

# **12. Risoluzione grafica di $f(x)=k$ e $f(x) > k$ Funzioni invertibili**



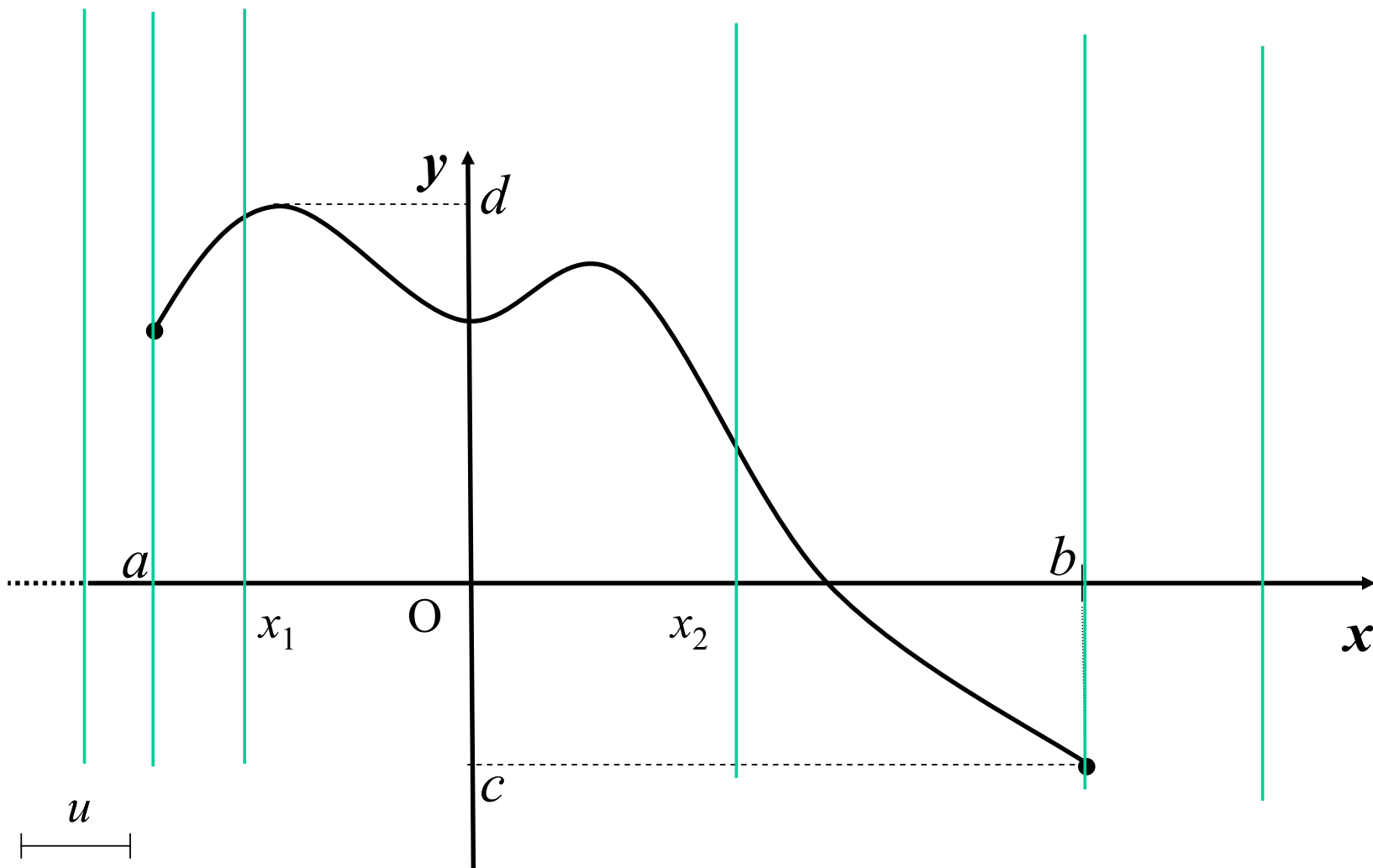
# Indice lezione

- Funzioni reali di variabile reale e grafico
  - Risoluzione grafica di  $f(x) = k$  ed  $f(x) > k$
  - funzioni invertibili



