2. Rappresentazione numeri reali retta. Intervalli

Indice della lezione

1. Perche i Numeri?
   - Numeri razionali e retta
   - √2 non e’ razionale
   - Numeri reali e retta

2. Intervalli
   - intervalli limitati
   - intervalli illimitati

Perche' i numeri

I numeri sono un'astrazione del processo di contare

Ma nella vita non solo contare … misurare delle quantita' (lunghezza, aree, pesi, tempo, …)

Ridurre il problema di misurare al problema di contare

Algebra e Geometria

Perche' **Q**?

- ALGEBRA: Per fare inverso del prodotto

- GEOMETRIA: Per misurare con le frazioni (principio di generalizzazione)

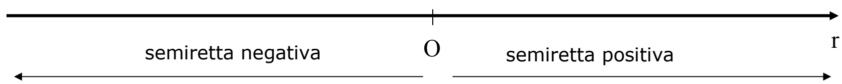
Ma allora Q basta per misurare?

Rappresentazione grafica di una retta

r retta orientata: r retta sulla quale è stato fissato un senso indicato dalla freccia

percorrere r in senso positivo: percorrere r nel senso della freccia

O origine di r: punto che divide r in due semirette: la semiretta positiva è quella che partendo da O viene percorsa in senso positivo, negativa l'altra



I numeri razionali ed i punti di una retta

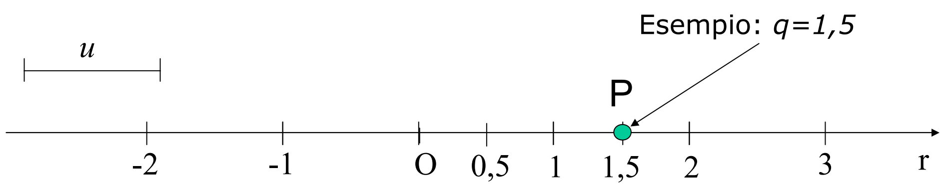
Vediamo la relazione che possiamo creare tra i numeri razionali ed una retta

I numeri razionali ed i punti di una retta

Consideriamo l'insieme dei numeri razionali **Q** e l'insieme dei punti di una retta orientata r di origine O

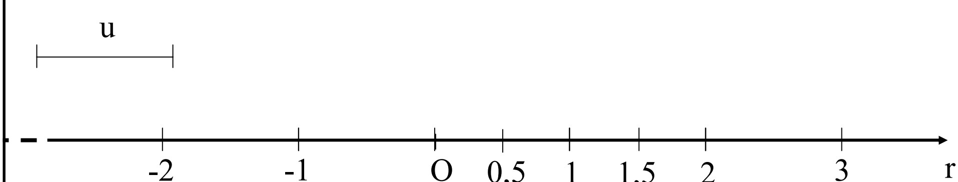
Prendiamo un segmento arbitrario u come unità di misura

E' possibile stabilire la seguente relazione tra Q e i punti della retta:
ad ogni numero razionale q facciamo corrispondere un punto P della retta r la cui distanza da O abbia per misura (rispetto ad u) il numero q



I numeri razionali ed i punti di una retta

Così, ad ogni numero razionale q corrisponde uno ed un solo punto P della retta r, **ma <u>non</u> è vero il viceversa**



I numeri razionali ed i punti di una retta

La corrispondenza tra i numeri razionali ed i punti di una retta r del piano è

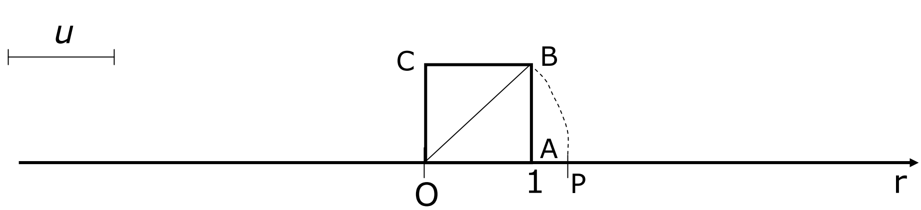
Univoca (Q e' rappresentabile sulla retta)
Ma no biunivoca (la retta non rappresenta solo Q)

La non biunivocità di tale corrispondenza va dimostrata individuando almeno un punto della retta r al quale non corrisponde alcun numero razionale

I numeri razionali ed i punti di una retta

Ad esempio, non corrisponde ad alcun numero razionale il punto il punto P in figura la cui distanza da O sulla retta r è pari alla diagonale del quadrato di lato unitario costruito sulla semiretta positiva di r

La misura di tale diagonale è $\sqrt{2}$



√2 non e’ un numero razionale

Si può infatti dimostrare ragionando per "assurdo" che il numero reale $\sqrt{2}$ non è un numero razionale:

Teorema : il numero reale $\sqrt{2}$ non è razionale

√2 non e’ un numero razionale: dimostrazione

Teorema : il numero reale $\sqrt{2}$ non è razionale

Dimostrazione per assurdo:

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale.

