Funzioni iniettive, surriettive, biuninoche. Funzioni invertibili.

Funzioni suriettive, iniettive, biunivoche

Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R,\ A, B \neq \emptyset$$

- si dice suriettiva se l'immagine $f(A)$ del dominio A mediante f coincide con l'insieme di arrivo B :

$$f(A) = B$$

• si dice iniettiva se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

• si dice biunivoca (o biettiva) se è sia iniettiva che suriettiva, cioè:

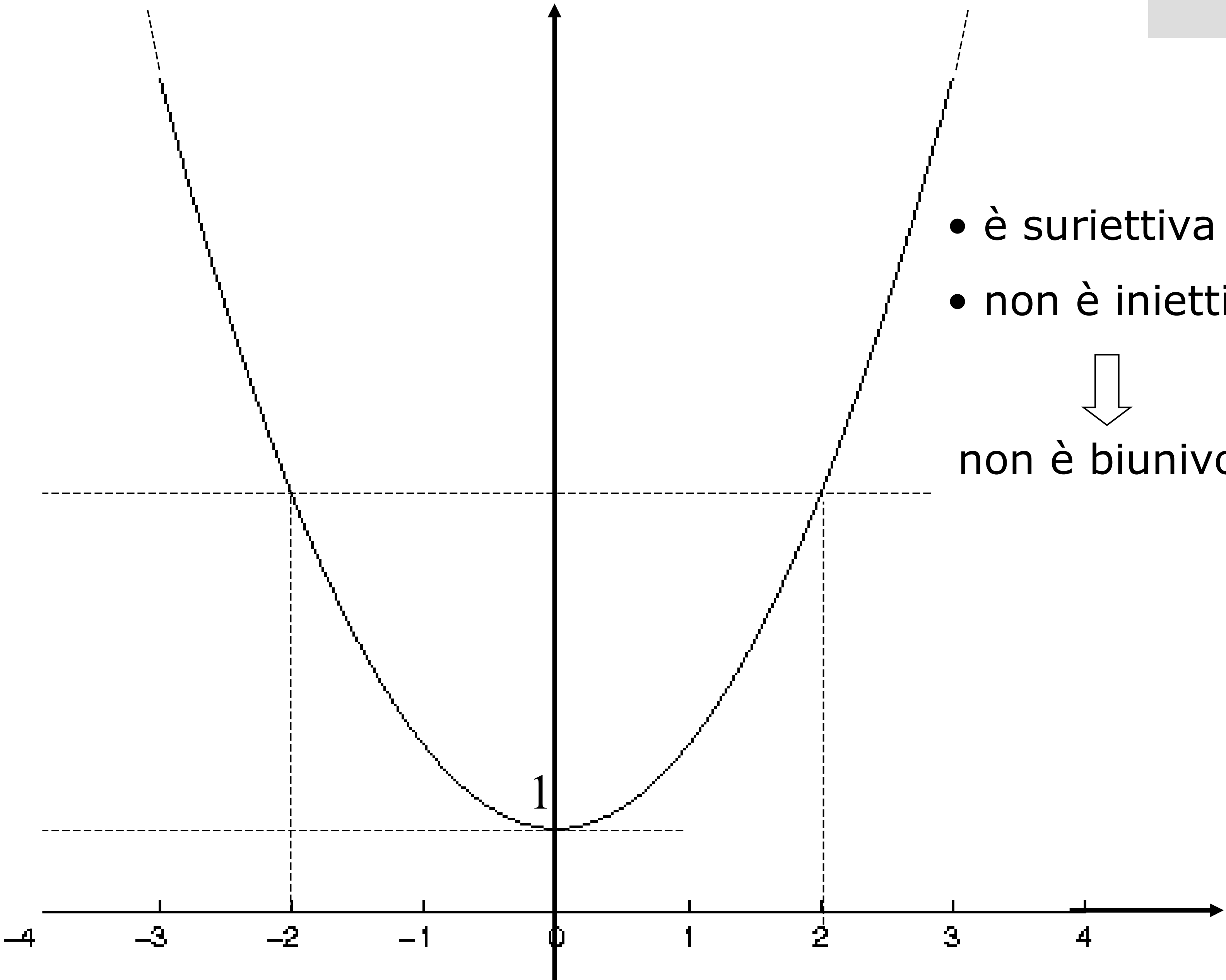
$$f(A) = B$$

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Vediamo cosa vuol dire da un punto di vista grafico che una funzione è

iniettiva, suriettiva o biunivoca

Sia assegnata la funzione $f\colon R \longrightarrow [1,+\infty)$, il cui grafico è

