meccanico in direzione y e di modulo pari a

$$M = dL^2IB$$

Tale momento meccanico, quindi, è proporzionale all'area della spira percorsa da corrente.

Inoltre è possibile definire anche un momento di dipolo magnetico \mathbf{m} in modo che

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Per come definito, il momento di dipolo magnetico è diretto lungo z e ha modulo $m = dL^2I$.

Quindi la spira si comporta come un ago magnetico.

Campo magnetico di una distribuzione localizzata di corrente.

Studiamo le proprietà di una distribuzione di corrente in una regione di spazio piccola rispetto al raggio di osservazione, per cui $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$, e sviluppiamo in serie:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \dots$$

Sostituendo nell'espressione della componente i -esima del potenziale vettore,

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int J_i(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} \right) d^3\mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}|} \int J_i(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \int J_i(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3\mathbf{x}' \right]$$

Per semplificare la relazione integrale, date due funzioni $f(\mathbf{x}')$ e $g(\mathbf{x}')$ continue e derivabili, e se $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ è localizzata (cioè si annulla all'infinito), benché non necessariamente a divergenza nulla, vale la relazione:

$$\int [f(\mathbf{x}')\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' g(\mathbf{x}') + g(\mathbf{x}')\mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' f(\mathbf{x}') + g(\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')]d^3\mathbf{x}' = 0$$

che si può verificare eseguendo le integrazioni per parti ed eliminando gli integrali di superficie di $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$.

In quest'ultima relazione, ponendo $f(\mathbf{x}') = 1$ e $g(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'$, si ha:

$$\int [\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \mathbf{x}'\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')]d^3\mathbf{x}' = 0$$

Dunque se è vera l'equazione di continuità $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') = 0$, allora è anche

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = 0$$

Ponendo, invece, $f(\mathbf{x}') = x'_i$, e $g(\mathbf{x}') = x'_j$, tenendo presente la medesima equazione di continuità, si ha:

$$\int [x'_i J_j(\mathbf{x}') + x'_j J_i(\mathbf{x}')]d^3\mathbf{x}' = 0$$

Da questa relazione si ricava che

$$\int x'_i J_j(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = - \int x'_j J_i(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'$$

Detto ciò, lo sviluppo in serie di partenza può essere scritto come

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{x} \cdot \int J_i(\mathbf{x}')\mathbf{x}'d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sum_k x_k \int x'_k J_i(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{\sum_k x_k \int 2x'_k J_i(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi|\mathbf{x}|^3} \sum_k x_k \int [x'_k J_i(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' - x'_i J_k(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'] = -\frac{\mu_0}{8\pi|\mathbf{x}|^3} \left[\mathbf{x} \times \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}'))d^3\mathbf{x}' \right]_i \end{aligned}$$

Definendo la densità di momento magnetico (o magnetizzazione) e il suo integrale (momento magnetico) rispettivamente come

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \mathbf{m} = \int \mathbf{M}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' = \frac{1}{2} \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}'))d^3\mathbf{x}' ,$$

allora, per sostituzione, si ricava

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

Se la corrente fluisce in un circuito chiuso, allora

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{L} \iint \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{L} = I \iint d\mathbf{S} = I\mathbf{S}$$

Tale risultato coincide con quello trovato per la spira.

Se la distribuzione di corrente è data da molte cariche q_i con masse M_i in moto a velocità \mathbf{v}_i , allora la densità di corrente e il momento magnetico sono dati da

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \Rightarrow \mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$$

Ricordando l'espressione del momento orbitale dell' i -esima particella, si ricava:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i = M_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \frac{\mathbf{L}_i}{M_i}$$

Se tutte le particelle hanno lo stesso rapporto q_i/M_i , allora

$$\mathbf{m} = \frac{e\mathbf{L}}{2M}$$

Per ottenere il momento angolare intrinseco (spin) bisogna moltiplicare per un fattore, detto rapporto giromagnetico, circa pari a 2.

Si può mostrare che all'ordine più basso la forza che agisce su una distribuzione localizzata di corrente è

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

Infatti, esprimendo la forza, si trova

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{x}$$

Sviluppando il vettore \mathbf{B} in serie di Taylor, si ottiene

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{0}) + \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{0}) + \dots \Rightarrow \mathbf{F} = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B}(\mathbf{0}) d^3\mathbf{x} + \int \mathbf{J} \times \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{0}) d^3\mathbf{x}$$

Tenendo presente gli sviluppi dei prodotti tra vettori ed utilizzando la notazione opportuna,

$$F_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left[\int J_j B_k(\mathbf{0}) d^3\mathbf{x} + \int J_j x_i \nabla B_k(\mathbf{0}) d^3\mathbf{x} \right] = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{m} \times \nabla)_j B_k(\mathbf{0})$$

Quindi

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{0}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{0})) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{0})) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{0}))$$

Poiché si può definire l'energia potenziale come primitiva della forza generalizzata e cambiata di segno, allora

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{0})) \Rightarrow U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{0}) = -mB(\mathbf{0}) \cos \theta$$

Inoltre, la torsione totale (momento della forza) di una corrente localizzata è

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{x} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{x} = \int [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})\mathbf{J} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{J})\mathbf{B}] d^3\mathbf{x} = \int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})\mathbf{J} d^3\mathbf{x}$$

Infatti il secondo termine dell'integrale è nullo, in quanto, come sviluppato in precedenza, ciò si ottiene ponendo $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e utilizzando, come di consuetudine, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Utilizzando il medesimo sviluppo in serie per il campo \mathbf{B} , si ottiene

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\mathbf{0})$$

Essendo il modulo di \mathbf{N} pari a $N = mB(\mathbf{0}) \sin \theta$, allora per i moduli si ha

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Poiché l'energia potenziale è minima quando $\theta = 0$, allora un dipolo di momento \mathbf{m} immerso in un campo \mathbf{B} tende ad orientarsi in direzione parallela a quella del campo per minimizzare l'energia U .

Campo microscopico dovuto alla presenza di atomi vicini.

Ipotizziamo una distribuzione di atomi vicini di momento magnetico intrinseco \mathbf{m} . È noto che, su un volume macroscopico, il campo medio soddisfa l'equazione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Quindi è lecito servirsi del concetto di potenziale vettore \mathbf{A} anche in questo caso.

Consideriamo una corrente macroscopica e la magnetizzazione media (o densità di momento magnetico)

$$\mathbf{M} = \sum_i N_i \langle \mathbf{m}_i \rangle$$

In un volume ΔV , in analogia a quanto fatto per il potenziale elettrico, al punto \mathbf{x}' sarà

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \Delta V$$

Integrando, si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] d^3\mathbf{x}'$$

Si osservi che il secondo termine può scriversi come

$$\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Integrando tale termine per parti, si ha

$$\int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dS' - \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$$

Poiché l'integrale di frontiera è nullo, si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d^3\mathbf{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

Tale potenziale corrisponde a quello generato da una corrente $\mathbf{J}_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x})$

Quindi è come se nel circuito circolasse una corrente efficace dovuta alla magnetizzazione media $\mathbf{J}_M(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{x})$.

L'equazione macroscopica corrispondente a quella microscopica è

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{eff}} = \mu_0 [\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}]$$

Manipolando i due membri, si ottiene

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Abbiamo definito la quantità $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ come campo magnetico ed ha lo stesso ruolo del campo di induzione elettrica per i dielettrici.

Campo generato da una spira circolare percorsa da corrente.

Sia data una spira di forma circolare come nella figura 3.

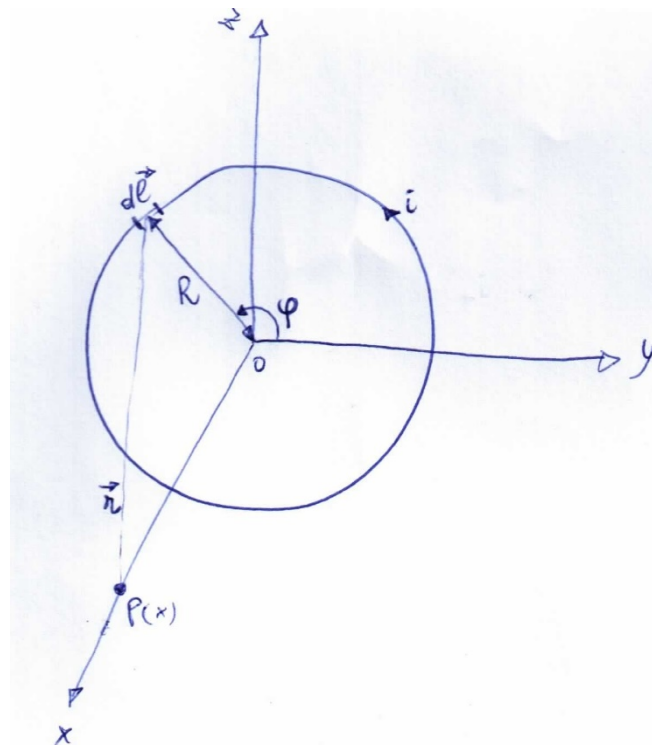


Figura 3 – Spira circolare percorsa da corrente.