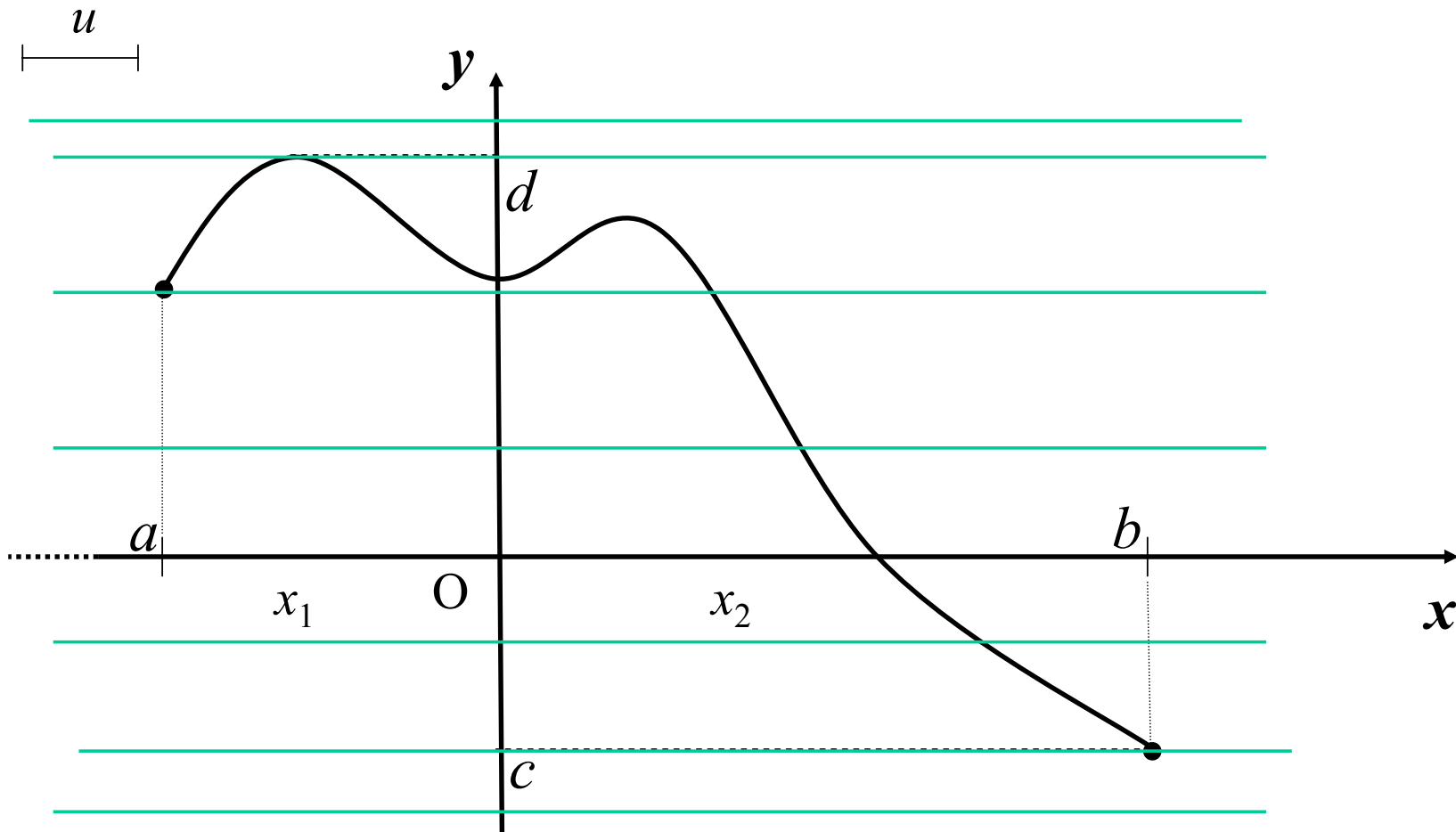
# Grafico di funzioni

Dominio



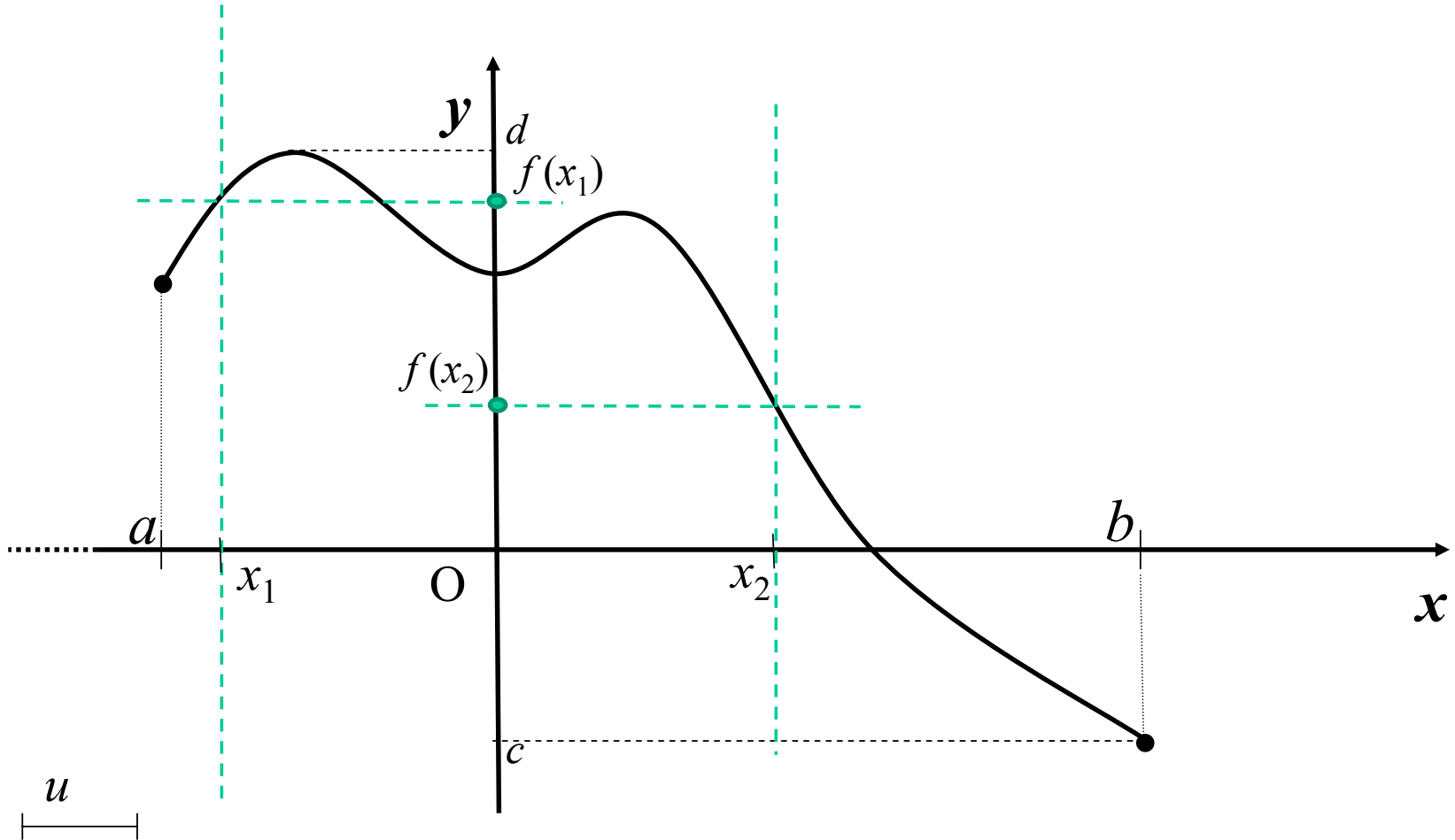
# Grafico di funzioni

Immagine



# Grafico di funzioni

Immagine  $f(x)$  corrispondente ad un valore  $x$  appartenente al dominio



## Risoluzione grafica di $f(x) = k$ ed $f(x) > k$

Assegnata una generica funzione  $f$ , risolvere algebricamente un'equazione o disequazione del tipo

$$f(x) = k \text{ o } f(x) > k, \text{ con } k \in R$$

vuol dire cercare tutti i valori  $x$  che, sostituiti nell'espressione algebrica che esprime la funzione, verificano l'uguaglianza o la disuguaglianza



Assegnato il grafico di una funzione  $f$ , risolvere graficamente un'equazione del tipo

$$f(x) = k$$

vuol dire cercare tutti i valori  $x$  appartenenti al dominio della funzione la cui immagine mediante  $f$  ha valore pari a  $k$