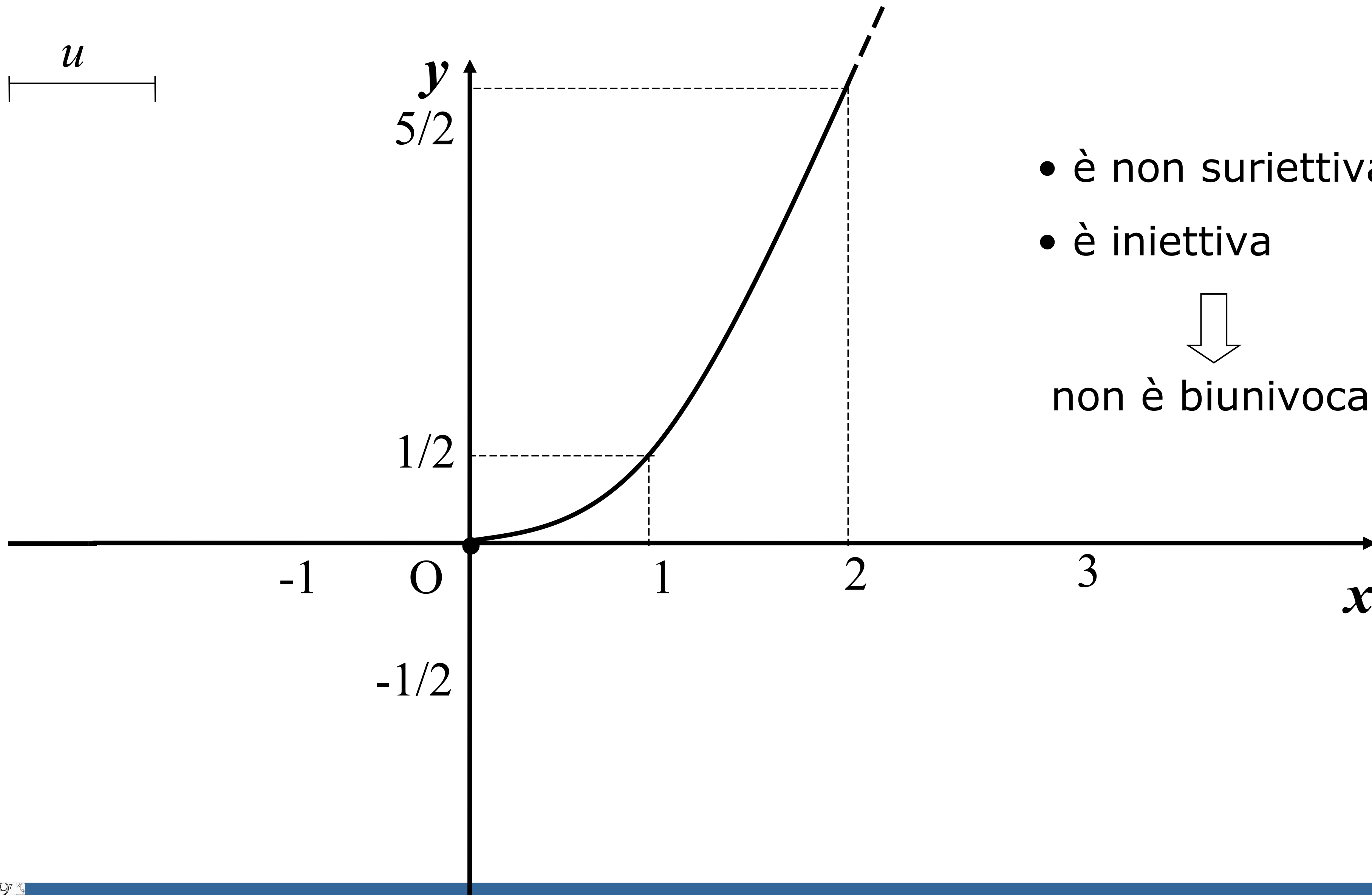


- è suriettiva
- non è iniettiva

$\Downarrow$

non è biunivoca

Sia assegnata la funzione $f\colon [0,+\infty) \longrightarrow (-\infty,+\infty)$, il cui grafico è

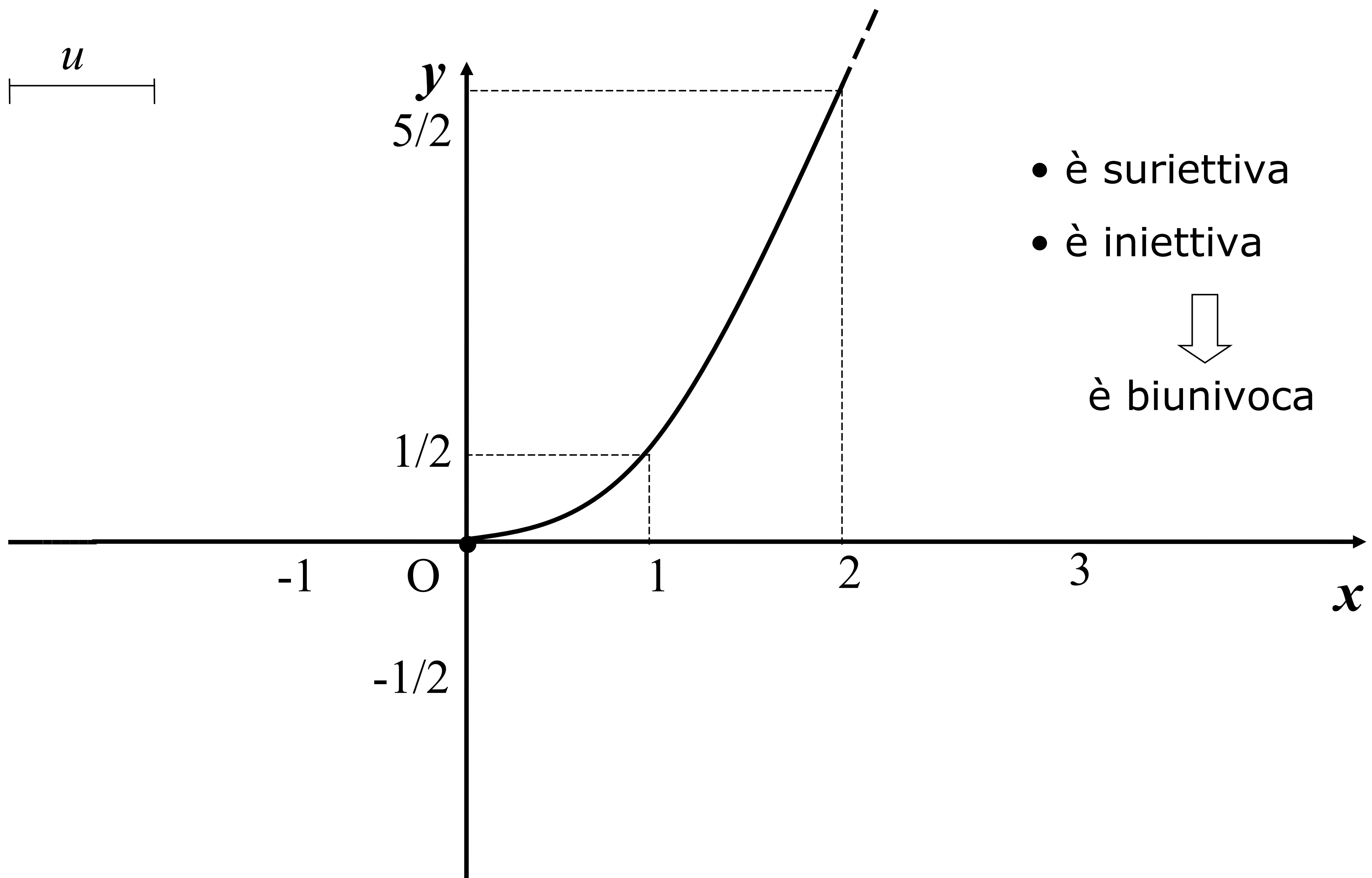


- è non suriettiva
- è iniettiva

$\Downarrow$

non è biunivoca

Sia assegnata la funzione $f\colon [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, il cui grafico è



