1. Cenni di teoria degli insiemi e operazione sugli insiemi. Insiemi numerici (N, Z, Q, R)

Indice della lezione

1. Gli insiemi
   - Definizione
   - Rappresentazione
   - Sottoinsiemi
   - Operazioni
2. Gli insiemi numerici
   - operazioni
   - Numeri naturali, interi, razionali, reali

Gli insiemi

la nozione di insieme è un concetto primitivo che viene spesso utilizzato nella vita di tutti i giorni; si parla dell'insieme:

- degli iscritti ad un corso di laurea
- delle stelle in cielo
- dei punti di un piano

Gli insiemi: definizioni

Un insieme rappresenta un raggruppamento di uno o più oggetti.

Un insieme è una famiglia di oggetti

Gli insiemi: notazione

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole
A, B, C, …

Mentre gli elementi che fanno parte degli insiemi si indicano con le lettere minuscole
$a, b, c, \ldots$

Per indicare l'appartenenza o non appartenenza di un elemento a ad un insieme A si utilizza la seguente simbologia

$$\underset{\text{appartiene}}{a \in A} \qquad \underset{\text{non appartiene}}{a \notin A}$$

Gli insiemi: le rappresentazioni

Per descrivere e precisare quali siano gli elementi di un insieme si possono utilizzare varie rappresentazioni:

- rappresentazione tabulare
- rappresentazione grafica
- rappresentazione caratteristica

Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare di un insieme consiste nello scriverne, quando è possibile, tutti gli elementi entro parentesi graffe.

Rappresentazione tabulare

Esempio. Consideriamo l'insieme A costituito dai numeri 1 e 0. Allora la rappresentazione tabulare dell'insieme A è la seguente :

$$A = \{1, 0\} \quad oppure \quad A = \{0,1\}$$

Osservazione 1. Notiamo che:

$$\{1, 0\} = \{0,1\}$$

Cioè: l'ordine in cui si elencano gli elementi di un insieme è irrilevante

Rappresentazione tabulare

Esempio. Consideriamo l'insieme B costituito dalle cifre del numero 2211. Allora la rappresentazione tabulare dell'insieme B è la seguente :

$$B = \{2, 1\} \quad oppure \quad B = \{1, 2\}$$

Osservazione 2. Notiamo che la molteplicità non viene considerata nella descrizione tabulare di un insieme: non ha senso "contare due volte" un elemento di un insieme.

Rappresentazione tabulare

Esempio 2. L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione tabulare:

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Esempio DNA

L'informazione genetica e' nel DNA. Ogni molecola di DNA ha una struttura a doppia elica, ed ogni elica e' una catena di strutture chimiche che contengno basi azotate. Le basi azotate del DNA sono 4: Adenina (A), citosina (C), guanina (G), timina (T)

$$A_{DNA} = \{A, C, G, T\}$$

Insieme finito e infinito

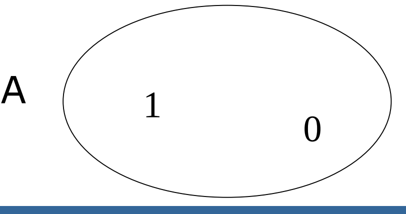
Un insieme <u>infinito</u> è intuitivamente un insieme che non contiene un numero finito di elementi.

Di un insieme finito è possibile scriverne la rappresentazione tabulare e tale scrittura ha termine.

Rappresentazione grafica

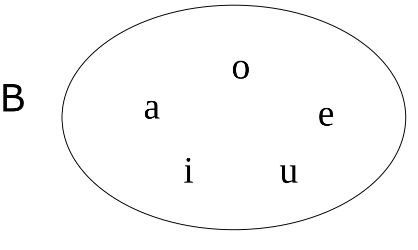
La rappresentazione grafica di un insieme consiste nel racchiudere i suoi elementi in una linea chiusa

<u>Esempio 1</u>. L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1 e 0 ha la seguente rappresentazione grafica



Rappresentazione grafica

<u>Esempio 2</u>. L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:



Rappresentazione caratteristica

La rappresentazione caratteristica di un insieme consiste nel caratterizzare i suoi elementi con una proprietà comune detta appunto proprietà caratteristica.

