## ESERCIZI 1

(1) Siano $A$ e $B$ due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti. Dimostrare che, se $A \subseteq B$, allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

(2) Sia $A$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Verificare che, se $A$ è limitato superiormente e $a = \sup A$, allora l'insieme

$$A' = \{-x : \ x \in A\}$$

è limitato inferiormente e $\inf A' = -a$.

(3) Siano $A$ e $B$ due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti, limitati superiormente.
- Dimostrare che $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
- È vero che $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$?
- Supponiamo che $A$ e $B$ siano limitati inferiormente. Cosa possiamo dire a proposito di $\inf(A \cup B)$ e $\inf(A \cap B)$?

(4) Siano $A$ e $B$ due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti. Definiamo

$$A + B = \{a + b : \ a \in A, b \in B\}.$$

Dimostrare che $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

(5) Dimostrare che per ogni numero reale $r$ risulta

$$r = \sup\{q \in \mathbb{Q} : \ q < r\}.$$

(6) Dimostrare che gli intervalli $[0, 1]$ e $]0, 1[$ sono equipotenti costruendo un'applicazione biettiva $f : [0, 1] \to ]0, 1[$.

(7) Trovare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi. Dire se l'estremo inferiore è il minimo e l'estremo superiore è il massimo.

$$A = \left\{\frac{n-1}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}\right\}; \quad B = \left\{\frac{3n-2}{4n}, \ n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$C = \left\{\frac{(-1)^n}{n^2}, \ n \in \mathbb{N}\right\}; \quad D = \left\{n^2 - 5n + 4, \ n \in N\right\}$$
$$E = \left\{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 3\right\}$$

(8) Dimostrare che per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\}.$$