# Risoluzione grafica di

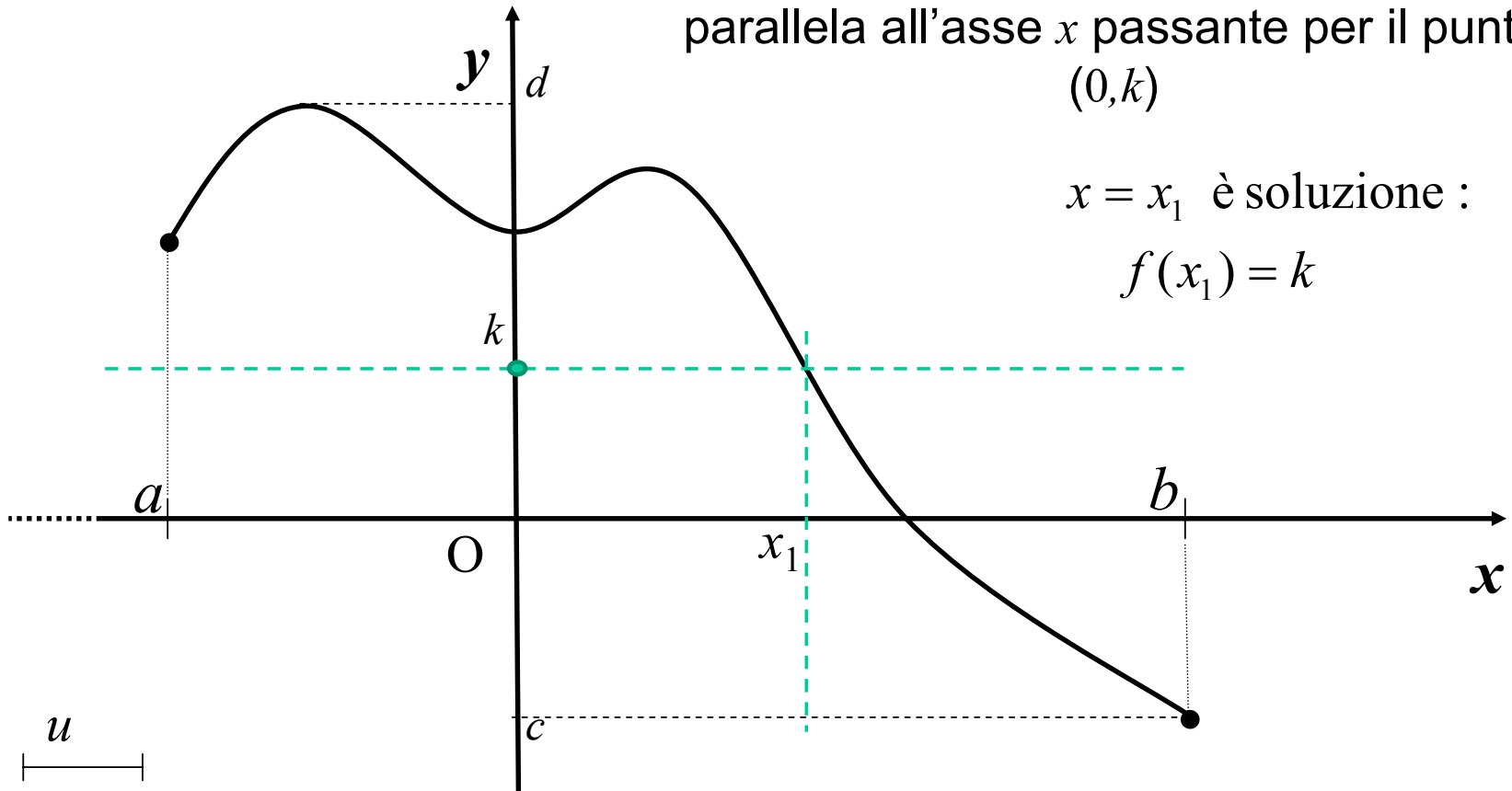
$$f(x) = k$$

Risolvere graficamente l'equazione  $f(x) = k$  con  $k \in \mathbb{R}$ :

Si considera sull'asse  $y$  il punto corrispondente al  $k$  e si traccia la retta parallela all'asse  $x$  passante per il punto  $(0, k)$

$x = x_1$  è soluzione :

$$f(x_1) = k$$

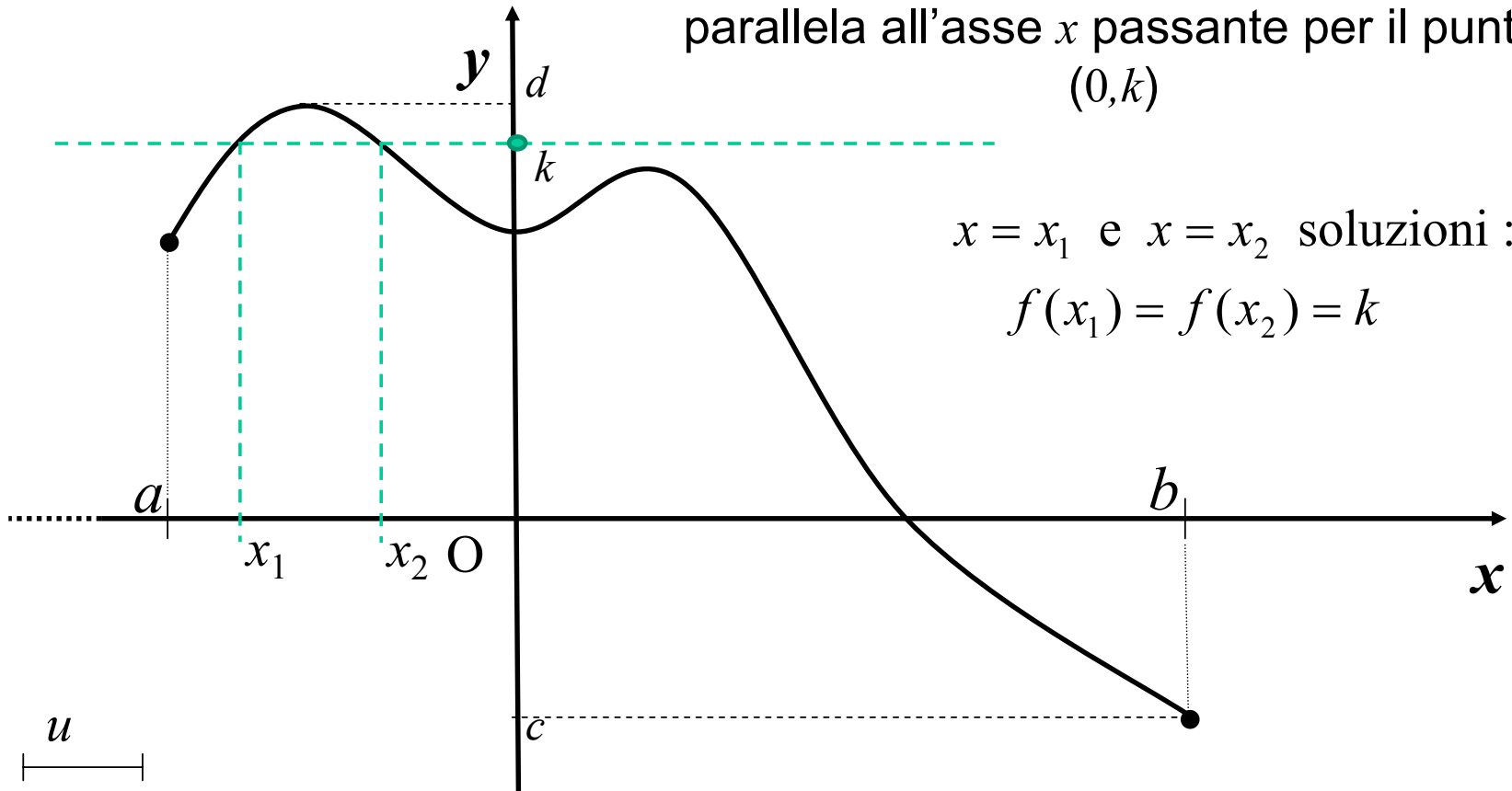


# Risoluzione grafica di

$$f(x) = k$$

Risolvere graficamente l'equazione  $f(x) = k$  con  $k \in R$ :

Si considera sull'asse  $y$  il punto corrispondente al  $k$  e si traccia la retta parallela all'asse  $x$  passante per il punto  $(0, k)$