Esempio 1. L'insieme A costituito dalle cifre del numero 1 e 0 ha la seguente rappresentazione caratteristica:

$$A = \{numeri\, interi\, compresi\, tra\, 0\, e\, 1\}$$

$$o\ equivalentemente$$

$$A = \{x : numeri\, interi\, e\, 0 \leq x < 2\}$$

Rappresentazione caratteristica

Esempio 2. L'insieme B formato dalle vocali dell'alfabeto italiano ha la seguente rappresentazione grafica:

$$B = \{\text{vocali dell'alfabeto italiano}\}$$

$$\text{o equivalentemente}$$

$$B = \{x : x \text{ vocale dell'alfabeto italiano}\}$$

Definizioni: insieme vuoto, uguali, diversi

- Si definisce insieme vuoto l'insieme privo di elementi che si indica col simbolo $\varnothing$
- Due insiemi A e B si dicono uguali quando sono costituti dagli stessi elementi e si scrive

$$A=B$$

cioè ogni elemento dell'uno è anche un elemento dell'altro. In caso contrario, si dice che gli insiemi A e B sono diversi e si scrive

$$A\neq B$$

Definizioni: insiemi disgiunti

- Se nessun elemento di A sta in B, si dice che A e B sono disgiunti.

Esempio 1. Se

$$A=\{r,t\} \quad \text{e} \quad B=\{t,r\} \text{ allora } A=B$$

Esempio 2. Se

$$A=\{a,b,c\} \quad \text{e} \quad B=\{a,d,e\} \text{ allora } A\neq B$$

Esempio 3. Se

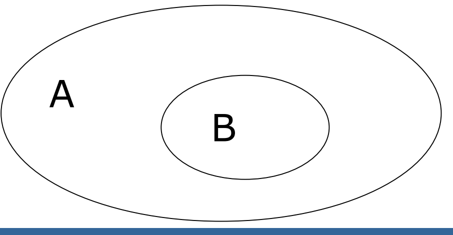
$$A=\{a,b,c\} \quad \text{e} \quad B=\{m,n,t\} \text{ allora } A \text{ e } B \text{ disgiunti}$$

Definizioni: sottoinsieme

Si dice che B è un sottoinsieme dell'insieme A se tutti gli elementi di B sono anche elementi di A e si scrive simbolicamente:

$$A \supseteq B \text{ oppure } B \subseteq A$$

Rappresentazione grafica



Definizioni: sottoinsieme proprio

- tra i sottoinsiemi di un generico insieme A vi è A stesso (ogni elemento di A appartiene ad A), cioè:

$$A \supseteq A \text{ oppure } A \subseteq A$$

- si conviene di considerare l'insieme vuoto come sottoinsieme di ogni generico insieme

$$\Downarrow$$

Ogni insieme possiede sicuramente due sottoinsiemi: se stesso e l'insieme vuoto.

Si definisce sottoinsieme proprio di un insieme A ogni suo sottoinsieme non vuoto e distinto da A

Insieme finito e infinito

Un insieme <u>infinito</u> è intuitivamente un insieme che non contiene un numero finito di elementi.

Un insieme infinito se esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme ed un suo sottoinsieme proprio.