Ricordando l'espressione del campo induzione magnetica

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Calcoliamo il campo induzione magnetica B. Si può scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, R \cos \varphi, R \sin \varphi) \\ \mathbf{L} &= (0, R \cos \varphi, R \sin \varphi) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, R \cos \varphi, R \sin \varphi) \\ d\mathbf{L} &= (0, -R \sin \varphi d\varphi, R \cos \varphi d\varphi) \end{aligned}$$

Sviluppando il prodotto vettoriale, si ottiene

$$d\mathbf{L} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -R \sin \varphi d\varphi & R \cos \varphi d\varphi \\ x & R \cos \varphi & R \sin \varphi \end{vmatrix} = -R^2 d\varphi \mathbf{i} + R x \cos \varphi d\varphi \mathbf{j} + R x \sin \varphi d\varphi \mathbf{k}$$

Sostituendo nell'integrale, si ottiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{(-R^2 \mathbf{i} + R x \cos \varphi \mathbf{j} + R x \sin \varphi \mathbf{k})}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I R^2 \mathbf{i}}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu_0 I R^2 \mathbf{i}}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Come si può notare, la simmetria del problema garantisce che il campo abbia solo componente lungo l'asse x.

Proprietà magnetiche della materia.

Supponiamo di avere un solenoide composto da n spire per unità di lunghezza, in cui è inserito del materiale. In tal caso, il valore del campo B si può ottenere dalla relazione precedente ponendo $x = 0$:

$$B = \mu n I = \mu_0 \mu_r n I$$

μ_r rappresenta la permeabilità magnetica relativa del mezzo. Possiamo pensare che la differenza rispetto al valore del campo nel vuoto sia dovuto ad una corrente che circola nel solenoide. Quindi, detto B_0 il campo che si avrebbe nel vuoto, allora

$$B_0 - B = \mu_0 n I - \mu_0 \mu_r n I = (1 - \mu_r) \mu_0 n I = \mu_0 n' I'$$

Per cui, la presenza del mezzo nel solenoide equivale ad un solenoide nel vuoto di n' spire per unità di lunghezza in cui circola una corrente I' che si aggiunge a quella reale. Detto ciò si definisce suscettività magnetica

$$\chi = \mu_r - 1$$

Tale parametro tiene conto della differente polarizzabilità magnetica del mezzo. A seconda della suscettività magnetica, si distinguono tre categorie di sostanze:

$$\begin{aligned} \chi < 0 &\Rightarrow \mu_r < 1 \Rightarrow \text{sostanze diamagnetiche} \\ \chi > 0 &\Rightarrow \mu_r > 1 \Rightarrow \text{sostanze paramagnetiche} \\ \chi = \chi(\mu_r) &\Rightarrow \text{suscettibilità non costante} \Rightarrow \text{sostanze ferromagnetiche} \end{aligned}$$

Precessione di Larmor.

In assenza di campo, nel modello di atomo di Bohr (quello idrogenoide) la forza centrifuga contrasta l'attrazione elettrostatica, secondo la relazione

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = m\omega_0^2 r_0$$

In tale relazione, r_0 è il raggio atomico, m è la massa dell'elettrone, mentre ω_0 è la pulsazione naturale dell'atomo, che vale

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{e^2}{4m\pi\epsilon_0 r_0^3}} = \pm \frac{e}{2r_0 \sqrt{m\pi\epsilon_0 r_0}}$$

Il doppio segno algebrico indica che l'orbita può essere anche retrograda.

Se, oltre a ciò, si aggiunge un campo di induzione magnetica B , l'equazione di equilibrio si scrive

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} + evB = m \frac{v}{r_0} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} + e\omega r_0 B = m\omega^2 r_0$$

Tale equazione diventa, allora,

$$\omega_0^2 + \frac{eB}{m} \omega = \omega^2 \Rightarrow \omega^2 - 2\omega_L \omega - \omega_0^2 = 0, \quad \omega_L = \frac{eB}{2m} = \text{pulsazione di Larmor}$$

Risolvendo rispetto ad ω , si ha

$$\omega = \omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2} = \omega_L \pm \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2}}$$

Se $\omega_L \ll \omega_0$, allora, trascurando il rapporto del radicando, si ha che $\omega \approx \omega_L \pm \omega_0$.

Per avere un'idea della validità dell'approssimazione, calcoliamo ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{e}{2r_0 \sqrt{m\pi\epsilon_0 r_0}} \approx \frac{1.602 \times 10^{-19}}{2 \times 0.53 \times 10^{-10} \sqrt{0.9 \times 10^{-30} \times \pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.53 \times 10^{-10}}} \\ \approx 4.15 \times 10^{16} \text{ giri/s}$$

Quindi l'approssimazione del modello è valida per $\omega_L \ll 4.15 \times 10^{16}$ giri/s, ovvero quando

$$\frac{eB}{2m} \ll 4.15 \times 10^{16} \frac{\text{giri}}{\text{s}} \Rightarrow B \ll 4.66 \times 10^5 \text{ Wb/m}^2$$

D'altronde, un elettrone che ruota intorno al proprio nucleo genera una corrente e un conseguente momento magnetico pari a

$$I = \frac{e\omega_0}{2\pi} \approx 1.06 \times 10^{-3} \text{ A} \Rightarrow m = \mu_0 I S = 1.165 \times 10^{-29} \frac{\text{Wb}}{\text{m}}$$

Polarizzazione delle molecole in un campo magnetico.

Prendiamo il solito atomo di idrogeno col piano dell'orbita ortogonale al campo \mathbf{B}^* . Dal punto di vista delle proprietà magnetiche, la presenza della precessione di Larmor si può schematizzare con una corrente in senso opposto a quella dell'elettrone:

$$i_L = \frac{e\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B^*}{4\pi m}$$

A tale corrente, corrisponde un momento magnetico opposto al campo \mathbf{B}^* :

$$m_L = \mu_0 i_L S = \mu_0 \frac{Se^2 B^*}{4\pi m} = \mu_0 \frac{r_0^2 e^2 B^*}{4m}$$

Quindi è possibile definire la polarizzabilità dovuta alla precessione di Larmor come

$$\alpha = \frac{m_L}{B^*} \quad (= \frac{\mu_0 r_0^2 e^2}{4m} \text{ per l'atomo di idrogeno})$$

Ad essa, si sovrappone la polarizzabilità per orientamento di molecole aventi un proprio momento magnetico intrinseco m_o , in cui si può fare la stessa trattazione di quella elettrica e favorisce una disposizione parallela al campo:

$$\alpha_o = \frac{m_o}{B^*}$$

Abbiamo visto che, in un materiale con una polarizzazione media $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$, in ogni punto esiste una densità di corrente $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$. Ciò comporta che sulla superficie del materiale ci sia una corrente. Consideriamo, ad esempio, un cilindro di materiale magnetico uniformemente magnetizzato in direzione del proprio asse:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (M_x, 0, 0) \text{ all'interno del materiale} \\ \mathbf{M} &= (0, 0, 0) \text{ all'esterno del materiale} \end{aligned}$$

Quindi si ha che

$$\begin{aligned} J_{Mx} &= \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} & J_{Mx} &= 0 \\ J_{My} &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} & J_{My} &= \frac{\partial M_x}{\partial z} \\ J_{Mz} &= \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} & J_{Mz} &= -\frac{\partial M_x}{\partial y} \end{aligned} \Rightarrow$$

Nei punti interni al cilindro, poiché M_x è costante, la corrente è nulla. Non vale la stessa cosa sulla superficie, in cui è presente la discontinuità, che genera una densità di corrente che scorre lungo la superficie laterale del cilindro, lungo piani ortogonali all'asse x.

Diamagnetismo.

Tutte le sostanze subiscono la precessione di Larmor che dà luogo ad un momento magnetico molecolare medio m_L e, dunque, ad un'intensità media di magnetizzazione $M = m_L n$ con verso opposto a quello del campo. Come si è visto, però, questa intensità è molto piccola (si ricordi l'espressione di m_L), e, dunque, è completamente mascherata dalla polarizzazione per orientamento di quelle molecole che abbiano un momento magnetico proprio che invece si orientano in direzione del campo. Per le sostanze che abbiano momento intrinseco nullo,

$$\mathbf{M} = -n\alpha_L \mathbf{B}^*$$

B^* rappresenta il campo di induzione sulla molecola in esame generato da tutte le molecole che la circondano, per cui, come accade per il campo elettrico interno, anche qui

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M}$$

Inoltre, detta $\langle \rho \rangle$ la distanza media perpendicolare dell'elettrone dall'asse del campo, si ha

$$m_L = \mu_0 \frac{Ze^2 B^*}{4m} \langle \rho \rangle^2$$

In particolare, se l'orbita dell'elettrone è nel piano Oxy, allora $\langle \rho \rangle^2 = \langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2$, mentre $\langle r \rangle^2 = \langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2 + \langle z \rangle^2$. Per una distribuzione di cariche sfericamente simmetrica, allora

$$\langle x \rangle^2 = \langle y \rangle^2 = \langle z \rangle^2 \Rightarrow \langle r \rangle^2 = 3\langle x \rangle^2 = 3\frac{\langle \rho \rangle^2}{2} = \frac{3}{2}\langle \rho \rangle^2 \Rightarrow m_L = \mu_0 \frac{Ze^2 B^*}{6m} \langle r \rangle^2$$

Quindi il calcolo della suscettività magnetica si riconduce al calcolo di $\langle r \rangle^2$ per la distribuzione degli elettroni.