$\sqrt{2}=m/n$ con m e n primi

$m^2/n^2=2 \Rightarrow m^2=2n^2 \Rightarrow m^2$ pari $\Rightarrow$ m pari

$\Rightarrow m=2k \Rightarrow m^2=4k^2$

$4k^2=2n^2 \Rightarrow n^2=2k^2 \Rightarrow n^2$ pari $\Rightarrow$ n pari

m e n pari -> contraddizione che erano primi tra loro

ASSURDO

Esiste un numero che sta sulla retta ma non e’ razionale

I numeri irrazionali

I numeri reali che non sono razionali sono detti **numeri irrazionali**
(non si possono scrivere come frazioni ed hanno un numero illimitato di cifre decimali dopo la virgola)

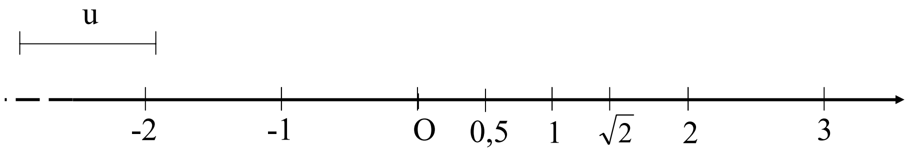
$$\sqrt{2} = 1{,}4142...$$

$$\pi = 3{,}14...$$

$$e = 2{,}7182...$$

I numeri reali ed i punti di una retta

L'insieme **R** dei numeri reali può invece essere posto in corrispondenza biunivoca con i punti della retta r:
ad ogni numero reale x corrisponde un unico punto P della retta e <u>viceversa</u>



Insiemi infiniti*

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Come facciamo a “contare” gli insiemi infiniti? Due insiemi A e B si dicono di uguale **cardinalità (o potenza)** se possono essere messi in **corrispondenza biunivoca** tra loro (cioe una legge che associa ad ogni elemento di A uno ed uno solo elemento di B).

N e Z numerabili

Z		N
0	$\leftrightarrow$	0
1	$\leftrightarrow$	1
-1	$\leftrightarrow$	2
2	$\leftrightarrow$	3
-2	$\leftrightarrow$	4
…	$\leftrightarrow$	…
n	$\leftrightarrow$	2n-1
-n	$\leftrightarrow$	2n

N e Z hanno la stessa cardinalita’ (numerabile)

R ha la potenza del continuo

Si puo’ dimostare che anche Q e’ numerabile (cioe’ ha la cardinalita di N e Z)

Ed R?
Si puo’ dimostrare che R non e’ numerabile.
La cardinalita’ di R prende il nome di potenza del **continuo**.

Ipotesi del continuo
Non esiste nessun insieme la cui cardinalità è strettamente compresa fra quella dei numeri naturali e quella dei numeri reali.

Intervalli: definizioni

Sono particolari insiemi numerici.

Dati due numeri reali a e b, con a, b∈R, si definisce intervallo uno dei seguenti insiemi:

- intervallo <u>chiuso</u> [a,b]= $\{x \in R : a \leq x \leq b\}$

- intervallo <u>aperto</u>]a,b[= $\{x \in R : a < x < b\}$

Intervalli: definizioni

- intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra

[a,b[= $\{x \in R : a \leq x < b\}$

- intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

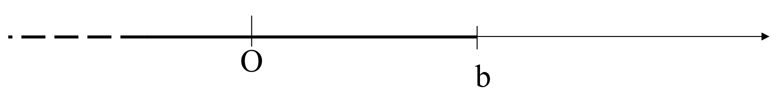
]a,b]= $\{x \in R : a < x \leq b\}$

Intervalli limitati ed illimitati

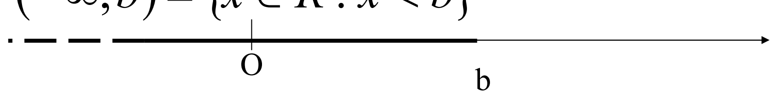
Gli intervalli appena definiti sono <u>limitati</u> poiché ogni x appartenente all'intervallo varia tra due numeri finiti;