Sottoinsiemi: esempi

<u>Esempio 1</u>. Se

$$B = \{a, d, b\} \ e \ A = \{a, b, c, d\} \Rightarrow B \subseteq A$$

<u>Esempio 2</u>. Se

$$B = \{1,2,3,4,5\} \ e \ A = \{2,3\} \Rightarrow A \subseteq B$$

Sottoinsiemi: osservazioni

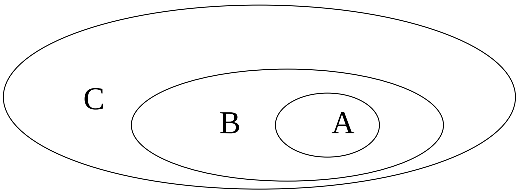
Osservazioni:

- ovviamente due insiemi A e B sono uguali se e solo se

$$B \subseteq A \text{ e } A \subseteq B$$

- è facile provare che se

$$A \subseteq B \text{ e } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$



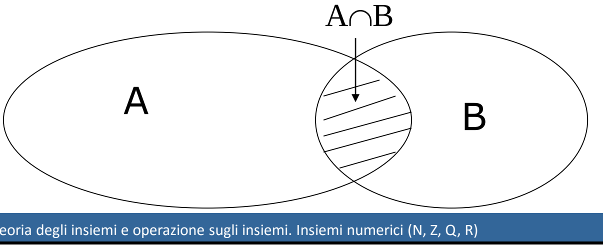
Operazioni tra gli insiemi: intersezione

Def. Si definisce intersezione tra due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B e si indica col simbolo

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

(analogamente si definisce l'intersezione tra tre o più insiemi)

Graficamente l'intersezione tra A e B si raffigura come segue



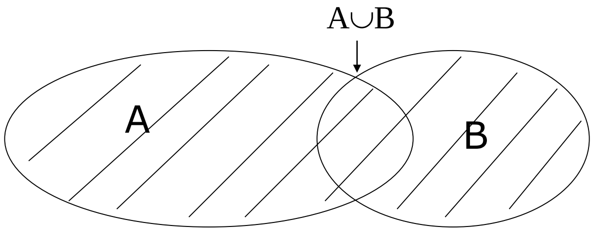
Operazioni tra gli insiemi: unione

Def. Si definisce unione tra due insiemi A e B, l’insieme formato dagli elementi che appartengono almeno ad A o B e si indica col simbolo

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

(analogamente si definisce l’unione tra tre o più insiemi)

Graficamente l’unione tra A e B si raffigura come segue



Ovviamente:

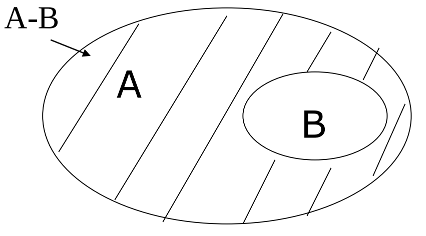
- se A e B non hanno elementi in comune si ha che $A \cap B = \varnothing$
- $A \bigcup B \supseteq A$ e $A \bigcup B \supseteq B$
- $A \bigcap B \subseteq A$ e $A \bigcap B \subseteq B$

Differenza complementare

Def. Si definisce differenza complementare tra un insieme A ed un suo sottoinsieme B, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A e non appartengono a B e si indica col simbolo

$$A-B=\{x : x\in A \text{ e } x\notin B\}$$

Graficamente la differenza complementare tra A ed il suo sottoinsieme B si raffigura come segue



Esempi su operazioni tra insiemi

- Esempio 1. Se

$$A=\{a,b,c,d\} \text{ e } B=\{a,d,f\} \Rightarrow$$

$A\cap B=\{a,d\}$

$A\cup B=\{a,b,c,d,f\}$

- Esempio 2. Se

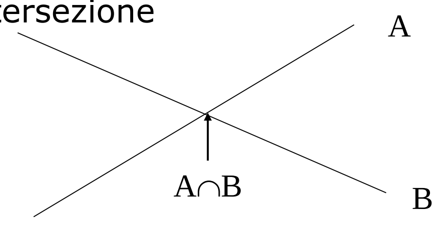
$$A=\{1,2,3,4\} \text{ e } B=\{1,3,5\} \Rightarrow$$

$A\cap B=\{1,3\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

Esempi su operazioni tra insiemi

- Esempio 3. Se A e B sono due rette non parallele di uno stesso piano, allora $A \cap B$ è l'insieme formato dal loro punto di intersezione



Oss. Se A e B fossero state due rette parallele allora $A \cap B = \emptyset$.