- è suriettiva
- è iniettiva

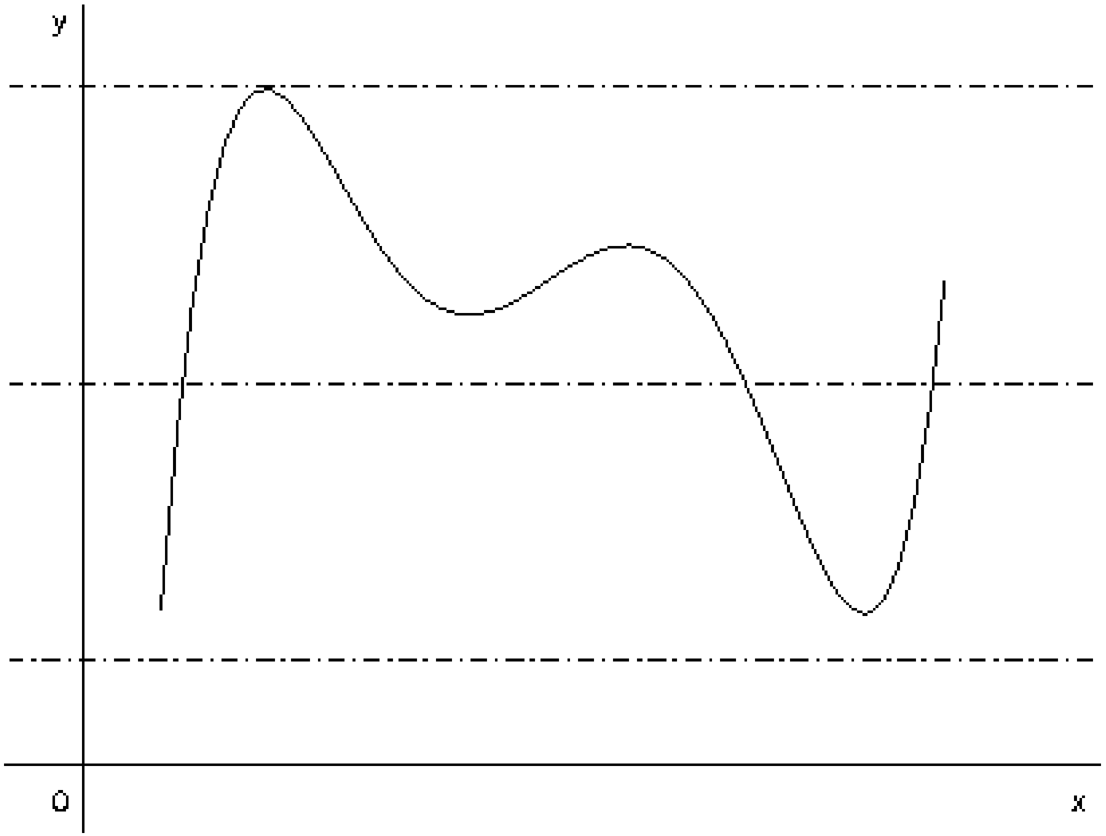
$\Downarrow$

è biunivoca

Da quanto appena visto, possiamo affermare che:

f è iniettiva $\Leftrightarrow$ ogni retta parallela all'asse x interseca il grafico di f al più in un solo punto

Non è iniettiva! →



Qunindi:

Se f è strettamente monotona $\Rightarrow$ f è iniettiva

$$\Downarrow$$

Se f è suriettiva e strettamente monotona $\Rightarrow$ f è biunivoca

Funzioni invertibili- funzioni inverse

Def. Assegnata una funzione

$$f\colon A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq R, \; A, B \neq \emptyset$$

si dice invertibile se è biunivoca

Ma che vuol dire praticamente che una funzione f è invertibile?

$$\Downarrow$$

vuol dire che a partire dalla funzione f è possibile costruire una nuova funzione che procede a ritroso rispetto ad f