A tale scopo, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \\ \mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{H}^* - \frac{1}{3}\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{H}^* + \frac{2}{3}\mathbf{M} \right)$$

Inoltre

$$\mathbf{B}^* = \mu_0 \mathbf{H}^* = \mathbf{B} - \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{M} = -n\alpha_L \mathbf{B}^* = -n\alpha_L \left(\mathbf{B} - \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M} \right)$$

Infine si ricava, per le sostanze diamagnetiche:

$$\mathbf{M} = -n\alpha_L \left(\mathbf{B} - \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M} \right) \Rightarrow \mathbf{M} = -\frac{n\alpha_L \mathbf{B}}{1 - \frac{2}{3}\mu_0 n\alpha_L} = \chi \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \Rightarrow \chi = -\frac{n\alpha_L}{1 - \frac{2}{3}n\alpha_L}$$

Inoltre

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \Rightarrow \mu_r = 1 + \chi$$

Paramagnetismo.

Le sostanze paramagnetiche sono quelle che si polarizzano in direzione del campo. Anche in questo caso è valida l'espressione di Langevin

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}_0 L(a), \quad \text{con } a = \frac{m_0 H^*}{kT}$$

Il campo \mathbf{H}^* , nel caso di molecole aventi momento magnetico proprio, non si può esprimere come $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \frac{1}{3}\mathbf{M}$, ma può essere generalizzato come $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + N\mathbf{M}$, con N costante di Weiss dipendente dalla sostanza. Le sostanze paramagnetiche propriamente dette sono quelle per cui $NM \ll H$ (viceversa per quelle ferromagnetiche), per cui $\mathbf{H}^* \approx \mathbf{H}$. Dunque

$$M = nm_0 L(a) \approx nm_0 \frac{m_0 H}{3kT} = \frac{nm_0^2 H}{3kT} = \chi H \Rightarrow \chi = \frac{nm_0^2}{3kT}$$

Ferromagnetismo.

Le molecole di queste sostanze presentano un proprio momento magnetico. Inoltre il termine NH , come detto, è tale che $NM \gg H$, quindi non più trascurabile. Si può intuire che

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + N\mathbf{M} \Rightarrow M = \frac{H^* - H}{N} \approx \frac{\frac{akT}{m_0} - H}{N} = \frac{akT}{Nm_0} - \frac{H}{N}$$

Tale relazione rappresenta una retta nel piano (M, a) , non passante per l'origine degli assi, come visibile nella figura 4.

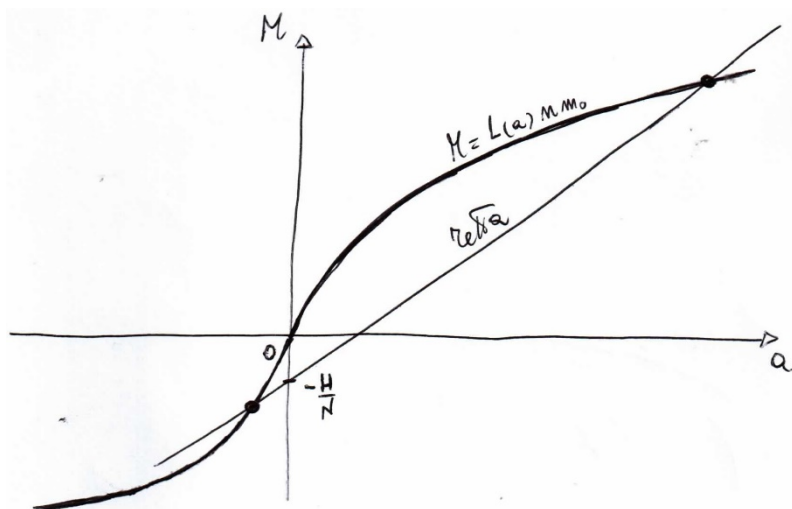


Figura 4 – Curve nel piano (M, a) con relative intersezioni.

Per ogni H , esiste una retta nel piano (M, a) che interseca la curva di Langevin in almeno un punto, identificando il corrispondente di M . Dunque è possibile costruire la curva $M = f(H)$. Si noti, inoltre, che, quando $H = 0$, $M_R = \frac{akT}{Nm_0} \neq 0$, per cui vi è una magnetizzazione residua.

Nei casi in cui la retta risulta tangente alla curva di Langevin, l'intensità di magnetizzazione subisce una discontinuità e passa da positiva a negativa. Il valore del campo per cui avviene ciò si chiama forza coercitiva, e si indica con $-H_C$, mentre per i punti intermedi alle due tangenti la funzione $M = f(H)$ non è univoca. Tale circostanza prende nome di isteresi del materiale ferromagnetico ed è ben visibile nella figura 5.

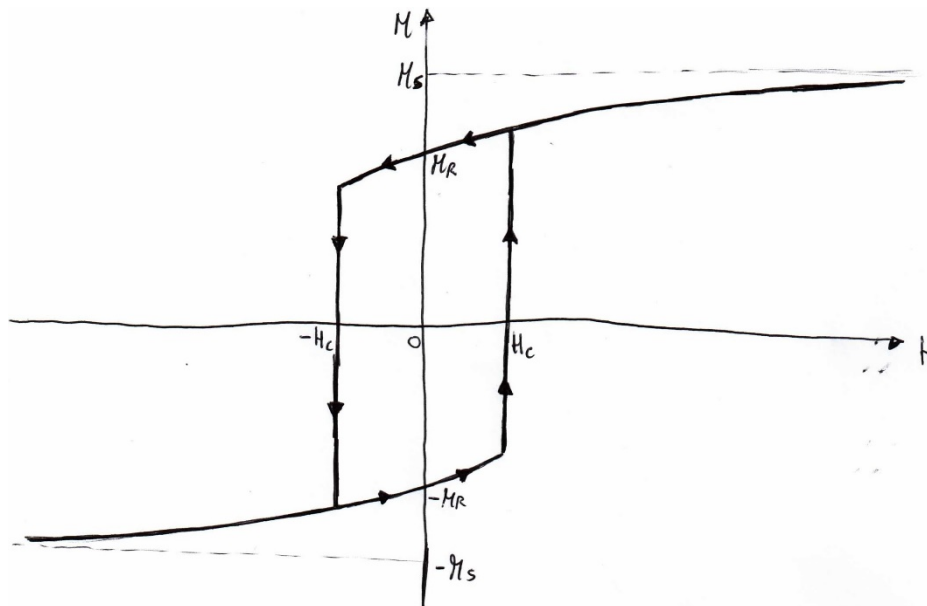


Figura 5 – Curva $M = f(H)$ con relativa isteresi.

Si possono notare anche altre caratteristiche di tale curva. In primis, il valore M_R della magnetizzazione residua, in secundis il valore asintotico M_S di intensità di magnetizzazione di saturazione.

Il coefficiente angolare della retta in figura 4, inoltre, è funzione della temperatura. Di fatto, esiste una temperatura per la quale vi è condizione di tangenza tra le due curve della figura 4 nell'origine, per cui risulta

$$\frac{akT}{Nm_0} = \frac{nm_0a}{3} \Rightarrow T_C = \frac{Nm_0^2}{3k}$$

T_C è nota come temperatura di Curie. Quando la temperatura è inferiore a quella di Curie, la intersezioni tra funzione di Langevin e retta sono sempre 2, per cui si verifica l'isteresi del

materiale. Avvicinandosi alla temperatura di Curie, il ciclo di isteresi si stringe poiché diminuisce la forza coercitiva. Al di sopra del punto di Curie, il materiale perde le caratteristiche ferromagnetiche, in quanto la magnetizzazione è sempre funzione univoca dell'induzione magnetica. Di fatto il materiale si comporta da paramagnetico, mentre la magnetizzazione per $H \approx 0$ vale (osserva che si può scrivere $M = M_s L(a) = n m_o L(a)$)

$$M \approx \frac{M_s a}{3} = \frac{M_s m_o H^*}{3kT} = \frac{M_s m_o}{3kT} (H + NM) \Rightarrow M = \frac{\frac{M_s m_o}{3kT}}{1 - \frac{M_s m_o N}{3kT}} H = \frac{\frac{M_s m_o}{3k}}{T - \frac{M_s m_o N}{3k}} H$$

$$= \frac{T_C/N}{T - T_C} H \Rightarrow \chi = \frac{T_C/N}{T - T_C}$$

Cenni di teoria quantistica del paramagnetismo.

Il momento magnetico di un atomo nello spazio libero è dato da

$$\mathbf{m} = \gamma \hbar \mathbf{J} = -g \mu_B \mathbf{J},$$

dove $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ è il momento angolare totale, γ è il rapporto giromagnetico (rapporto tra momento magnetico totale del singolo atomo e momento angolare totale), g è il fattore di Landé e $\mu_B = e\hbar/2mc$ rappresenta il magnetone di Bohr.

Quando si considera l'interazione con un campo magnetico, l'energia è

$$\varepsilon_B = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = \mu_B (\mathbf{L} + g_0 \mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}$$

I valori della componente secondo la direzione di \mathbf{B} che i momenti possono assumere sono quantizzati e sono interi. Se, per esempio, $L = 1$, allora

$$L_z = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

In generale, si hanno $2L + 1$ valori per L_z e $2S + 1$ valori per S_z . Ponendo per 2 il fattore di Landé e considerando l'applicazione del campo proprio lungo z , allora

$$\varepsilon_B = \mu_B (L_z + 2S_z) B$$

Lo spin dell'elettrone vale $S = 1/2$, per cui un solo elettrone in una shell contribuisce con due possibili stati di $S_z = \pm 1/2$. Gli atomi che presentano tutte le shell complete hanno $S_z = S_{z1} + S_{z2} = 0$ e $J_z = 0$, per cui non vi è contributo del momento angolare, ma conta solo la parte spaziale (comportamento dei materiali diamagnetici). Se si ha un elettrone su una shell con momento angolare nullo (come accade per gli atomi alcalini, che sono assimilabili ad atomi idrogenoidi, avendo un solo elettrone sulla shell S con momento

angolare orbitale 0), allora $L_z = 0$ e $\epsilon_B = 2\mu_B S_z B$. Quindi le possibili energie sono $\epsilon_B = \pm\mu_B B$.