- Esempio 4. Se

$$A = \{1,2,3,4\} \ e \ B = \{1,3\} \Rightarrow \quad A\text{-}B = \{2,4\}$$

Gli Insiemi numerici

Introduciamo i principali insiemi numerici.

Indichiamo con:

- $\mathrm{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ l'insieme dei *numeri naturali*
- $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ l'insieme dei *numeri interi*
- $Q = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in Z, m \neq 0 \right\}$ l'insieme dei *numeri razionali*

Gli Insiemi numerici

- $Q = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in Z,\ m \neq 0 \right\}$ l'insieme dei *numeri razionali*

Osservazione.

I numeri razionali possono essere anche scritti in forma decimale:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \text{mentre} \quad \frac{1}{3} = 0{,}33333..... = 0{,}\bar{3}$$

Un numero razionale, scritto in forma decimale, dopo la virgola può presentare un numero finito di cifre diverse da zero oppure un numero infinito di cifre diverse da zero che però si ripetono periodicamente

Gli Insiemi numerici

R è l'insieme dei *numeri reali*, costituito da tutti i numeri che, scritti in forma decimale, presentano dopo la virgola una successione qualsiasi di cifre diverse da zero, eventualmente anche infinita e non periodica

⬇

$$Q \subset R$$

Q è un sottoinsieme proprio di R

I numeri reali che non sono razionali si dicono *numeri irrazionali*

Gli Insiemi numerici

Tra gli insiemi numerici introdotti valgono le inclusioni:

$$N \underset{\neq}{\subset} Z \underset{\neq}{\subset} Q \underset{\neq}{\subset} R$$

Tali inclusioni sono strette:

esistono infatti numeri interi che non sono naturali

(i numeri negativi),

esistono numeri razionali che non sono interi

(le frazioni proprie),

esistono numeri reali che non sono razionali

(i numeri irrazionali)

In N non esiste opposto e inverso di alcun numero

$$\Downarrow$$

Questo si traduce dicendo che in N si possono eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione ma non è in genere possibile eseguire le operazioni inverse di sottrazione e divisione

Escluso 1, in Z non esiste inverso di alcun numero

⇩

Questo si traduce dicendo che in Z è in genere possibile eseguire le operazioni di sottrazione ma non di divisione

Proprietà delle operazioni su i numeri reali

1. Proprietà associativa $(a+b)+c=a+(b+c)$
2. Proprietà commutativa $a+b=b+a$
3. Proprietà distributiva $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$
4. Esistenza degli elementi neutri: 0 e 1
5. Esistenza degli opposti: $a \to -a$
6. Esistenza degli inversi: $a \to a^{-1}=1/a$

Proprietà delle operazioni su i numeri reali

7. Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali a e b si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$
8. Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a=b$

Assioma di completezza

9. Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano un elemento a di A ed un elemento b di B.

   Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano a in A e b in B.

Gli insiemi e la tassonomia

Leccio

Quercus ilex

Parco delle Madonie

Classificazione scientifica	
Dominio	Eukaryota
Regno	Plantae
Divisione	Magnoliophyta
Classe	Magnoliopsida
Ordine	Fagales
Famiglia	Fagaceae
Genere	*Quercus*
Specie	***Q. ilex***

Nomenclatura binomiale

Quercus ilex

L., 1753

Gli insiemi e la tassonomia

Identificare diverse specie

=> sistematica e tassonomia

I principali livelli (ranghi) ormai comunemente accettati sono 7

$$specie \subset genere \subset famiglia \subset ordine$$

$$classe \subset phylum \subset regno$$