# Risoluzione grafica di

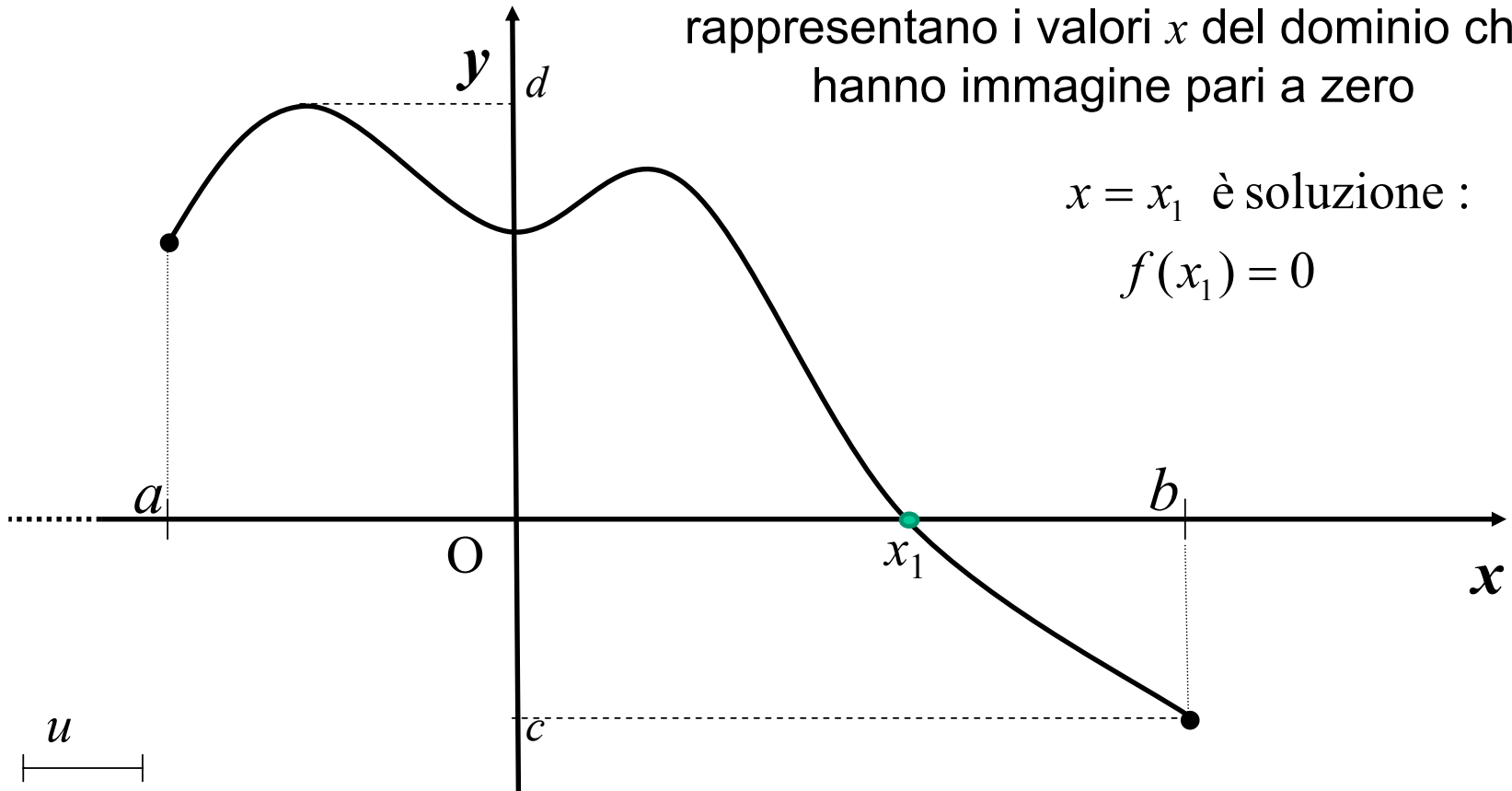
$$f(x) = k$$

Risolvere graficamente l'equazione  $f(x) = 0$ , ( $k = 0$ ):

Si considerano i punti di intersezione tra il grafico di  $f$  e l'asse  $x$ . Tali punti rappresentano i valori  $x$  del dominio che hanno immagine pari a zero

$x = x_1$  è soluzione :

$$f(x_1) = 0$$



# Risoluzione grafica di

$$f(x) > k$$

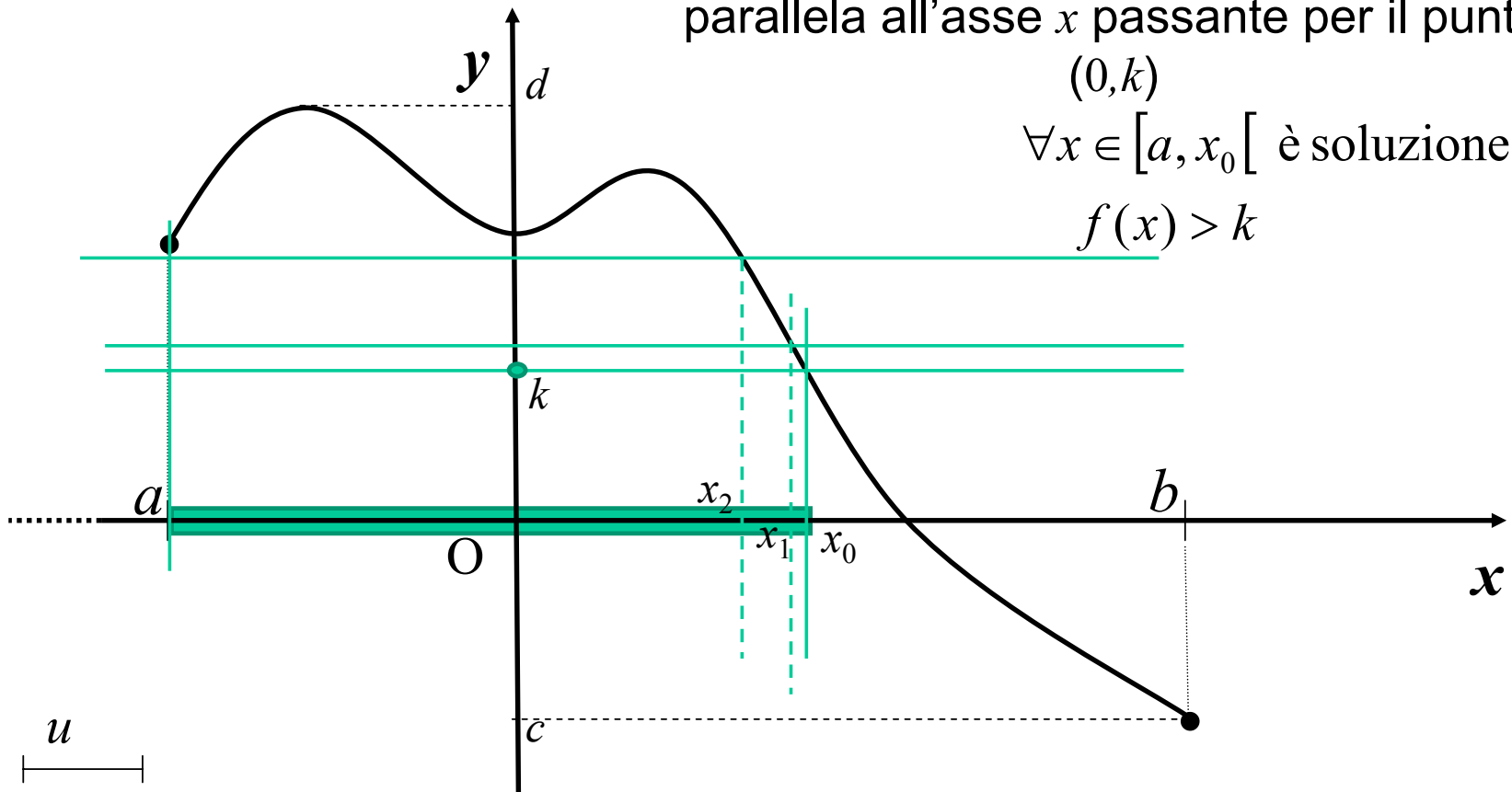
Risolvere graficamente l'equazione  $f(x) > k$  con  $k \in R$ :