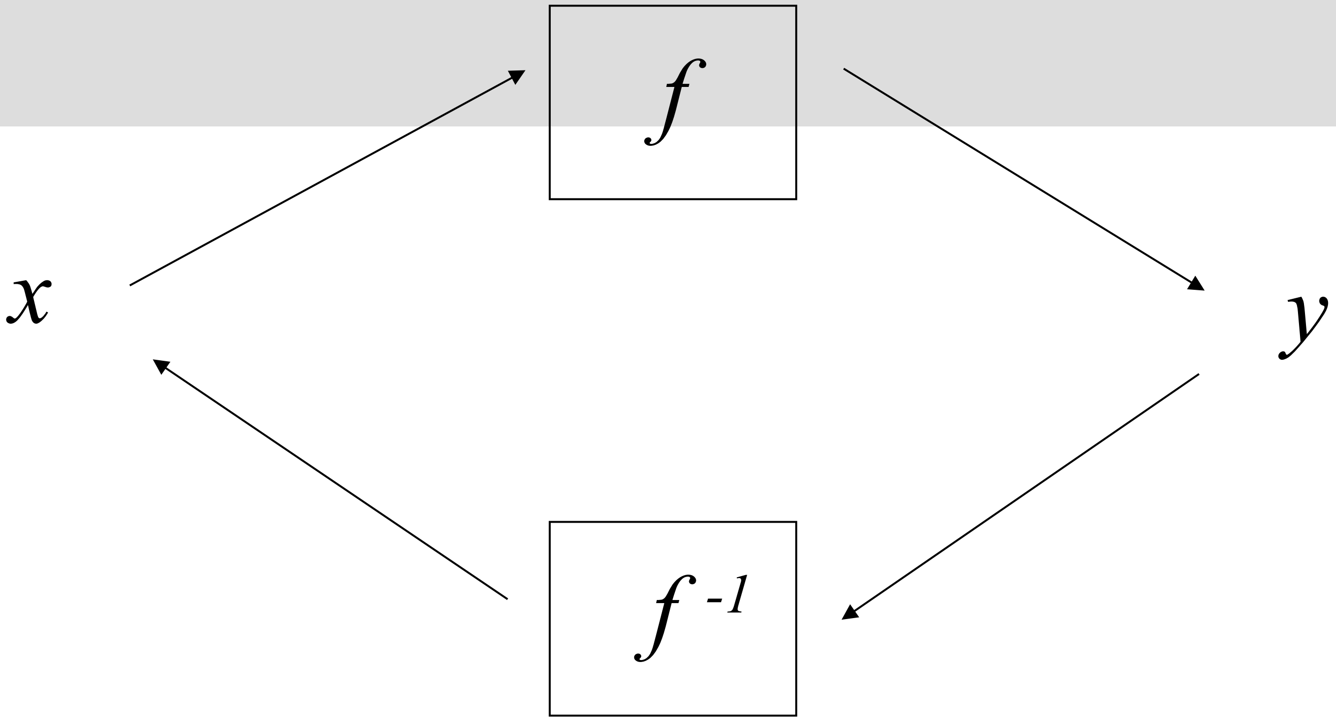
Tale funzione è detta inversa di f e si indica col simbolo f^{-1}

$$f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$$

y associa x

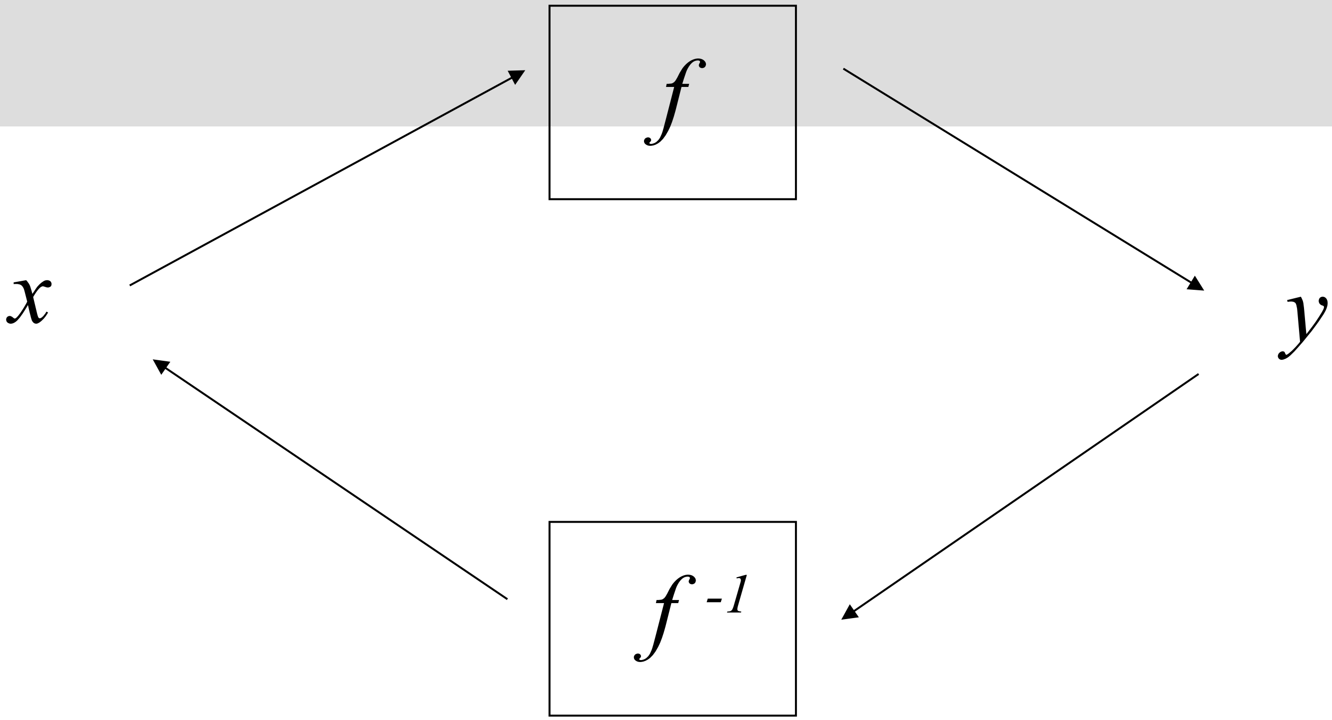
che ad ogni $y \in f(A)$ associa uno ed un solo $x \in A$ tale che

$$x = f^{-1}(y)$$



Se si parte da x e si effettua un giro completo, passando per f e poi per f^{-1}, si torna in x. Cioè:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \forall x \in A$$



Viceversa, se si parte da y e si effettua un giro completo, passando per f^{-1} e poi per f, si torna in y