In un tale sistema a due livelli, detti N_1 il numero di atomi con spin parallelo ed N_2 il numero di atomi con spin antiparallelo, all'equilibrio termico si ha

$$\frac{N_1}{N} = \frac{\exp\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu_B B}{kT}\right)} \quad e \quad \frac{N_2}{N} = \frac{\exp\left(-\frac{\mu_B B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu_B B}{kT}\right)}$$

La magnetizzazione media è data dalla differenza tra N_1 ed N_2 moltiplicata per la magnetizzazione del singolo atomo:

$$M = \mu(N_1 - N_2) = N\mu \frac{\exp\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\mu_B B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu_B B}{kT}\right)} = N\mu \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)$$

$$\frac{\mu_B B}{kT} \ll 1 \Rightarrow \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) \approx \frac{\mu_B B}{kT} \Rightarrow M \approx N\mu \frac{\mu_B B}{kT}$$

In un atomo con numero quantico totale \mathbf{J} non nullo, si hanno $2J + 1$ livelli energetici equispaziati e si dimostra che la magnetizzazione di una sostanza paramagnetica è data da

$$M = NgJ\mu_B B_J\left(\frac{gJ\mu_B B}{kT}\right)$$

B_J è la funzione di Brillouin, che vale

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\frac{(2J+1)x}{2J} - \frac{1}{2J} \coth\frac{x}{2J}$$

Sviluppando in serie la cotangente iperbolica ed arrendendosi ai primi due termini, nell'ipotesi di $y \ll 1$, si ottiene

$$\coth y = \frac{1}{y} + \frac{y}{3} \Rightarrow B_J(x) \approx \frac{xJ+1}{3J} \Rightarrow M \approx \frac{Ng^2\mu_B^2 J(J+1)B}{3kT} = \frac{C}{T}$$

La costante C è nota come costante di Curie.

Correnti indotte: legge di Faraday – Neumann.

Se ad un circuito elettrico si avvicina un magnete, nel circuito si innesca un passaggio di corrente la cui intensità è non nulla solo finché il magnete è in moto rispetto al circuito. Tale è detta corrente indotta dal magnete.

Si deve a Neumann l'aver dedotto una legge generale che si esprime nel seguente modo.

Per indurre una corrente in un circuito, è necessario far variare il flusso del vettore \mathbf{B} concatenato col circuito. L'intensità di corrente è data da:

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \Rightarrow f = \text{forza elettromotrice} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Il segno meno indica che la forza elettromotrice indotta è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera. Quindi la corrente che circola nel circuito genera un campo magnetico che si sottrae a quello inducente.

La presenza di una corrente indotta indica la presenza di un campo elettrico indotto \mathbf{E}_i non conservativo che mette in moto le cariche anche in assenza di una differenza di potenziale ai capi del circuito tale che in un tratto $P_1 - P_2$ sia:

$$f = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{L}$$

Se $P_1 = P_2$, allora

$$f = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Definendo il campo elettrico come somma del campo statico \mathbf{E}_s e di quello indotto \mathbf{E}_i , allora

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}, \text{ poiché } \oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{L} = 0$$

Vediamo, ora, come ottenere la legge di Faraday – Neumann.

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{n} dS$$

Quindi dal confronto si ottiene

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = -\int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{n} dS \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

Inoltre

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) = \mathbf{0}$$

Dobbiamo distinguere il caso del “flusso tagliato” dal circuito da quello “concatenato” con esso.

FLUSSO TAGLIATO.

Quando il circuito o una sua parte si muove in un campo magnetico (o viceversa), la forza elettromotrice è quella dovuta alla forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B} = e\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B}$$

Quindi, integrando, si ha

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\int d\mathbf{x} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} \times d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

In questo caso, il flusso del campo magnetico è quello attraverso l'arco $d\mathbf{L} \times d\mathbf{x}$ tagliato dal circuito nel tempo dt , come si vede nella figura 6.

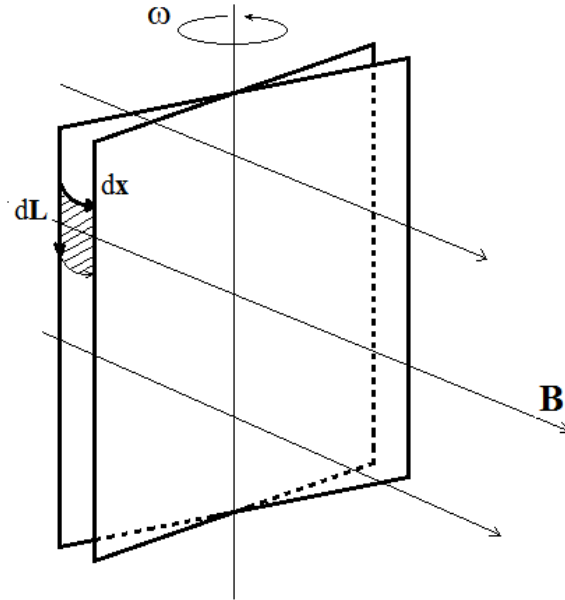


Figura 6 – Flusso tagliato da una spira in movimento.

FLUSSO CONCATENATO.

Esso è caratteristico dei circuiti fissi ed indeformabili percorsi da correnti variabili nel tempo.

Un circuito percorso da corrente variabile nel tempo produce un campo \mathbf{B} variabile nel tempo che induce una forza elettromotrice indotta nel circuito stesso.

Supponiamo di essere in un mezzo di permeabilità magnetica costante μ (e il vuoto lo è) e che la corrente sia costante lungo il circuito, ovvero che $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Allora il flusso sarà proporzionale alla corrente i tramite L :

$$\Phi(\mathbf{B}) = Li$$

L rappresenta il coefficiente di autoinduzione ed ha dimensioni

$$[L] = \left[\frac{Vs}{A} \right] = [\Omega s] = [H]$$

Quindi

$$f = V(P_2) - V(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt} = \Delta V$$

Se chiudiamo il circuito con una resistenza R , la corrente indotta varierà come

$$= -L \frac{dI}{dt} = RI \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Energia del campo magnetico.

La variazione di energia di una particella di velocità \mathbf{v} sotto una forza è

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$

Con il campo elettrico indotto \mathbf{E}_i , su ciascun elettrone di conduzione la variazione di energia per unità di tempo sarà

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_i$$

Sommando sugli elettroni, troviamo che le sorgenti compiono del lavoro per mantenere le correnti:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -If = I \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \delta\mathcal{L} = I\delta\Phi$$

Stabiliamo quanto vale il lavoro compiuto per ottenere una corrente stazionaria. Ipotizziamo che $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ in ogni punto. Questa ipotesi permette di schematizzare la distribuzione delle correnti come una griglia di circuiti, ciascuno dei quali racchiude una superficie dS e con sezione trasversale del filo pari a $\Delta\sigma$ (vedi figura 7).

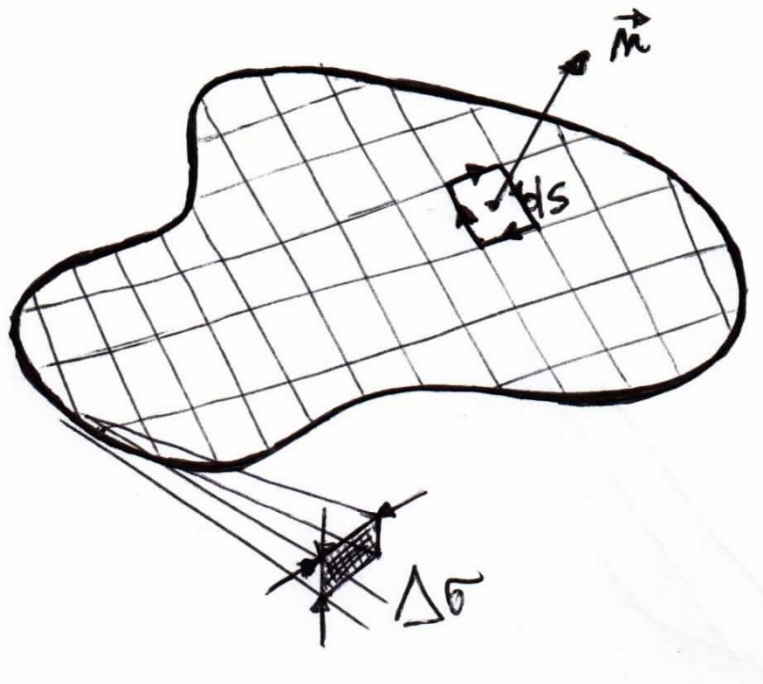


Figura 7 – Schematizzazione a griglia di circuiti.