Si considera sull'asse  $y$  il punto corrispondente al  $k$  e si traccia la retta parallela all'asse  $x$  passante per il punto

$$(0, k)$$

$\forall x \in [a, x_0[$  è soluzione :

$$f(x) > k$$



# Funzione invertibile: definizione

Def. Assegnata una funzione

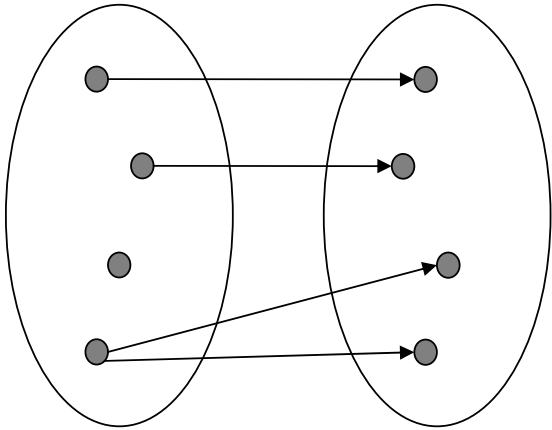
$$f: A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \neq \emptyset$$

$f$  si dice **invertibile**, se per ogni  $y \in f(A)$  esiste uno ed un solo  $x \in A$  tale che  $f(x)=y$

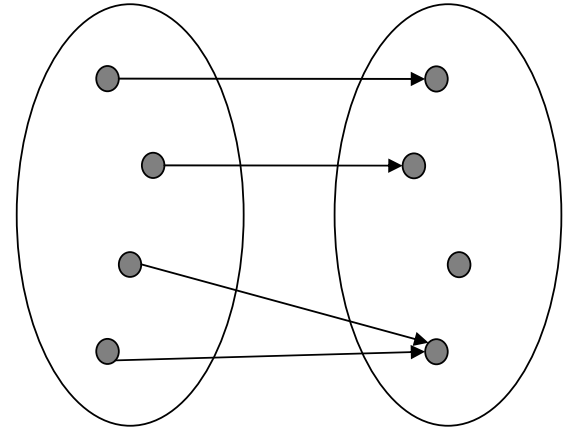
La funzione che associa a ogni  $y$  l'unico  $x$  tale che  $f(x)=y$  si chiama **funzione inversa** di  $f$  e si indica con il simbolo  $f^{-1}$



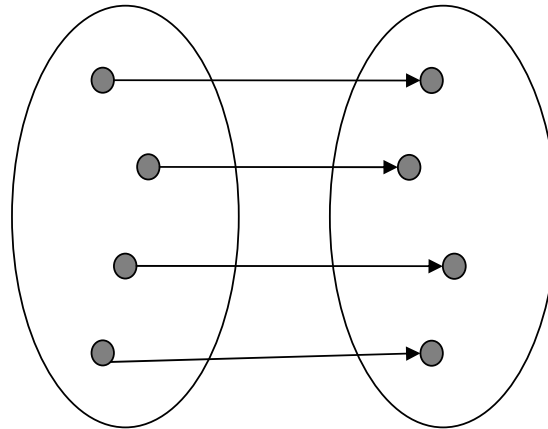
# Funzione invertibile: insiemi



non e' una funzione



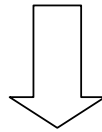
e' una funzione



e' una funzione  
invertibile

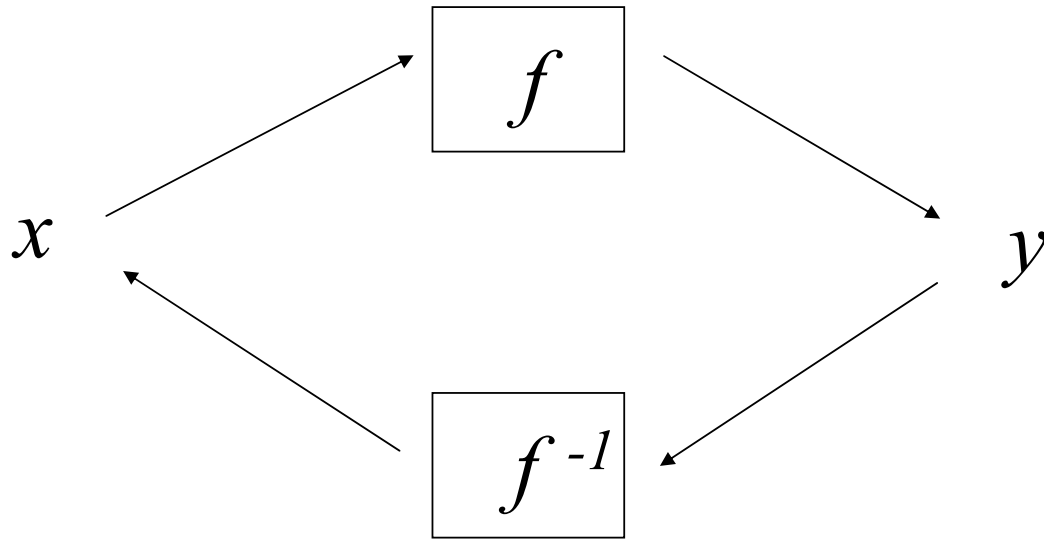
# Funzione invertibile: costruzione

Ma che vuol dire praticamente che una funzione  $f$  è invertibile?



vuol dire che a partire dalla funzione  $f$  è possibile costruire una nuova funzione che procede a ritroso rispetto ad  $f$

# Funzione invertibile: costruzione



$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A$$
$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in f(A)$$