$$f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in f(A)$$

Graficamente, l'invertibilità di una funzione si individua verificando se

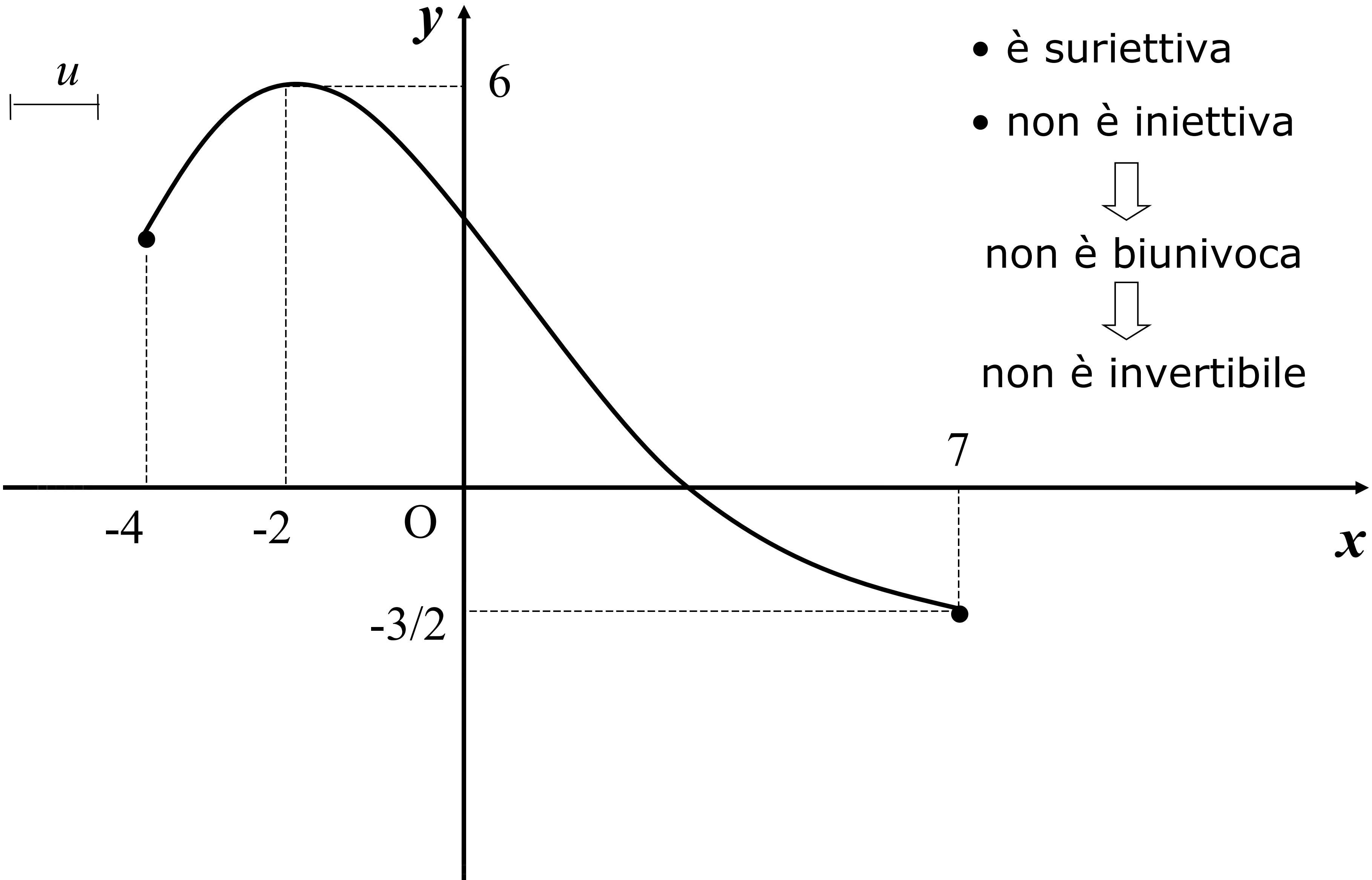
$$f(A) = B$$

(suriettività)

