Prova scritta di Elettromagnetismo e Ottica (CCS Fisica), 23 febbraio 2016

Proff. Giovanni De Lellis & Lorenzo Marrucci

A ciascun esercizio sono assegnati 10 punti. I punti dei due esercizi sono così ripartiti per le 3 domande: 6, 2 e 2 rispettivamente. 10 punti vanno ai test.

ESERCIZIO N° 1

Sia dato il sistema di 4 conduttori cilindrici coassiali mostrato in figura. I 4 cilindri hanno pareti di spessore trascurabile, raggi $R_1 = a$, $R_2 = 2a$, $R_3 = 3a$, $R_4 = 4a$, dove $a = 1$ cm, e altezza $h = 1$ m. Inizialmente il cilindro 1 possiede una carica $Q_0 = 56$ nC e i cilindri 2 e 3 sono scarichi. Il cilindro 4 è collegato a terra.

- Trascurando gli effetti di bordo, si calcoli il potenziale V_1 del conduttore 1.

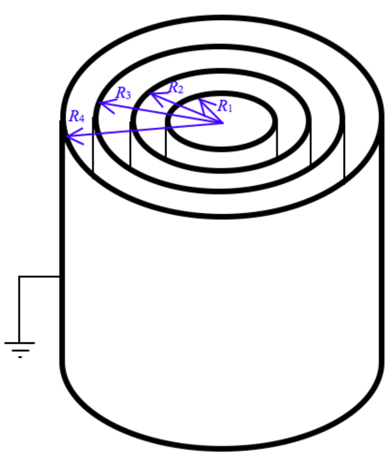
Successivamente, il cilindro 1 viene collegato con il cilindro 3 da un sottile filo conduttore e il cilindro 2 viene analogamente collegato con il cilindro 4 che resta collegato a terra. Calcolare:

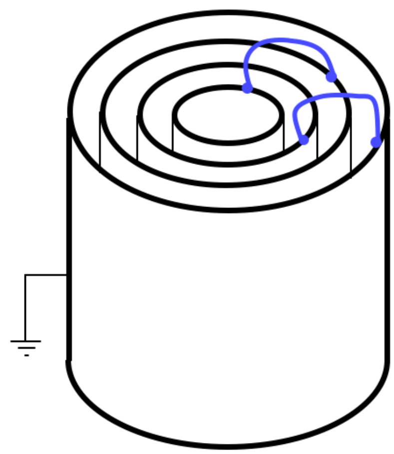
- la carica che rimane sul conduttore 1;
- l'energia elettrostatica del sistema.

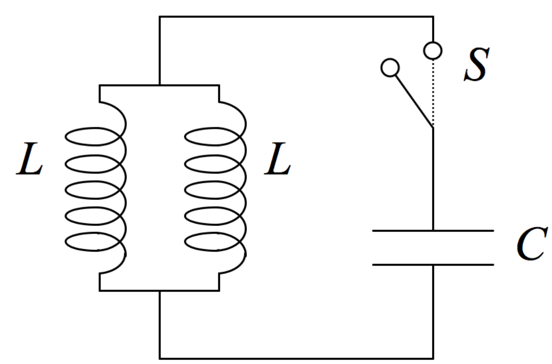
ESERCIZIO N° 2

Nel circuito in figura, costituito da un condensatore di capacità $C = 200\ \mu$F e due induttanze uguali pari a $L = 4$ H, inizialmente l'interruttore S è aperto e il condensatore possiede una carica $Q_0 = 4$ mC. Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Calcolare:

- il periodo T di oscillazione della corrente che si sviluppa nel circuito;
- l'energia magnetica immagazzinata in ciascuna delle due induttanze al tempo t = T/8.
- Se si considera nel circuito la resistenza del filo pari a $R = 4\Omega$, calcolare il tempo necessario affinché l'ampiezza delle oscillazioni si attenui di un fattore 100.







ESERCIZIO N° 1
I conduttori 2 e 3 sono scarichi e dunque ininfluenti ai fini del calcolo del campo pari a

$$E(r) = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{r}$$

e dunque il potenziale

$$V_1 = \int_{R_1}^{R_4} E(r)dr = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_4}{R_1} = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln 4 = 1.4\,kV$$

Nel secondo caso la carica Q_0 si distribuisce sui conduttori 1 e 3, $Q_0 = Q_1 + Q_3$, e si carica anche Q_2 nel contatto, in modo da garantire che $V_2 = V_4 = 0$ e $V_1 = V_3$. Il campo elettrico nelle tre regioni è $E_1 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{r}$, $E_2 = \frac{Q_1+Q_2}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{r}$ ed $E_3 = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{r}$. Imponendo le condizioni di sopra si ha

$$V_1 - V_3 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln 2 + \frac{Q_1+Q_2}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{3}{2} = 0$$

$$V_2 - V_4 = \frac{Q_1+Q_2}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{3}{2} + \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{4}{3} = 0$$

da cui $Q_1\ln 3 = Q_2(\ln 2 - \ln 3)$ e $(Q_1+Q_2)\ln 2 = Q_3(\ln 3 - 2\ln 2)$. Quindi

$$Q_3 = \frac{(\ln 2)^2}{(\ln 3 - \ln 2)(2\ln 2 - \ln 3)}Q_1$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_3 = Q_1\left[\frac{3\ln 2\ln 3 - (\ln 3)^2 - (\ln 2)^2}{(\ln 3 - \ln 2)(2\ln 2 - \ln 3)}\right]$$

da cui $Q_1 = 10.9$ nC. $Q_2 = -29.5$ nC e $Q_3 = 45.1$ nC. L'energia elettrostatica è

$$U = \int\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}d\tau = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 h}\left[Q_1^2\ln 2 + (Q_1+Q_2)^2\ln\frac{3}{2} + (Q_1+Q_2+Q_3)^2\ln\frac{4}{3}\right] = 3.8\cdot 10^{-6}\,J$$

ESERCIZIO N° 2
Il parallelo delle induttanze corrisponde a un'induttanza $L/2$ e dunque l'equazione del circuito è

$$\frac{L}{2}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)dt = 0$$

$$\frac{L}{2}\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

da cui $Q(t) = Q_0\cos\omega t$ e $I(t) = -\omega Q_0\sin\omega t$ dove $\omega^2 = 2/LC$, $\omega = 50$ rad/s e $T = 2\pi/\omega = 0.126$ s.

Al tempo $t = T/8$ la corrente vale $-\omega Q_0\sin\pi/4$. L'energia immagazzinata in ciascuna delle induttanze, nelle quali scorre la corrente $I_1 = I/2$, è $U = \frac{LI_1^2}{2} = \frac{LI^2}{8} = \frac{L\omega^2Q_0^2}{16} = \frac{Q_0^2}{8C} = 0.01$ J.

Aggiungendo R e considerando la ω trovata ($\omega >> R/L$), le soluzioni dell'equazione algebrica sono $\lambda = -\frac{R}{L} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{R^2}{L^2}}$. L'attenuazione di un fattore 100 comporta $e^{-Rt/L} = 1/100$ e dunque $t^* = \frac{2L}{R}\ln 10 = 4.6$ s.