L'incremento di lavoro compiuto contro la forza elettromotrice indotta, in termini del cambio nell'induzione nel circuito, vale

$$\Delta\delta\mathcal{L} = J\Delta\sigma \int \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}dS = J\Delta\sigma \int \nabla \times \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS = J\Delta\sigma \oint \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} \Rightarrow \delta\mathcal{L} = \int \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}d^3\mathbf{x}$$

Considerato che $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$, allora

$$\delta\mathcal{L} = \int \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}d^3\mathbf{x} = \int \delta\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})d^3\mathbf{x} = \int [\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \delta\mathbf{A}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})]d^3\mathbf{x}$$

Se la distribuzione è localizzata, il termine in gradiente risulta nullo, per cui

$$\delta\mathcal{L} = \int \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A})d^3\mathbf{x} = \int \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}d^3\mathbf{x}$$

Tale ultima relazione è valida per qualunque sostanza.

Nel caso in cui ci sia relazione lineare tra i campi \mathbf{B} e \mathbf{H} (come accade per i materiali diamagnetici e paramagnetici), allora $\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{H}$ e si può scrivere

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int \delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})d^3\mathbf{x} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}d^3\mathbf{x}$$

Esplicitando l'ultima uguaglianza, si ha

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' d^3\mathbf{x} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3\mathbf{x} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

Se abbiamo un insieme di N circuiti indipendenti, l'integrale può essere spezzato nella somma degli integrali su ciascun circuito:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N \int d^3\mathbf{x}_i \sum_{j=1}^N \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}'_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|} d^3\mathbf{x}'_j$$

$i = j \Rightarrow$ autoinduzione
 $i \neq j \Rightarrow$ mutua induzione

Nel caso di autoinduzione, si ottiene l'energia dovuta all'autoinduzione del circuito i – esimo e vale

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int d^3\mathbf{x}_i \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}'_i)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i|} d^3\mathbf{x}'_i = LI^2$$

Da tale relazione è possibile ricavare proprio l'induttanza L.

Nel caso di mutua induzione, invece, si hanno i termini di induzione del circuito i – esimo sul circuito j – esimo, che possono essere scritti come

$$\frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N \int d^3\mathbf{x}_i \sum_{j=1}^N \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}'_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|} d^3\mathbf{x}'_j = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N M_{i,j} I_i I_j$$

I coefficienti di induzione mutua si scrivono, dal confronto,

$$M_{i,j} = \frac{\mu_0}{4\pi I_i I_j} \int d^3\mathbf{x}_i \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}'_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|} d^3\mathbf{x}'_j \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{d\mathbf{S}_i \cdot d\mathbf{S}'_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|}$$

Inoltre, tenendo presente l'espressione del potenziale vettore,

$$M_{i,j} = \frac{1}{I_i I_j} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i) d^3\mathbf{x}_i$$

Il potenziale vettore \mathbf{A}_{ij} è quello causato dal j - esimo circuito su quello i - esimo.

Trascurando le dimensioni trasversali del circuito i , allora $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) d^3\mathbf{x}_i = \mathbf{J}(\mathbf{x}_i) d\mathbf{L} dS = I_i d\mathbf{L}$, ottenendo, quindi

$$M_{i,j} = \frac{1}{I_i I_j} \oint I_i d\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{I_j} \int \nabla \times \mathbf{A}_{ij} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{I_j} \int \mathbf{B}_{ij} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\Phi_{ij}(\mathbf{B})}{I_j}$$

Se ho due solenoidi concentrici, il primo con N_1 spire e il secondo con N_2 spire, il campo all'interno del primo solenoide è

$$\mathbf{B} = \mu_0 N_1 I_1$$

Il solenoide 2 concatena il flusso $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ con N_2 spire, per cui la forza elettromotrice nel solenoide 2 sarà

$$f = -N_2 S \frac{dB}{dt} = -N_2 S \mu_0 N_1 \frac{dI_1}{dt}$$

RIASSUMENDO

Un circuito percorso da corrente variabile I genera un campo magnetico \mathbf{B} . il flusso di \mathbf{B} attraverso la superficie sottesa dal circuito è

$$\Phi(\mathbf{B}) = LI ,$$

con L coefficiente di autoinduzione.

$$[L] = [B] m^{-2} A^{-1} = N A^{-1} m^{-1} m^{-2} A^{-1} = N A^{-2} m^{-3} = H \text{ (Henry)}$$

Un circuito j in presenza di un altro circuito i percorso da corrente I_i variabile nel tempo è percorso da corrente

$$I_j = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \frac{M_{ij}}{R} \frac{dI_i}{dt} ,$$

con M_{ij} coefficiente di induzione mutua.

Nel caso di un solenoide con N spire per unità di lunghezza in cui transita una corrente I , il campo magnetico è espresso come

$$B = \mu NI$$

Quindi la variazione temporale del flusso di B attraverso una sira vale

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = \mu NS \frac{dI}{dt}$$

Poiché $\Phi(\mathbf{B}) = LI$, allora, per la singola spira,

$$\mu NS \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt} \Rightarrow L = \mu NS$$

Per N spire, l'induttanza complessiva vale

$$L = \mu N^2 S$$

Si è visto, inoltre, che

$$M_{12} = \mu N_1 N_2 S$$

Per due solenoidi con flusso comune, sul solenoide 2 viene indotta una tensione

$$V_2 = M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

La corrente in 2, a sua volta, indurrà una corrente in 1. Il circuito, come schematizzato nella figura 8, può essere descritto attraverso il sistema di equazioni differenziali accoppiate.

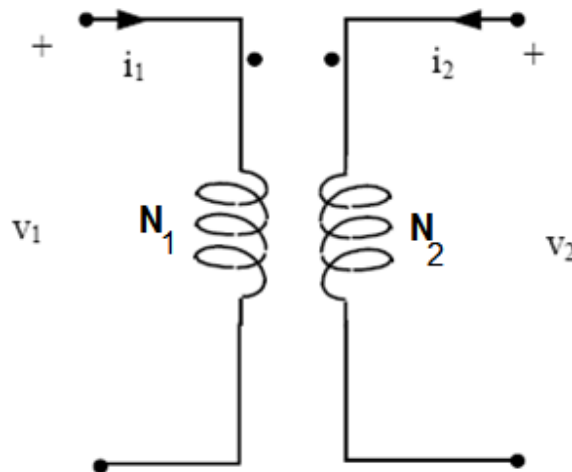


Figura 8 – Schema di due circuiti accoppiati.

$$\begin{cases} R_1 i_1 = v_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{21} \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Ipotizzando che il circuito 2 sia un circuito aperto (quindi in esso non circola corrente), ponendo le sostituzioni per passare al dominio della frequenza, si ottiene

$$\begin{cases} R_1 I_1 = V_1 - j\omega L_1 I_1 \\ V_2 = -j\omega M_{21} I_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{-j\omega M_{21}}{R_1 + j\omega L_1} \Rightarrow \left| \frac{V_2}{V_1} \right| = \frac{\omega M_{21}}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}} = \frac{\omega M_{21}}{\omega \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

ove $\omega_0 = \frac{R}{L}$

Per frequenze elevate ($\omega \gg \omega_0$), allora

$$\left| \frac{V_2}{V_1} \right| \approx \frac{M_{21}}{L_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{\mu N_1^2 S} = \frac{N_2}{N_1}$$

La corrente di spostamento.

Nelle equazioni di Maxwell fino ad ora trovate c'è una inconsistenza. In particolare, la legge di Ampère è stata ricavata per correnti stazionarie. In generale, invece,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Quindi nelle equazione che descrive la legge di Ampère possiamo sostituire a $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Il termine aggiunto si chiama corrente di spostamento. Dunque, l'insieme delle equazioni di Maxwell è il seguente.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Dalla quarta equazione

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \left(\nabla \dot{\Phi} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

Quindi l'equazione che si ottiene è

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Ponendo il Gauge di Coulomb, allora $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, per cui l'equazione, in assenza di potenziali, diventa un'equazione di diffusione

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

La soluzione è del tipo

$$\mathbf{A} = A_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

Poiché il campo \mathbf{B} varia nel tempo, allora

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Supponiamo che ci sia solo $H_x(z, t)$. Allora l'unica componente non nulla dell'equazione è

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y$$

L'andamento di $H_x(z, t)$ è analogo a quello del potenziale vettore:

$$H_x(z, t) = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)} \Rightarrow J_y = \sigma E_y = -\frac{1+i}{\delta} H_x(z, t) = \frac{i-1}{\delta} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)}$$

Il flusso J_y genera una corrente superficiale

$$I_y = \int J_y dz$$

Quest'ultima, come visto, decade come $1/\delta$ allontanandosi dall'asse z .

Ritornando all'equazione generale dei campi, abbiamo scritto

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Potendo esprimere il potenziale vettore a meno di un potenziale scalare, è possibile assumere il cosiddetto gauge di Lorenz, secondo cui in tale equazione si debba annullare il termine in parentesi:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Inoltre, scriviamo, come anticipato, che

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla u \Rightarrow \mathbf{E}' = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial u}{\partial t}$$

Ma, poiché il campo elettrico non deve cambiare, allora

$$= -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \left(\Phi' - \Phi + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial u}{\partial t}$$

Con tale scelta del gauge, allora, l'equazione è

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

La scelta del gauge di Lorenz, infine, si tramuta in:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla u) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 u + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Dovendo soddisfare il gauge di Lorenz, allora

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Quindi il campo scalare u deve soddisfare l'equazione delle onde in assenza di sorgenti.

Vediamo, ora, le equazioni generali per le altre grandezze.

Dalla prima equazione di Maxwell si ricava

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\nabla \cdot \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \Phi - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Con il gauge di Lorenz, si ha

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla^2 \Phi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Vediamo, ora le equazioni differenziali per i campi elettrico e magnetico.