e se

f è strettamente monotona

Esercizio: Sia data la funzione $f:[-4,7]\rightarrow\left[-\frac{3}{2},6\right]$



- è suriettiva
- non è iniettiva

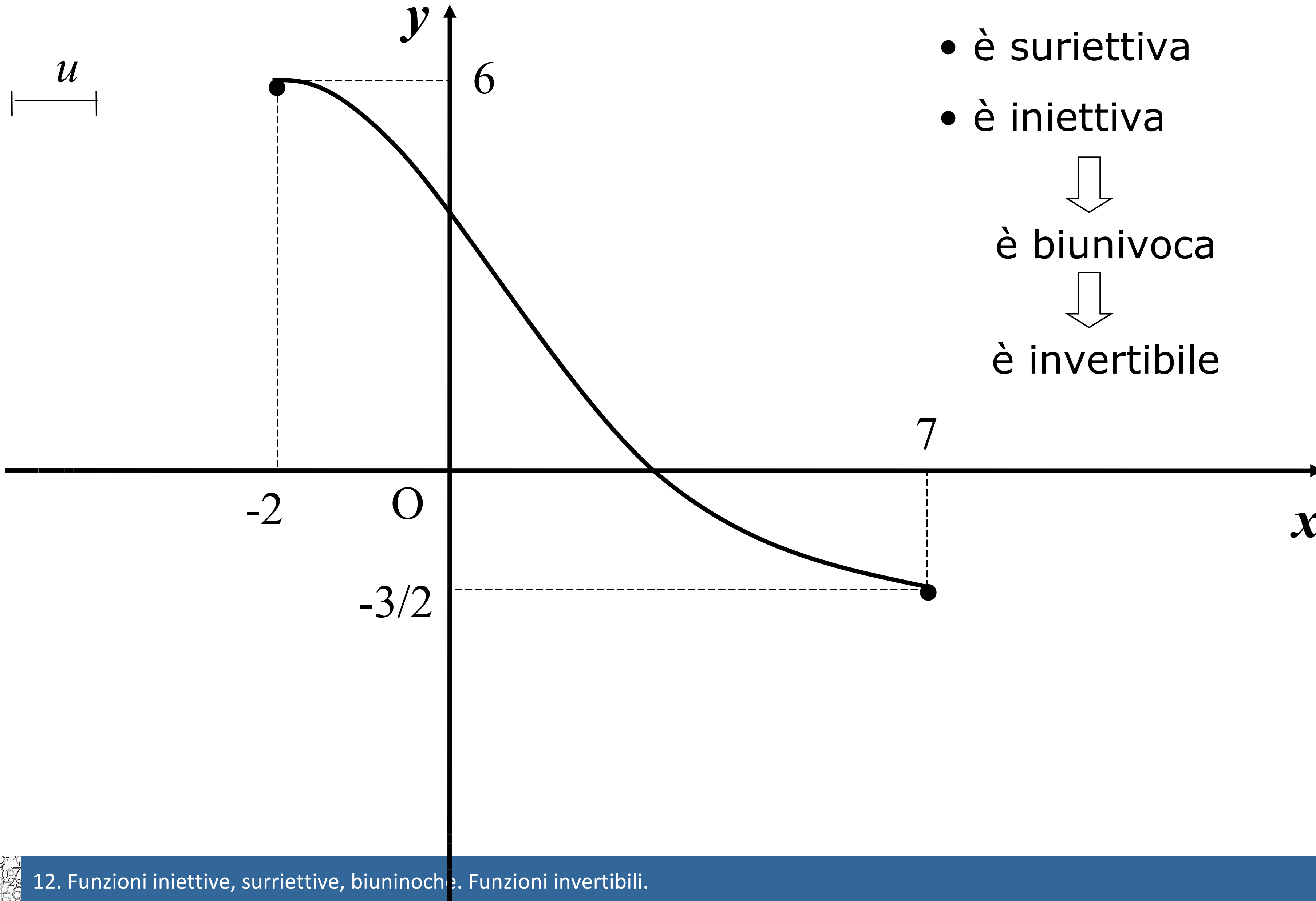
$\Downarrow$

non è biunivoca

$\Downarrow$

non è invertibile

