Prova di Esame
Prof.ssa Giovanna Ilardi
Geometria e Algebra

(2 punti) Studiare la compatibilità e determinare le eventuali soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 3x - 6y - 7z = -4 \end{cases}$$

(5 punti) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z) = (x - y, -2x, 2x + z).$$

Determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ associata all'applicazione rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0, 1, 2), (-1, 0, 0), (0, 0, -2)\}$.

(10 punti) Data la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ dell'esercizio precedente: dopo aver verificato che sia una matrice diagonaizzabile, determinare la relativa matrice diagonale $\mathcal{D}$ e la relativa matrice diagonalizzante $\mathcal{P}$.

(5 punti) Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + y, 2y + x, x + \frac{1}{2}y, x + y\right).$$

1. Determinare la dimensione ed una base del $\ker f$;
2. determinare la dimensione ed una base di $\Im f$.

L'applicazione lineare è un isomorfismo?

(8 punti) Fissato nello spazio un riferimento monometrico ortogonale, si prenda in considerazione la retta r rappresentata da:

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -y + 2 = 0 \end{cases}$$

e il punto $A\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$. Rappresentare la retta s passante per il punto A che sia ortogonale ed incidente alla retta r.
Sia dato il piano

$$\alpha : -x - y + 3 = 0.$$

Si rappresenti il piano π passante per la retta r e parallelo al piano α.
Assegnato il punto $B\,(0, 3, 1)$:

1. verificare che il punto B appartenga al piano α;
2. rappresentare la retta t passante per il punto B ortogonale al piano α.

Verificare che la retta t individuate sia ortogonale al piano π.