Dalla terza equazione di Maxwell, si ricava

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

Quindi, sfruttando la quarta equazione di Maxwell, si ha

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Inoltre

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\nabla \rho + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right)$$

Analogamente per il campo \mathbf{B} :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}$$

Nel caso di isolante isotropo ed omogeneo, sia flusso di corrente, sia gradiente di densità di cariche sono nulli, per cui le equazioni si riconducono entrambe alla ben nota equazione delle onde.

Nel caso delle onde piane, ad esempio, i campi sono $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ e $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ tali che la direzione di propagazione sia lungo l'asse x:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \mathbf{0}$$

La terza equazione di Maxwell fornisce

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

La quarta equazione, invece, fornisce

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

Analogamente, dalla prima e dalla quarta equazione di Maxwell, sfruttando la proprietà che la divergenza del rotore di \mathbf{B} è nulla, è possibile ricavare l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

In generale, le equazioni che governano le teorie sull'elettromagnetismo sono del tipo

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t),$$

dove φ è una generica grandezza. Tale equazione differenziale può essere risolta attraverso le cosiddette funzioni di Green. Se φ ed f ammettono la trasformata di Fourier, allora

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Tali trasformate di Fourier soddisfano l'equazione disomogenea di Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{x}, \omega)$$

La funzione di Green associata a questa equazione è quella funzione $G_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ che soddisfa l'equazione

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x}, \omega)$$

In assenza di superfici di contatto, allora la funzione G_k è a simmetria sferica, per cui ha dipendenza dalla sola variabile $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. utilizzando il Laplaciano in coordinate sferiche, si ottiene

$$\nabla_R^2 G = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial G}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (GR)$$

Quindi, sostituendo nella equazione differenziale, per tutti i punti in cui $R \neq 0$, si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} (GR) + k^2 GR = -4\pi\delta(\mathbf{R}) = 0 \Rightarrow GR = Ae^{ikR} + Be^{-ikR} \Rightarrow G = AG^+(R) + BG^-(R)$$

Se consideriamo anche la parte dipendente dal tempo, allora $G^\pm(R)e^{i\omega t}$ soddisfa l'equazione

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^\pm(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$$

Con gli opportuni cambi di variabili ($\tau = t - t'$, $\omega = ck$), allora

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pm ikR} e^{-i\omega\tau}}{R} d\omega = \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) = \frac{\delta\left[t' - \left(t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

La funzione $G^+(R, \tau)$ è chiamata funzione di Green ritardata, in quanto l'effetto osservato nel punto \mathbf{x} all'istante t è causata dall'azione di una sorgente distante R e, quindi, ritardato al tempo pari a

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

Ciò è giustificato dal fatto che il rapporto R/c rappresenta proprio il tempo di propagazione del disturbo. Analogamente la funzione $G^-(R, \tau)$ è la funzione anticipata di Green.

Quindi, sostituendo,

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \iint G^\pm(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t') d^3\mathbf{x}' dt'$$

Prendendo in considerazione solo la parte G^+ e ponendo $\varphi_0(\mathbf{x}, t) = 0$, allora

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[f(\mathbf{x}', t')]_{t'=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \int \frac{[f(\mathbf{x}', t')]_{\text{Ret}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

In definitiva, i campi elettrico e magnetico rispondono alle stesse equazioni delle onde, per cui, considerando solo la parte ritardata, si ha:

$$E = E_0 f(x - ct) + E_0 f(x + ct) = E_0 f(x + ct) = E_z$$

$$B = B_0 f(x - ct) + B_0 f(x + ct) = B_0 f(x + ct) = B_z$$

Dalla soluzione in onde piane, si ha

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Inoltre, per come sono stati ipotizzati i campi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial x} &= B_0 \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= E_0 c \frac{\partial f}{\partial \xi} \end{aligned} \Rightarrow B_0 \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{c^2} E_0 c \frac{\partial f}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{E_0}{B_0} = c$$

Radiazione di dipolo.

Consideriamo un sistema di cariche in moto, come nella figura 9.

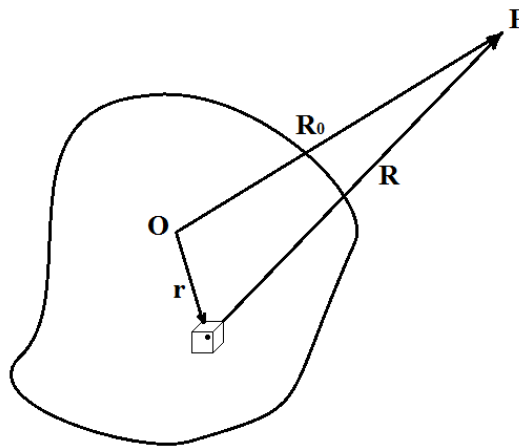


Figura 9 – Il riferimento per le grandezze del sistema di cariche.

In tale figura si può osservare che $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r} \approx \mathbf{R}_0$. Sotto tali ipotesi, l'equazione di Helmholtz suggerisce l'espressione del potenziale vettore

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{\text{Ret}}(t)}{|\mathbf{R}|} dV \approx \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \int \mathbf{J}_{\text{Ret}}(t) dV$$

In tale espressione $\mathbf{J}_{\text{Ret}}(t)$ rappresenta la densità di corrente ritardata, ovvero

$$\mathbf{J}_{\text{Ret}}(t) = \mathbf{J}\left(t - \frac{R}{c}\right) = \mathbf{J}\left(t - \frac{R_0}{c} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)$$

Considerando le dimensioni del sistema, ponendoci nell'ipotesi che

$$t \gg \frac{r}{c} \Rightarrow ct \gg r \Rightarrow \lambda \gg r,$$

ovvero che le dimensioni del sistema devono essere piccole rispetto alla lunghezza d'onda irradiata, allora le variazioni di distribuzione di cariche saranno trascurabili. Tale condizione può essere scritta anche come

$$t \approx \frac{r}{v} \Rightarrow \lambda = ct \approx \frac{rc}{v} \gg r \Rightarrow v \ll c$$

Quindi tale trattazione risulta valida per sistemi non relativistici. Considerando il sistema composto da N cariche discrete, allora

$$\mathbf{J}_i = \rho \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \sum_{i=1}^N q \mathbf{v}_i = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N q \mathbf{r}_i = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \dot{\mathbf{d}}$$

Quindi si ha:

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} = -\frac{\mu_0}{4\pi R_0} \ddot{\mathbf{d}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c R_0} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$$

Si vede che la radiazione di dipolo è dipendente dalla derivata seconda del momento di dipolo elettrico, per cui essa è visibile solo qualora le cariche siano accelerate.

Teorema di Poynting.

Per una singola carica, il lavoro compiuto dal campo elettromagnetico vale

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot dt = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

Per una distribuzione di cariche (e quindi di correnti), si ha

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{x}$$

Dalla quarta equazione di Maxwell si ricava

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{1}{\mu} \int \left[\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] d^3\mathbf{x}$$

Dalle proprietà dei prodotti misti si ha:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] d^3\mathbf{x}$$

Dalla terza equazione di Maxwell, si esplicita il rotore di \mathbf{E} :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int \left[-\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] d^3\mathbf{x} =$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = - \int \left[\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] d^3\mathbf{x}$$

L'ipotesi fatta è quella di campi lineari, per cui si ottiene

$$- \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \int \left[\frac{\partial}{\partial t} (W_E + W_B) + \nabla \cdot \mathbf{S} \right] d^3\mathbf{x} = \int \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right] d^3\mathbf{x}$$

In tale relazione, la aliquote W rappresentano i lavori di campo elettrico e campo magnetico, entrambi considerati statici. Il vettore $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ è il vettore di Poynting. Il bilancio locale delle potenze in gioco, allora, è il seguente:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

Tale bilancio è molto simile ad un'equazione di continuità.

Nella realtà, non esistono mezzi in cui non vi siano dispersioni, per cui l'espressione di W cambia. Per fare ciò, scriviamo l'equazione di conservazione dell'impulso.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Detto \mathbf{p}_{mec} l'impulso medio meccanico, allora

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{mec}}}{\partial t} = \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{x}$$

Dalla prima e dalla quarta equazione di Maxwell si ricavano rispettivamente la densità di carica e la densità di corrente, che, sostituite nella relazione precedente, danno

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{mec}}}{\partial t} = \int \left(\epsilon_0 \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) d^3\mathbf{x}$$

Osservando che

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} &= \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = -\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} \\ &= \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_{\text{mec}}}{\partial t} &= \int \left(\epsilon_0 \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \epsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} \right) d^3\mathbf{x} \\ &= \int \epsilon_0 (\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})) d^3\mathbf{x} - \int \epsilon_0 \frac{\partial (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\partial t} d^3\mathbf{x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{p}_{\text{mec}} + \int \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{x} \right) &= \int \epsilon_0 (\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})) d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

Il primo membro può essere scritto come somma di impulso meccanico ed elettromagnetico:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{p}_{\text{mec}} + \int \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3\mathbf{x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{p}_{\text{mec}} + \frac{1}{c^2} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} d^3\mathbf{x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p}_{\text{mec}} + \mathbf{p}_{\text{em}})$$

Quindi l'equazione di conservazione diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p}_{\text{mec}} + \mathbf{p}_{\text{em}}) = \int \varepsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] d^3\mathbf{x}$$

All'espressione del secondo membro si può aggiungere il termine nullo rappresentato dalla seconda equazione di Maxwell $c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{0}$, ottenendo due termini analoghi per \mathbf{B} ed \mathbf{E}

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{tot}}}{\partial t} = \int \varepsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] d^3\mathbf{x}$$

Del secondo membro, scriviamo i termini che includono il campo \mathbf{E} per componenti (i passaggi sono identici per il campo \mathbf{B}). In particolare, la componente i -esima si scrive

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = \sum_j E_i \partial_j E^j - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} E_i \partial_j E_k = \sum_{j,k} \partial_j \left(E_i E^j - \frac{1}{2} E_k E^k \delta_{ij} \right)$$

Quindi è possibile definire il tensore degli sforzi come

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left[E_i E^j + c^2 B_i B^j - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \delta_{ij} \right] \Rightarrow \left[\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{tot}}}{\partial t} \right]_i = \sum_j \int \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} d^3\mathbf{x}$$

Applicando il teorema della divergenza, si ha

$$\left[\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{tot}}}{\partial t} \right]_i = \sum_j \iint T_{ij} n^j dS$$

Teorema di Poynting nei mezzi dispersivi.