Esercizio: Sia data la funzione $f:[-2,7]\to\left[-\frac{3}{2},6\right]$



- è suriettiva
- è iniettiva

$\Downarrow$

è biunivoca

$\Downarrow$

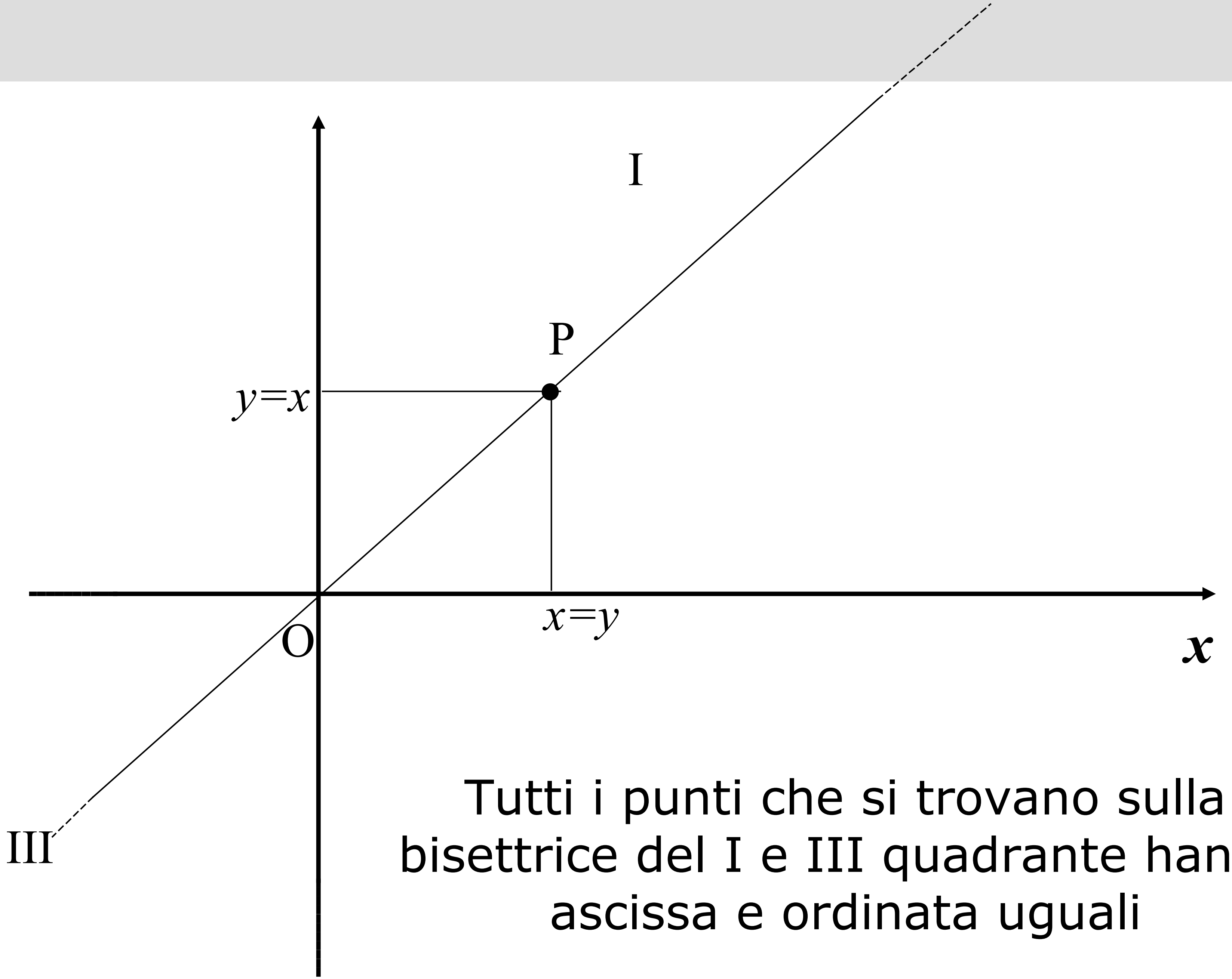
è invertibile

Ma chi è l’inversa $f^{\,-1}$

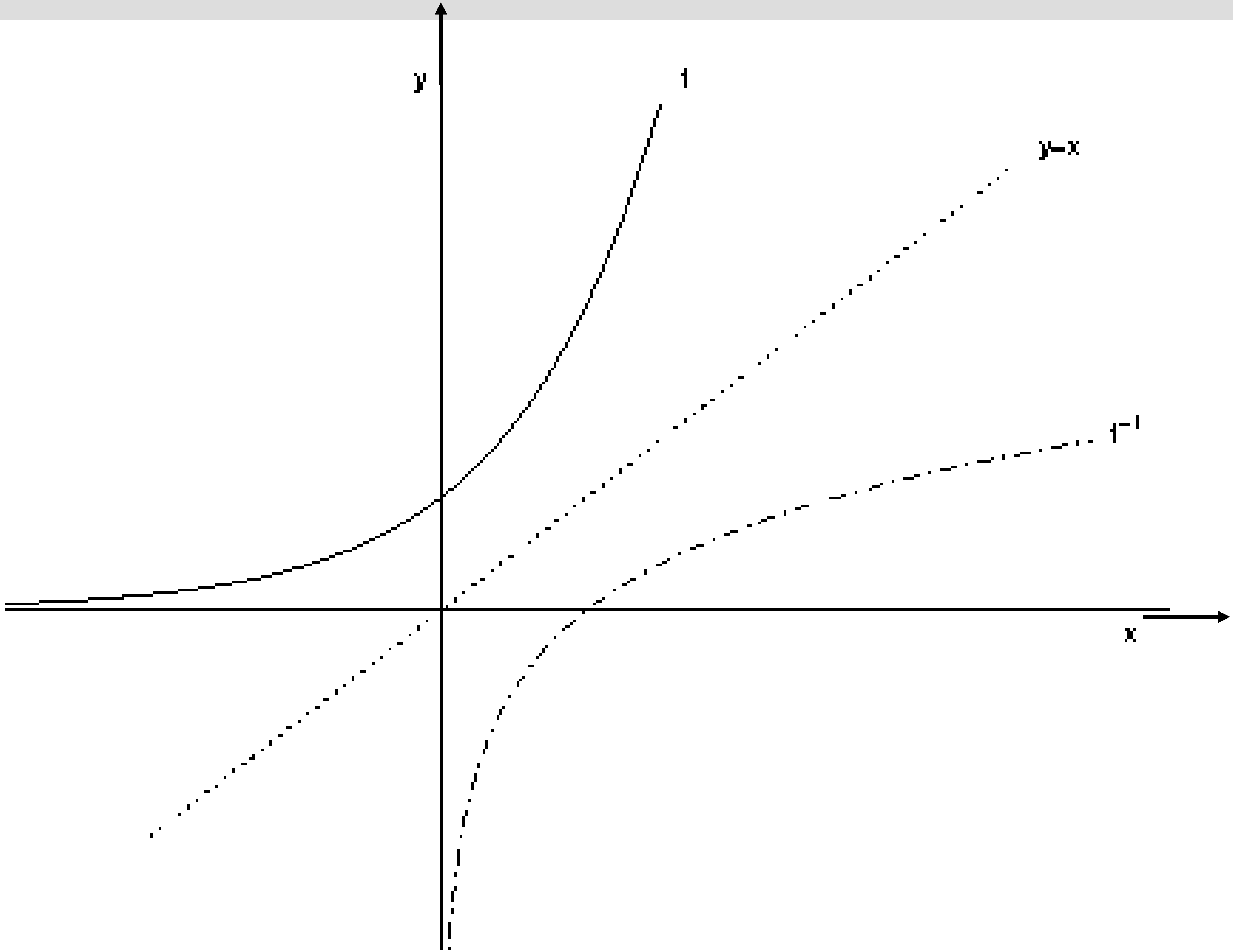
di una funzione invertibile f ?