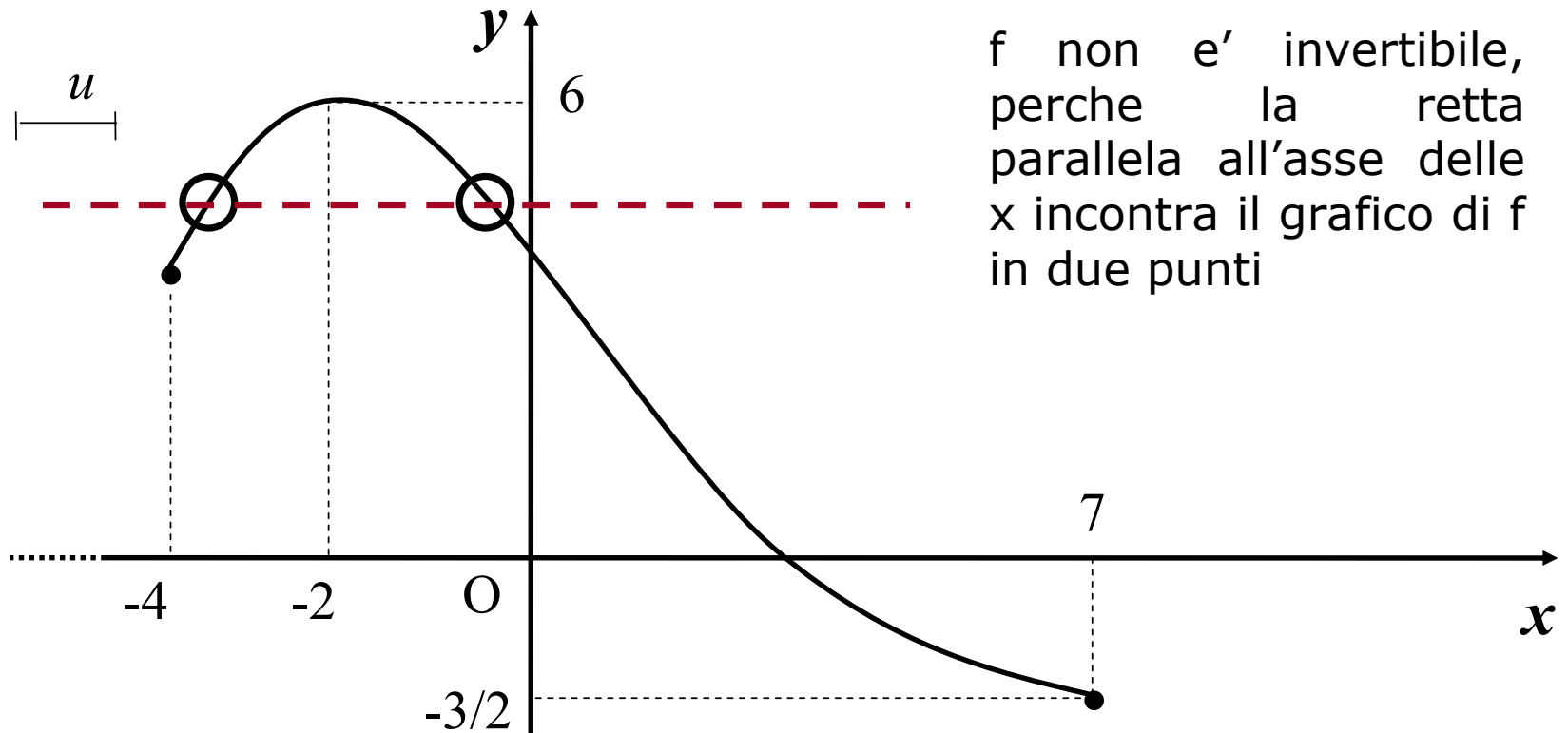
# Funzione invertibile: graficamente

E graficamente?

$f$  e' invertibile se il grafico di  $f$  e' intersecato al massimo in un punto da ogni retta parallela all'asse delle  $x$

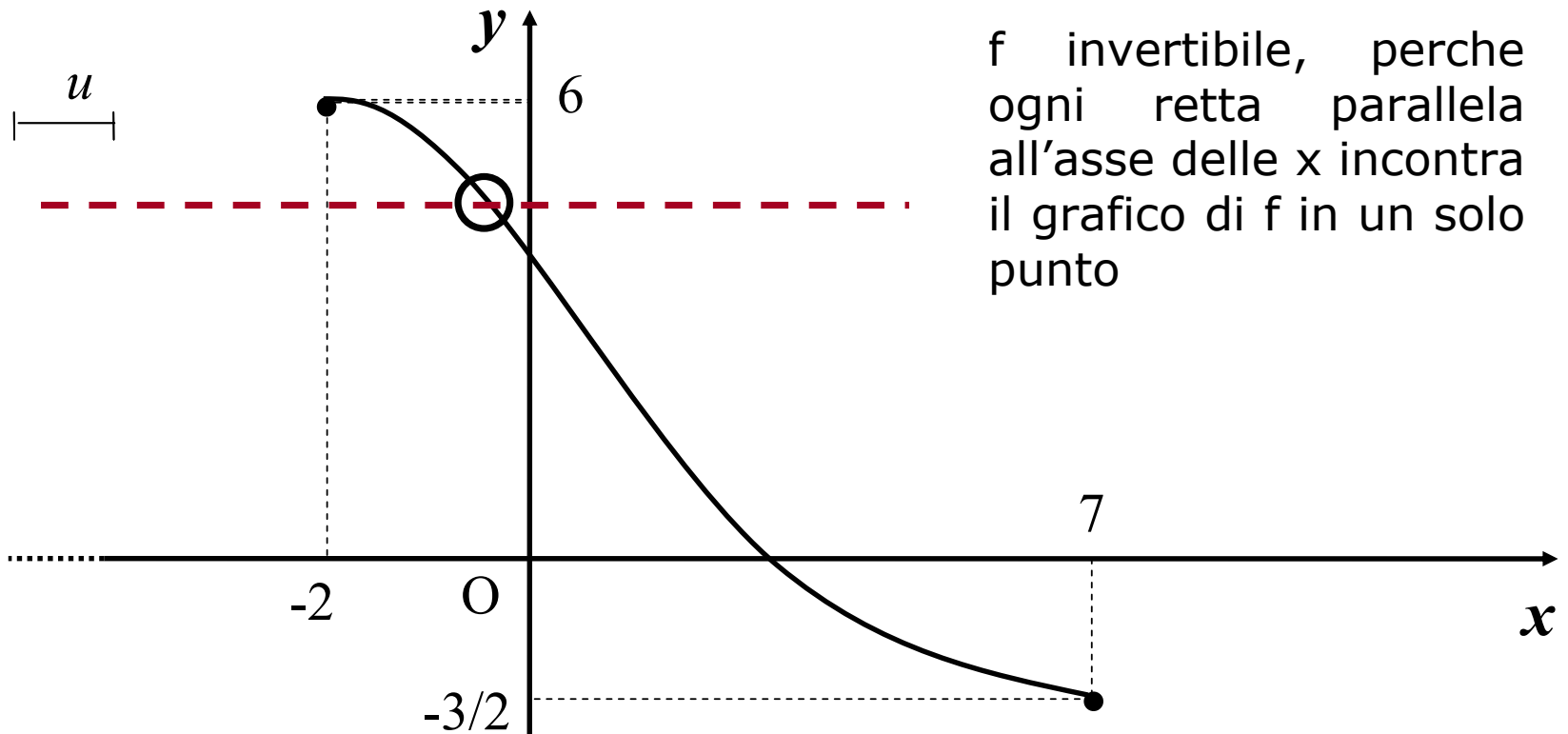


# Funzione invertibile?



$f$  non è invertibile, perché la retta parallela all'asse delle  $x$  incontra il grafico di  $f$  in due punti

# Funzione invertibile?



$f$  invertibile, perché ogni retta parallela all'asse delle  $x$  incontra il grafico di  $f$  in un solo punto

# Funzione invertibile: osservazione

Assegnata una funzione

$$f: A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \neq \emptyset$$

Se  $f$  e' strettamente monotona (crescente o decrescente) allora  $f$  e' invertibile