Il teorema di Poynting è stato ricavato per mezzi isotropi, lineari e non dispersivi. In particolare, ε e μ sono stati assunti indipendenti dalla frequenza del campo. I mezzi reali, in effetti, non seguono tali ipotesi, per cui è necessario un modello più dettagliato. Per far ciò consideriamo le trasformate inverse di Fourier (ad esempio nel caso del campo elettrico):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Assumendo l'ipotesi di linearità ed isotropia, risulta

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) ,$$

dove $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ rappresentano le suscettività complesse. Si consideri che i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} devono avere componenti reali. A tale scopo, indichiamo con il simbolo $*$ l'operazione di coniugazione, per cui, nel caso del campo elettrico

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \\ \varepsilon(\omega) &= \frac{1}{2}(\varepsilon e^{-i\omega t} + \varepsilon^* e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^*)\end{aligned}$$

Le relazioni sono analoghe per il campo magnetico.

Quindi si può calcolare

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4}(\varepsilon + \varepsilon^*)(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \right] = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon^* \mathbf{E}^* + \varepsilon \mathbf{E}^* + \varepsilon^* \mathbf{E}) = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon^* \mathbf{E}^*)$$

I termini misti di coniugazione sono nulli, in quanto si ottengono moltiplicando due quantità con pulsazione uguale ed opposta e, dunque, risultano indipendenti dal tempo t .

Perciò si ha

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E} + \varepsilon^* \mathbf{E}^*) = \frac{1}{4} (-2i\omega \varepsilon \mathbf{E} + 2i\omega \varepsilon^* \mathbf{E}^*) = i\omega \frac{\varepsilon^* \mathbf{E}^* - \varepsilon \mathbf{E}}{2}$$

Per il campo magnetico si ha, con gli stessi passaggi

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{B}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^*(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*) \\ \mu(\omega) &= \frac{1}{2}(\mu e^{-i\omega t} + \mu^* e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2}(\mu + \mu^*)\end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \frac{\mu^* \mathbf{H}^* - \mu \mathbf{H}}{2}$$

Dal bilancio di potenze, si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Tale espressione tiene presente solo che la relazione tra i campi sia lineare e che il mezzo sia isotropo, indipendentemente dalle dispersioni dello stesso. Ipotizzando, dunque, un campo monocromatico delle proprietà del mezzo, è possibile mediare tale equazione in un periodo. Il risultato di tale operazione è proprio l'energia necessaria a compensare le dissipazioni, al fine di mantenere il campo elettromagnetico di modulo costante ed uniforme.

Il calore disperso, ovvero la variazione di energia, sarà quindi

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] dt \\ &= \frac{i\omega}{4T} \int_0^T [(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot (\varepsilon^* \mathbf{E}^* - \varepsilon \mathbf{E}) + (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) \cdot (\mu^* \mathbf{H}^* - \mu \mathbf{H})] dt\end{aligned}$$

Osservando la quantità in parentesi, ad esempio per il campo elettrico, tenendo presente che il prodotto scalare riguarda solo i vettori con dipendenza spaziale, scriviamo:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot (\varepsilon^* \mathbf{E}^* - \varepsilon \mathbf{E}) &= \mathbf{E} \cdot (\varepsilon^* \mathbf{E}^*) - \mathbf{E} \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) + \mathbf{E}^* \cdot (\varepsilon^* \mathbf{E}^*) - \mathbf{E}^* \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) \\ &= (\varepsilon^* - \varepsilon) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} - \varepsilon (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \varepsilon^* (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}^*) \end{aligned}$$

Tale ultima espressione va integrata nel tempo e per un periodo pari a quello dei campi, ovvero al periodo corrispondente alla pulsazione ω . Detto ciò, avendo una pulsazione tripla rispetto a quella di partenza, i termini $\varepsilon (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$ e $\varepsilon^* (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}^*)$ sono nulli in un periodo. Quindi

$$Q = \frac{i\omega}{4T} \int_0^T [(\varepsilon^* - \varepsilon) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} + (\mu^* - \mu) \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}] dt = \frac{i\omega}{4} [(\varepsilon^* - \varepsilon) \bar{\mathbf{E}}^* \cdot \bar{\mathbf{E}} + (\mu^* - \mu) \bar{\mathbf{H}}^* \cdot \bar{\mathbf{H}}]$$

Infine, se $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ e $\mu = \mu' + i\mu''$, si ha:

$$Q = \frac{\omega}{2} [\varepsilon''(\omega) |\mathbf{E}|^2 + \mu''(\omega) |\mathbf{H}|^2]$$

Consideriamo, ora, un campo che abbia una frequenza attorno ad un valore medio ω_0

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t}$$

Ipotizziamo che $E_0(t)$ vari molto lentamente nel tempo, ad esempio con legge del tipo

$$\mathbf{E}_0(t) = E_{0\alpha} e^{-i\alpha t} \quad \text{con } \alpha \ll \omega_0 \Rightarrow \mathbf{E} = E_{0\alpha} e^{-i(\alpha + \omega_0)t}$$

Allora possiamo scrivere la potenza del campo elettrico come

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^*)$$

Eseguendo i prodotti ed osservando che $\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}$ e $\mathbf{E}^* \dot{\mathbf{D}}^*$ vanno via in media, si ottiene

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

Per come scritto e per ipotesi fatte sul campo \mathbf{E} , possiamo sviluppare in serie:

$$\mathbf{E} = E_{0\alpha} e^{-i(\alpha + \omega_0)t} \approx \left(E_{0\alpha} + \alpha \frac{\partial E_0}{\partial t} \right) e^{-i\omega_0 t}$$

Con questo sviluppo, si scrive

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \mathbf{E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_0 + \frac{\partial(\omega \varepsilon)}{\partial \omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{-i\omega t}$$

Sostituendo e trascurando la parte immaginaria di $\varepsilon(\omega)$, si ricava

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{4} \left(\mathbf{E}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} + \mathbf{E}_0^* \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right) \frac{\partial(\omega \varepsilon)}{\partial \omega} = \frac{1}{4} \frac{\partial(\omega \varepsilon)}{\partial \omega} \frac{\partial(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*)}{\partial t}$$

Valendo le stesse considerazioni per il campo magnetico, scriviamo

$$\bar{U} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^* \right]$$

In termini di campi reali, diventa

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} |\bar{\mathbf{H}}|^2 \right]$$

Equazioni differenziali dell'elettromagnetismo.

Manipoliamo le equazioni di Maxwell per ottenere le equazioni differenziali generiche per le onde elettromagnetiche.

Dalla quarta equazione si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \mu \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

Tenendo presente la seconda equazione di Maxwell e considerando la terza, si ha

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\varepsilon c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Questa è l'equazione differenziale per il campo induzione magnetica \mathbf{B} . Per ottenere l'equivalente per il campo elettrico \mathbf{E} , consideriamo la terza equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

Tenendo presente la prima equazione di Maxwell e considerando la quarta, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Si noti che per i mezzi conduttivi e quelli isolanti la differenza risiede nel caratterizzare queste equazioni differenziali. In particolare, per i mezzi conduttivi $\sigma \neq 0$ e $\nabla \rho = \mathbf{0}$, mentre per i mezzi isolanti vale l'esatto contrario.

Consideriamo un mezzo per cui si abbia

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \end{aligned}$$

Ponendo nell'equazione differenziale relativa al campo elettrico, si ottiene la condizione

$$E_0 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu\omega\sigma \right) = -i \frac{k\rho_0}{\varepsilon}$$

Nel caso di mezzi conduttivi, l'equazione si semplifica in

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu\omega\sigma = 0$$

In generale, ipotizziamo che k abbia componente reale ed immaginaria e possa essere scritto come

$$k = \alpha + i\beta$$

Sostituendo nella relazione che permette il calcolo di k , si arriva al sistema

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \mu\varepsilon\omega^2 \\ 2\alpha\beta = \mu\sigma\omega \end{cases} \Rightarrow \alpha, \beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \pm 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

La parte immaginaria β è responsabile di un'attenuazione dell'onda. Di fatto, il suo inverso rappresenta proprio la skin depth.