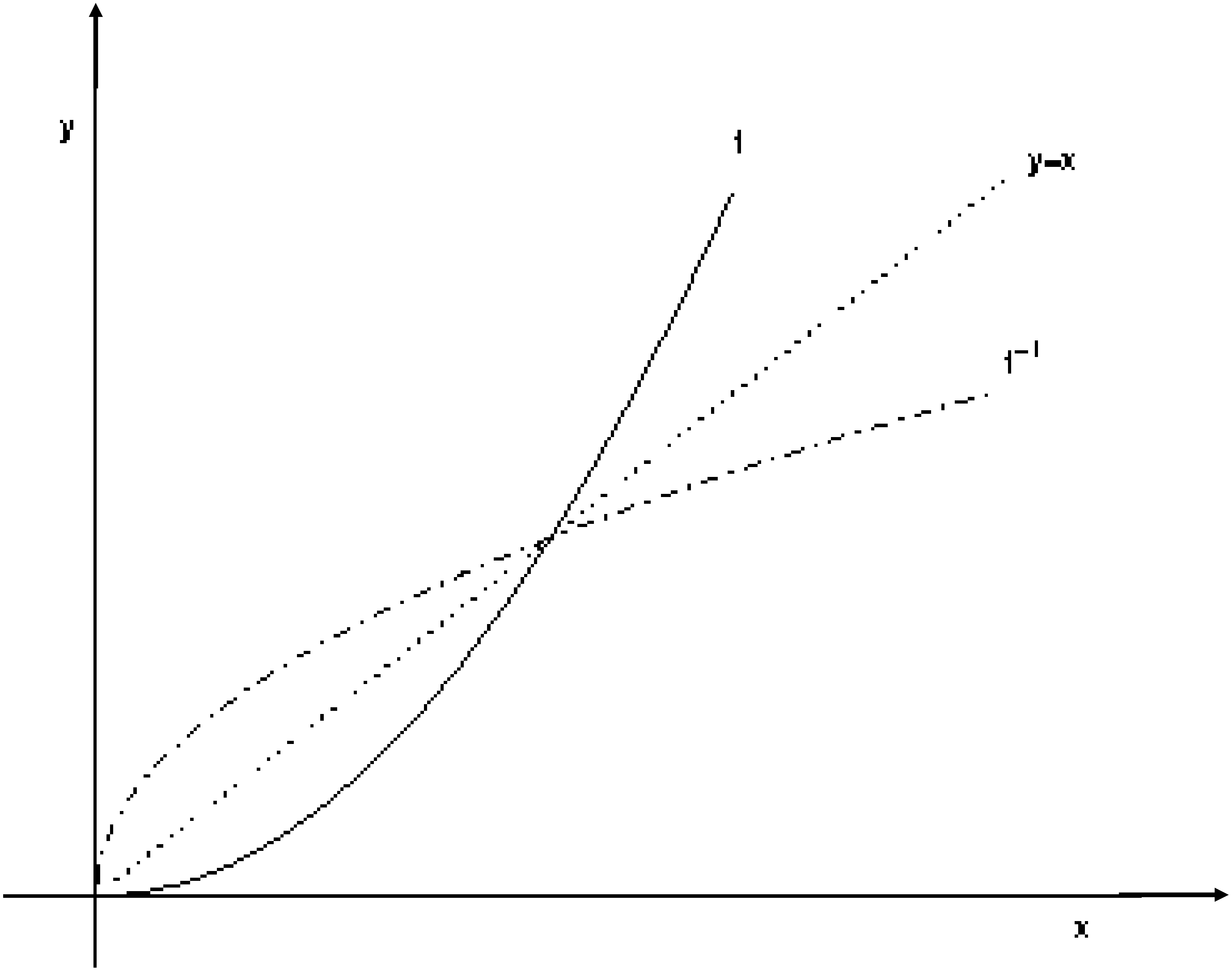
Graficamente, l'inversa f^{-1}

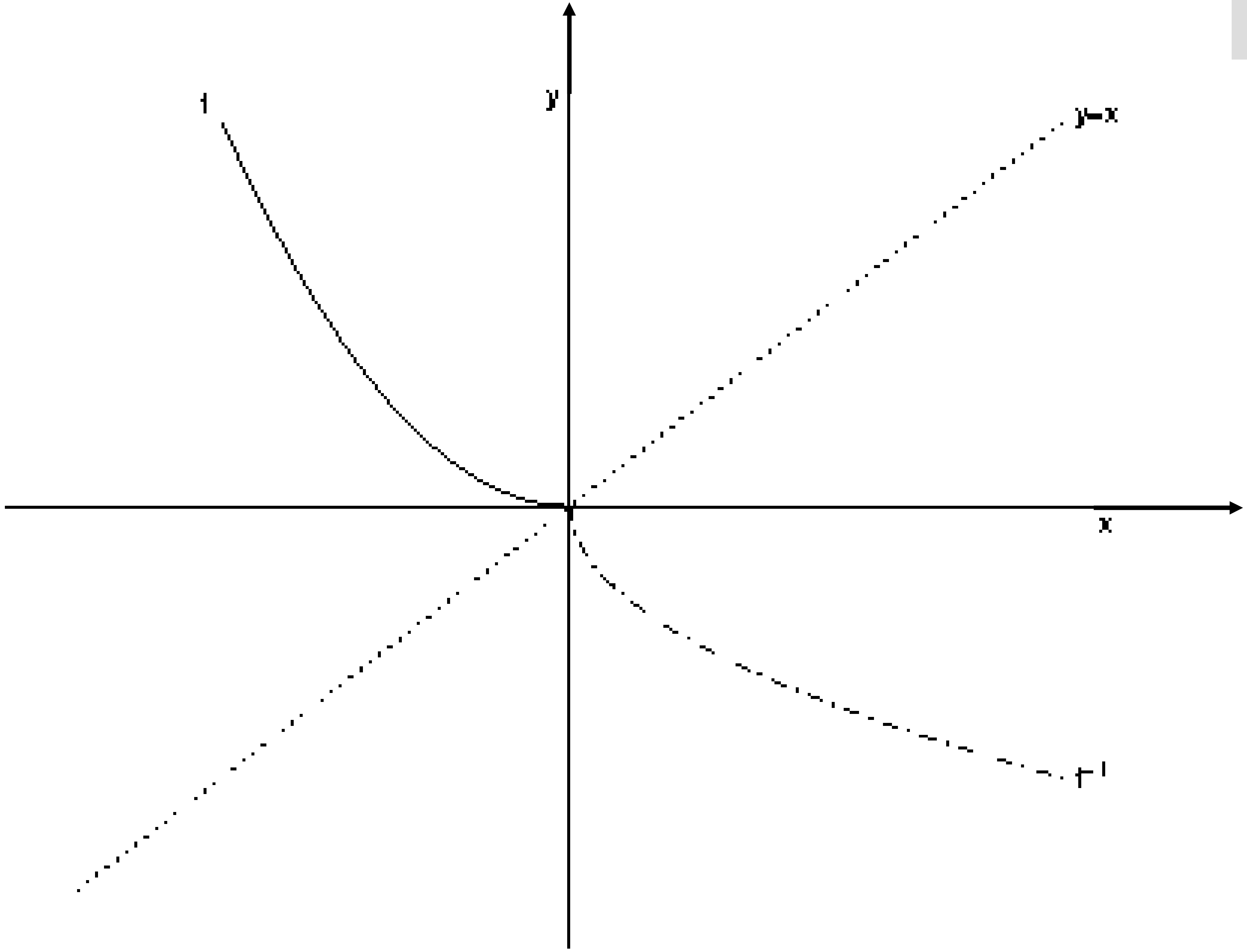
di una funzione invertibile f è una funzione il cui grafico si ricava da quello della f per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante



Tutti i punti che si trovano sulla bisettrice del I e III quadrante hanno ascissa e ordinata uguali


y
f
y=x
f^{-1}
x


y
f
y=x
f⁻¹
x


f
y
y=x
x
f^{-1}

Obiettivo raggiunto → Dedurre le proprietà e le caratteristiche di una funzione a partire dal suo grafico e indipendentemente dalla sua espressione analitica

Obiettivo prossimo → Dedurre le proprietà e le caratteristiche di una funzione a partire dalla sua espressione analitica e tracciarne solo dopo il grafico

Obiettivo prossimo

Dedurre le proprietà e le caratteristiche di una funzione a partire dalla sua espressione analitica e cioè a partire dall'insieme di operazioni matematiche che bisogna applicare alla x per avere la y

$$\Downarrow$$

Una volta dedotte le proprietà e le caratteristiche di una funzione a partire dalla sua espressione analitica, saremo anche in grado di tracciarne il grafico