# Funzione invertibile: costruzione grafica

Ma chi è l'inversa  $f^{-1}$

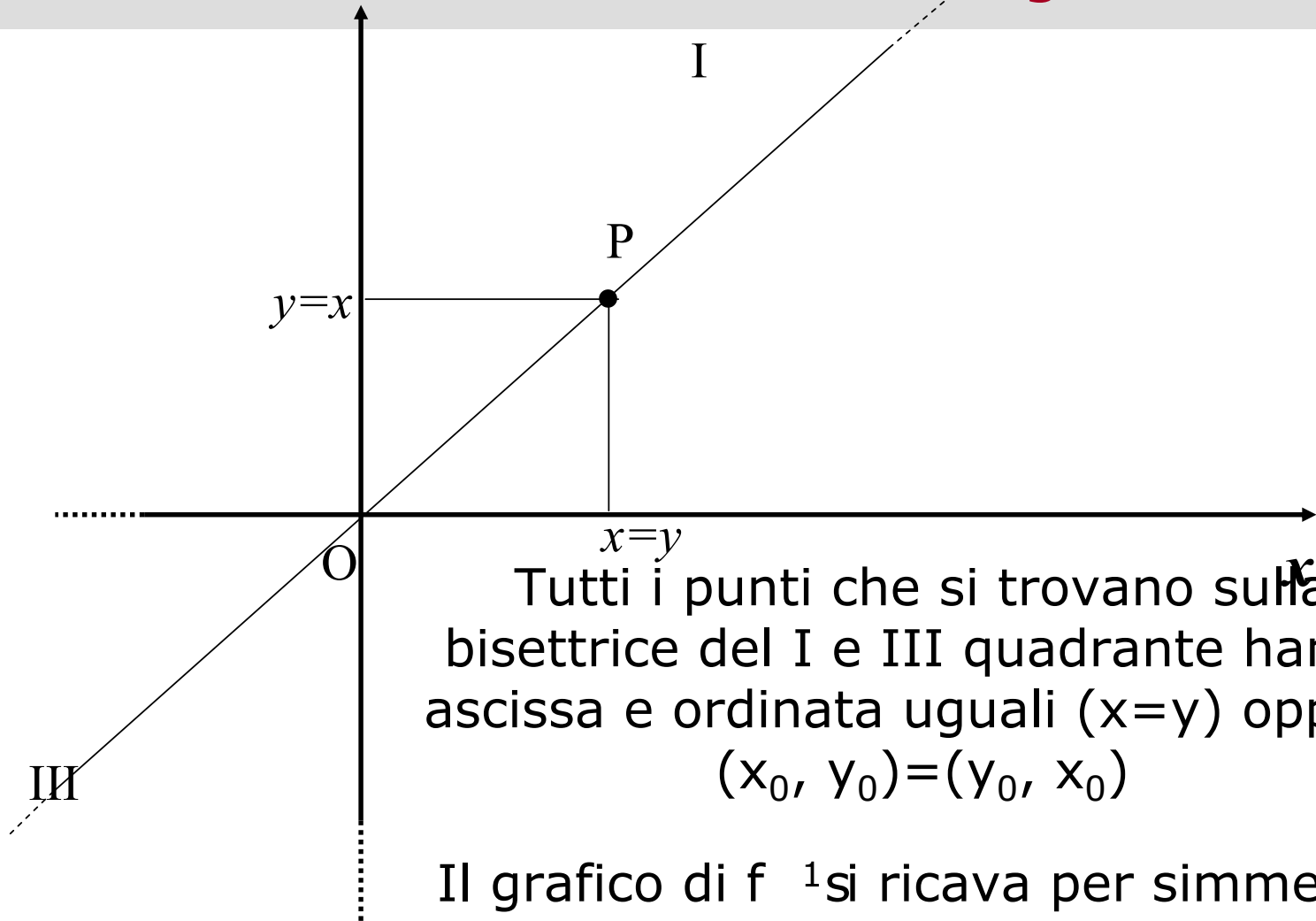
di una funzione invertibile  $f$  ?

Graficamente, l'inversa  $f^{-1}$

di una funzione invertibile  $f$  è una  
funzione il cui grafico si ricava da  
quello della  $f$  per simmetria rispetto  
alla bisettrice del I e III quadrante



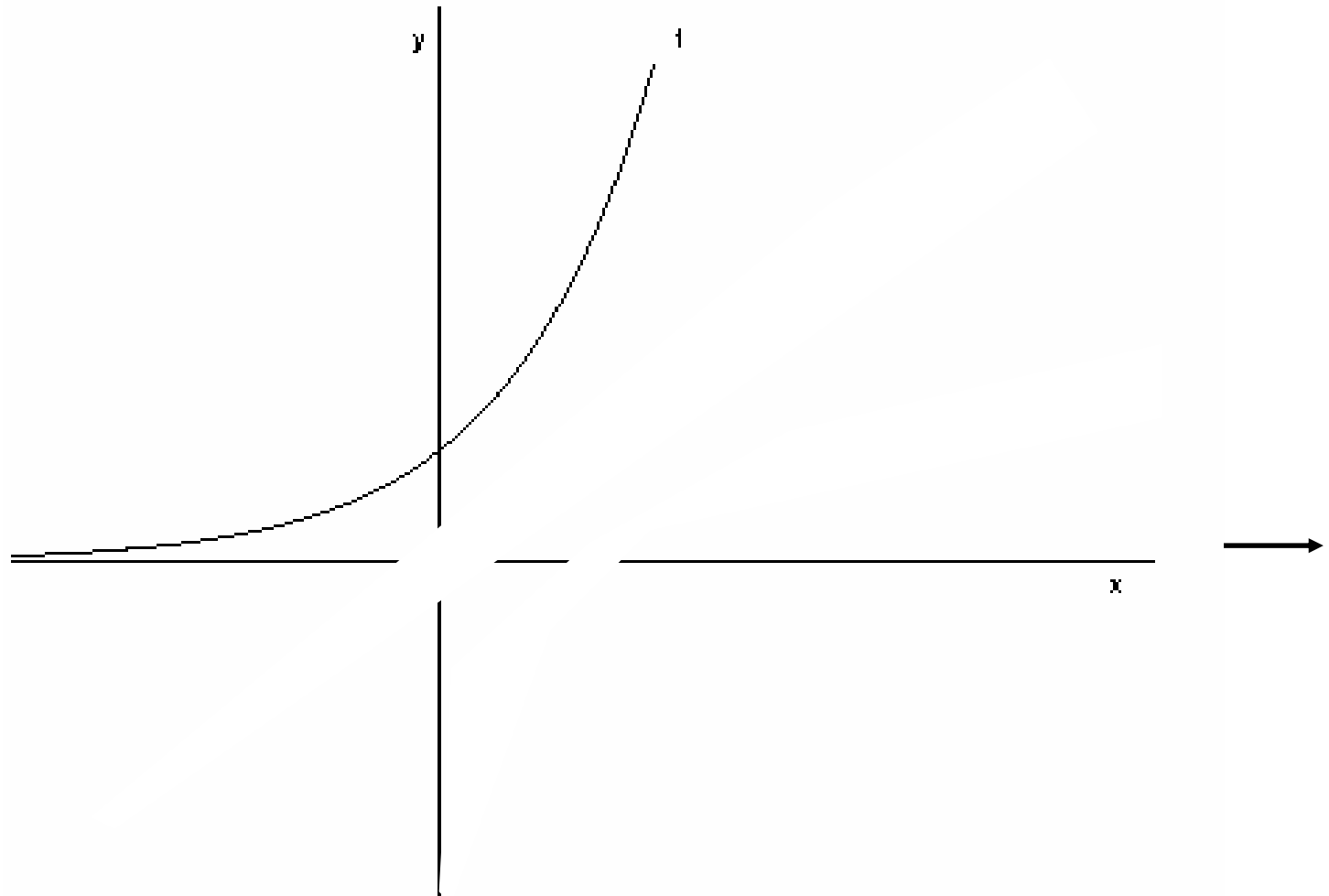
# Funzione invertibile: costruzione grafica