Anche le semirette sono intervalli, ma intervalli <u>illimitati</u>

$$(-\infty; b] = \{x \in R : x \leq b\}$$

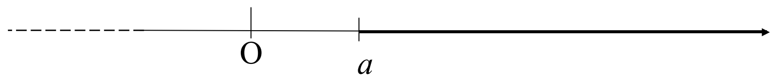


$$(-\infty; b) = \{x \in R : x < b\}$$

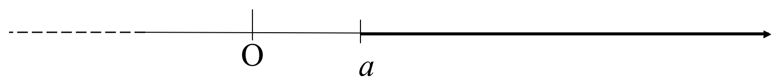


Intervalli illimitati

- $\left[a;+\infty\right) = \left\{x \in R : x \geq a\right\}$



- $\left(a;+\infty\right) = \left\{x \in R : x > a\right\}$



Esercizi

<u>Esercizio 1</u>. Dati gli insiemi

$$A = \left\{x \in R : 1 < x < 4\right\}$$
$$B = \left\{x \in R : 3 \leq x \leq 8\right\}$$

calcolare $A \cap B$

Operazioni tra gli insiemi: intersezione

Def. Si definisce intersezione tra due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B e si indica col simbolo

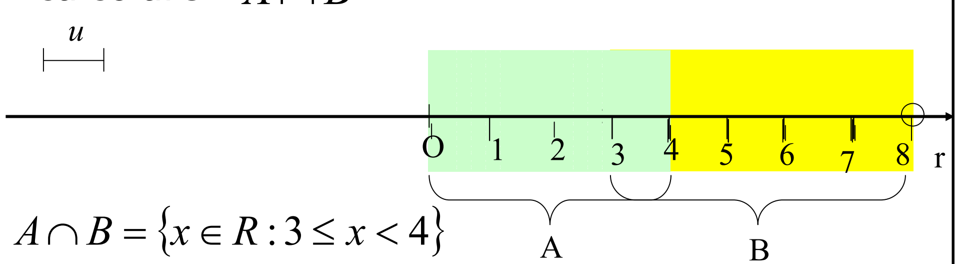
$$A \bigcap B = \{x : x \in A \ \text{e} \ x \in B\}$$

Esercizi

Esercizio 1. Dati gli insiemi

$$A = \{x \in R : 0 < x < 4\}$$
$$B = \{x \in R : 3 \le x \le 8\}$$

calcolare $A \cap B$



$$A \cap B = \{x \in R : 3 \le x < 4\}$$

Esercizi

Esercizio 2. Dati gli insiemi

$$A = \{x \in R : -3 < x < -1\}$$
$$B = \{x \in R : -3 \leq x \leq -2\}$$

calcolare $A \cap B$

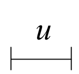
$$A \cap B = \{x \in R : -3 < x \leq -2\}$$

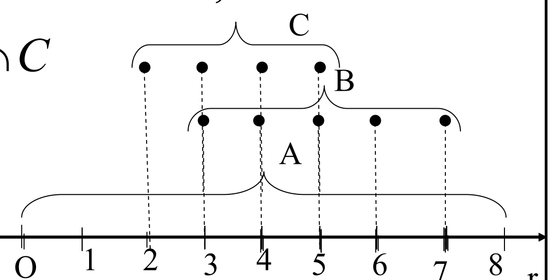
Esercizi

Esercizio 3. Dati gli insiemi

$$A = \{x \in R : 0 < x < 8\}$$
$$B = \{x \in N : 3 \leq x \leq 7\}$$
$$C = \{x \in N : 1 < x < 6\}$$

calcolare $(A \cap B) \cap C$





$$A \cap B \cap C = \{x \in N : 3 \leq x \leq 5\} \Leftrightarrow \{x \in N : 2 < x < 6\}$$

Esercizi

Esercizio 4. Dati gli insiemi

$$A = \left\{x \in R : x \geq \sqrt{2}\right\}$$
$$\mathrm{B} = \left\{x \in R : x \geq 1{,}4\right\}$$

calcolare A-B e B-A

Differenza complementare

Def. Si definisce differenza complementare tra un insieme A ed un suo sottoinsieme B, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A e non appartengono a B e si indica col simbolo

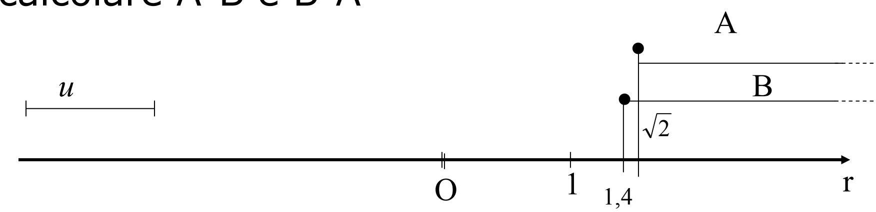
$$A - B = \left\{x : x \in A \ \text{ e } \ x \notin B\right\}$$

Esercizi

Esercizio 4. Dati gli insiemi

$$A = \left\{ x \in R : x \geq \sqrt{2} \right\}$$
$$\mathrm{B} = \left\{ x \in R : x \geq 1{,}4 \right\}$$

calcolare A-B e B-A



$$A - B = \varnothing$$
$$\mathrm{B} - A = \left\{ x \in R : 1{,}4 \leq x < \sqrt{2} \right\}$$

Esercizi file:

02es. Esercizi - Intervalli.pdf