Se orientiamo gli assi in modo che il campo \mathbf{E} sia polarizzato lungo l'asse x e la direzione di propagazione dei sia lungo z , allora, con $k = \alpha + i\beta$, scriviamo

$$E_x(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{\mathbf{x}} = E_0 e^{-\beta z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \vec{\mathbf{x}}$$

Quindi, dalla terza equazione di Maxwell, eseguendo il prodotto vettoriale, si ha

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow kiE_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{\mathbf{y}} = i\omega B_y(z, t) \vec{\mathbf{y}} \Rightarrow B_y(z, t) = \frac{kE_0}{\omega} e^{i(kz - \omega t)} \vec{\mathbf{y}}$$

Ponendo k in forma esponenziale ed eseguendo le operazioni, si giunge a

$$k = |k|e^{i\Phi} \Rightarrow B_y(z, t) = \frac{|k|}{\omega} E_x(z, t) e^{i\Phi}$$

$$|k| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad e \quad \tan \Phi = \frac{\beta}{\alpha}$$

Si vede, quindi, che campo elettrico e campo magnetico non sono in fase, mentre le ampiezze sono legate da

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{|k|}{\omega} = \left[\varepsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Nel caso in cui $\omega \ll \sigma/\varepsilon$, si può trascurare l'unità rispetto al resto in parentesi, per cui

$$\frac{B_0}{E_0} \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}} \Rightarrow \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\rho\omega\mu}$$

Indice di rifrazione e impedenza caratteristica del mezzo.

Consideriamo un'onda piana, per cui i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono solo funzione della variabile x . Le equazioni di Maxwell in questi termini, in assenza di sorgenti e flussi, si scrivono:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

Esaminiamo il caso di un'onda polarizzata linearmente, cioè che vibri in una sola direzione. Assumiamo che la direzione in questione sia quella z , per cui $E_x = E_y = 0$. Da tale assunzione le equazioni di Maxwell da considerare sono

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Quindi il campo \mathbf{B} dipende solo da z e da t ed ha componente non nulla solo lungo y . In particolare, entrambi i campi soddisfano l'equazione delle onde. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

Analogamente per il campo elettrico

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} &\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned}$$

In tali espressioni il prodotto $\mu\epsilon$ può esprimersi anche come

$$\mu\epsilon = v^{-2} = \frac{\mu_r \epsilon_r}{c^2} \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

Sia, ora,

$$E_z = E_z^0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

In tale espressione, si ricordi che $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega$ e $\omega = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$. Allora l'onda diventa

$$E_z = E_z^0 e^{ik(x-vt)}$$

Riutilizzando le equazioni di Maxwell dei rotori, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} &= ikE_z^0 e^{ik(x-vt)} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &= -ikv\mu\epsilon E_z^0 e^{ik(x-vt)} = -i\omega\mu\epsilon E_z^0 e^{ik(x-vt)} \end{aligned}$$

Ipotizzando la forma del campo induzione magnetica, si ha:

$$B_y = B_y^0 e^{ik(x-vt)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_y}{\partial t} = -ikvB_y^0 e^{ik(x-vt)} = ikE_z^0 e^{ik(x-vt)} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = ikB_y^0 e^{ik(x-vt)} = -i\omega\mu\epsilon E_z^0 e^{ik(x-vt)} \end{cases}$$

Dal confronto, si ottengono le relazioni seguenti.

$$\begin{cases} -vB_y^0 = E_z^0 \\ B_y^0 = -v\mu\epsilon E_z^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = v \\ \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{v\mu\epsilon} \end{cases}$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene proprio la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Inoltre si ha

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

In tale espressione, n rappresenta l'indice di rifrazione.

Ancora più interessante, invece, risulta il rapporto tra il modulo di \mathbf{E} e quello di \mathbf{H} :

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \frac{\mu|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Tale rapporto prende il nome di impedenza caratteristica Z del mezzo, e si esprime come

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

Z_0 è l'impedenza caratteristica del vuoto e vale circa 377Ω .

Riflessione e rifrazione all'interfaccia tra due mezzi materiali

Consideriamo una superficie appoggiata nel piano Oxy, come si vede nella figura 10.

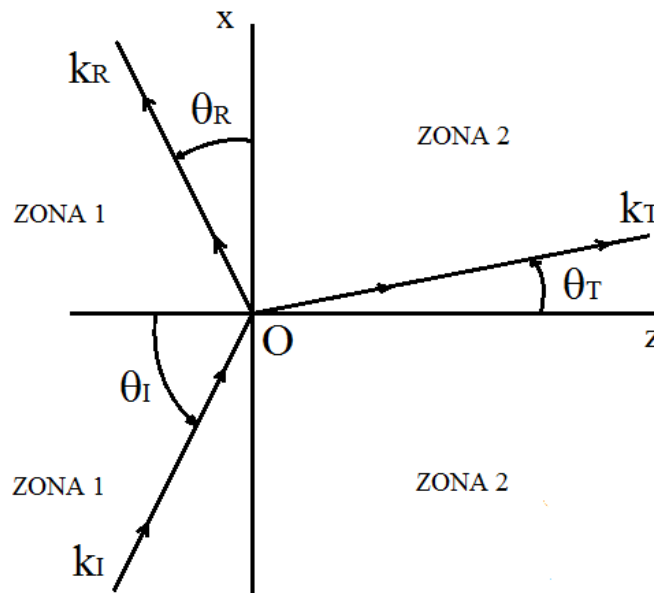


Figura 10 – Angoli ed assi di riferimento per i raggi.

Il piano in figura 10 è suddiviso in due regioni, corrispondenti alle due zone in cui è rispettivamente posato il mezzo 1 e il mezzo 2.

Consideriamo i campi \mathbf{B} ed \mathbf{E} della seguente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_I(\mathbf{r}, t) = E_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_R(\mathbf{r}, t) = E_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = E_{0T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} \hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

In tali espressioni dei campi, vengono assunti $\hat{\mathbf{k}}_I$, $\hat{\mathbf{k}}_R$ e $\hat{\mathbf{k}}_T$ come versori dei rispettivi vettori d'onda (incidente, riflessa e trasmessa). Inoltre, si ricordi che

$$k_I = k_R = \frac{\omega}{v_1} \quad \text{e} \quad k_T = \frac{\omega}{v_2} \Rightarrow k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 \Rightarrow k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T$$

Detto ciò, l'equazione di conservazione dei campi è la seguente:

$$E_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + E_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = E_{0T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Le dipendenze dalle coordinate e dal tempo sono confinate agli esponenziali, e per questo devono essere uguali

$$e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \Rightarrow \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}$$

Scomponendo lungo gli assi di riferimento, tenendo presente che all'interfaccia $z = 0$, si ha

$$\begin{aligned} k_I^x x + k_I^y y &= k_R^x x + k_R^y y = k_T^x x + k_T^y y \\ \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow k_I^y y = k_R^y y = k_T^y y \Rightarrow k_I^y = k_R^y = k_T^y \\ y = 0 & \Rightarrow k_I^x x = k_R^x x = k_T^x x \Rightarrow k_I^x = k_R^x = k_T^x \end{cases} \end{aligned}$$

Tali equazioni si scrivono come

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T$$

Tenendo presente le condizioni sui moduli dei vettori d'onda, si ricava

$$\begin{aligned} k_I = k_R &\Rightarrow \sin \theta_I = \sin \theta_R \\ k_I = \frac{v_2}{v_1} k_T &\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} k_T \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T \Rightarrow \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \end{aligned}$$

Tali risultati sono noti come legge di Snell.

Stabilito che gli esponenziali sono uguali per tutti, e quindi si cancellano dall'equazione iniziale, notiamo che il campo combinato nel mezzo 1 deve essere collegato a quello nel mezzo 2 usando le condizioni al contorno sulla superficie e servendosi delle componenti parallele e perpendicolari dei campi stessi:

$$\begin{cases} E_1'' = E_2'' & \varepsilon_1 E_1^\perp = \varepsilon_2 E_2^\perp \\ B_1^\perp = B_2^\perp & \frac{B_1''}{\mu_1} = \frac{B_2''}{\mu_2} \end{cases}$$

Esplicitiamo, quindi, tali condizioni all'interfaccia, ovvero per $z = 0$.

$$\begin{cases} (E_{0I} + E_{0R})_{x,y} = (E_{0T})_{x,y} & \varepsilon_1 (E_{0I} + E_{0R})_z = \varepsilon_2 (E_{0T})_z \\ (B_{0I} + B_{0R})_z = (B_{0T})_z & \frac{1}{\mu_1} (B_{0I} + B_{0R})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} (B_{0T})_{x,y} \end{cases}$$

Supponiamo che l'onda incidente sia polarizzata nel piano Oxz , per cui anche le onde riflesse e trasmesse presenteranno la medesima polarizzazione. Le equazioni diventano

$$\begin{cases} E_{0I} \cos \theta_I + E_{0R} \cos \theta_R = E_{0T} \cos \theta_T & \varepsilon_1 (E_{0I} \sin \theta_I - E_{0R} \sin \theta_R) = \varepsilon_2 E_{0T} \sin \theta_T \\ 0 = 0 & \frac{1}{\mu_1 v_1} (E_{0I} - E_{0R}) = \frac{E_{0T}}{\mu_2 v_2} \end{cases}$$

L'equazione del campo magnetico restituisce

$$E_{0I} - E_{0R} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} E_{0T} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} E_{0T} = \beta E_{0T}$$

La prima equazione del campo elettrico, tenendo presente la legge di Snell, fornisce

$$E_{0I} + E_{0R} = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} E_{0T} = \alpha E_{0T}$$

Dalle ultime due relazioni, per somma e differenza di membri, si ricava

$$E_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0I} = C_T E_{0I}$$

$$E_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0I} = C_R E_{0I}$$

C_T e C_R sono rispettivamente il coefficiente di trasmissione e quello di riflessione.