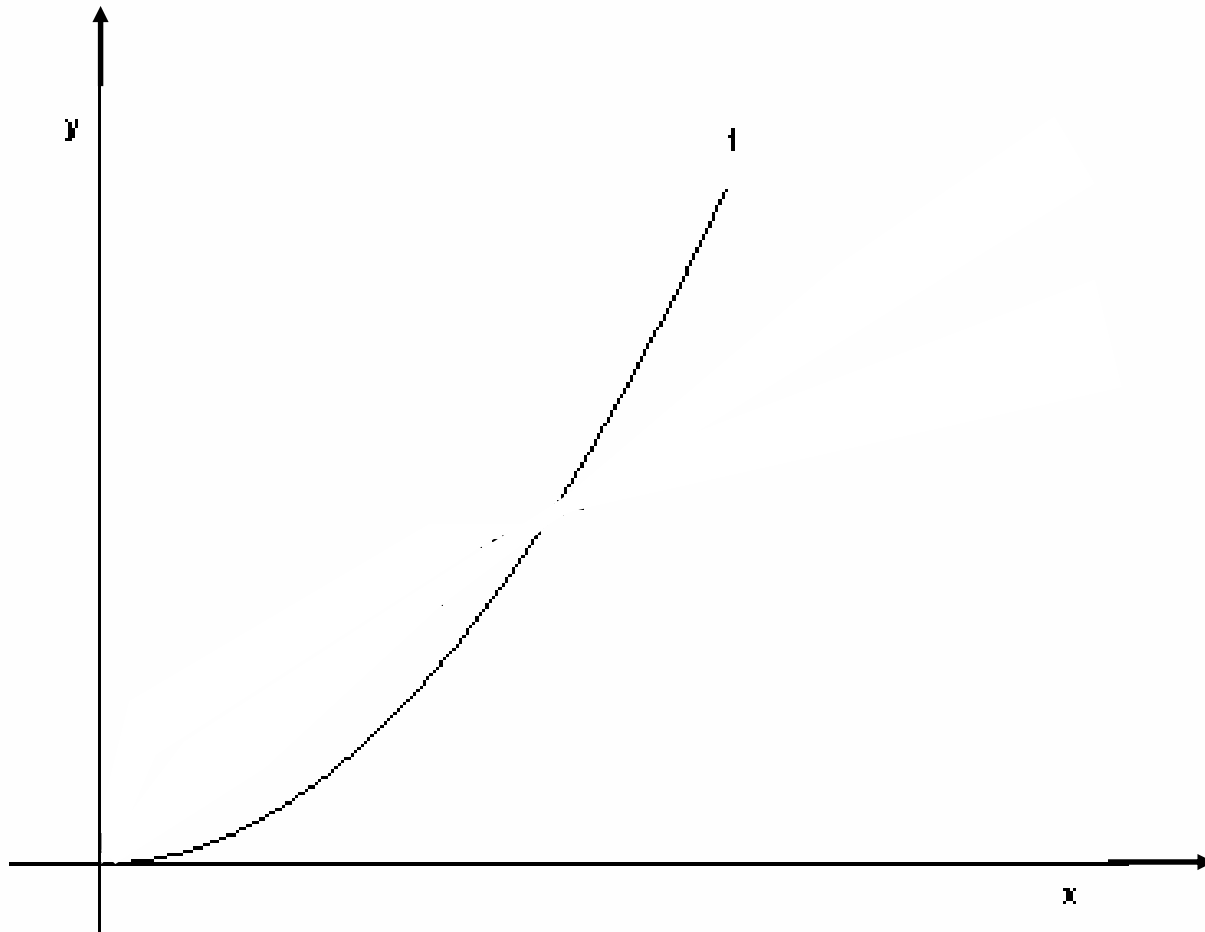
Tutti i punti che si trovano sulla bisettrice del I e III quadrante hanno ascissa e ordinata uguali ( $x=y$ ) oppure  $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$

Il grafico di  $f^{-1}$  si ricava per simmetria rispetto alla bisettrice  $y=x$

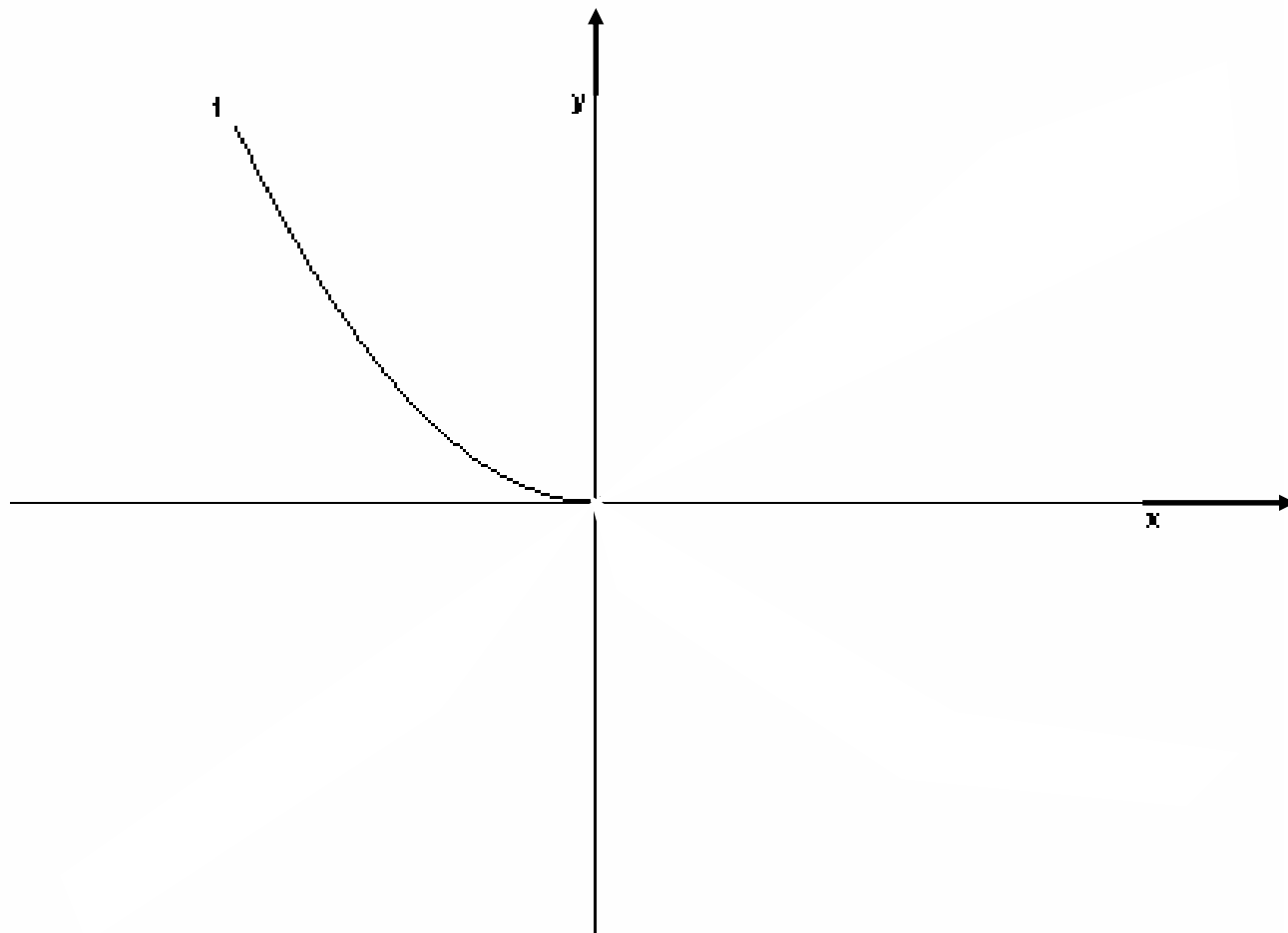
# Funzione invertibile: esempi



# Funzione invertibile: esempi



# Funzione invertibile: esempi



**Obiettivo raggiunto** →

Dedurre le proprietà e le caratteristiche di una funzione a partire dal suo grafico e indipendentemente dalla sua espressione analitica

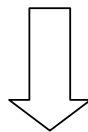
**Obiettivo prossimo** →

Dedurre le proprietà e le caratteristiche di una funzione a partire dalla sua espressione analitica e tracciarne solo dopo il grafico



## Obiettivo prossimo

Dedurre le proprietà e le caratteristiche di una funzione a partire dalla sua espressione analitica e cioè a partire dall'insieme di operazioni matematiche che bisogna applicare alla  $x$  per avere la  $y$



Una volta dedotte le proprietà e le caratteristiche di una funzione a partire dalla sua espressione analitica, saremo anche in grado di tracciarne il grafico