Funzioni elementari.
Funzioni lineari.

Funzioni elementari

Per potere determinare le proprietà e quindi il grafico di una qualsiasi funzione a partire dalla sua espressione analitica, dobbiamo prima di tutto studiare le proprietà delle

funzioni elementari

La maniera più efficace per ricordare tutte le proprietà di una funzione elementare è certamente quella di ricordarne il grafico, che sintetizza tutte le proprietà della funzione (dominio, immagine, invertibilità, monotonia)

Funzioni elementari

Per potere determinare le proprietà e quindi il grafico di una qualsiasi funzione a partire dalla sua espressione analitica, dobbiamo prima di tutto studiare le proprietà delle

funzioni elementari

La maniera più efficace per ricordare tutte le proprietà di una funzione elementare è certamente quella di <u>ricordarne il grafico</u>, che sintetizza tutte le proprietà della funzione (dominio, immagine, invertibilità, monotonia)

Funzione lineare

Una funzione espressa dalla legge generale

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in R$$

$$f : x \in R \to (ax + b) \in R$$

e' una **FUNZIONE LINEARE**

a viene detto coefficiente angolare

b viene detto termine noto

Ogni funzione lineare ha per grafico una retta

Esempio: pianificare un esperimento

Pianificare in anticipo il costo di un esperimento.

1. Indichiamo con C(t) le spese sostenute al tempo t.

2. Supponiamo che il costo di tutte le attrezzature e del materiale iniziale necessario alla preparazione dell'esperimento sia noto e pari a $C(t=0)=C_0$.

3. Il modello piu semplice che possiamo formulare e' che il costo complessivo C(t) aumenti proporzionalmente al passare del tempo (spese di manodopera, materiale, affitto).

La legge che lega C a t e' la funzione lineare

$$C(t) = kt + C_0$$

ESERCIZIO: pianificare un esperimento

Supponiamo che t sia misurato in mesi,

C in migliaia di euro,

C_0 sia uguale a 5 (migliaia di euro) e

k=15.

Se il budget a disposizione e' C=50 mila euro per quanto tempo possiamo svolgere il nostro esperimento?

$$C(t) = kt + C_0 \quad => \frac{C(t) - C_0}{k} = t \quad => \frac{50 - 5}{15} = t$$

t=3 mesi

Gradi Celsius e Fahrenheit

Gradi Celsius (C) : la scala è definita attraverso i punti di ebollizione e di congelamento dell'acqua

Gradi Fahrenheit (F) la scala è definita ponendo a 32°F la temperatura di congelamento e a 212°F quella di ebollizione

$$°F=32+1.8\ °C$$

Altri esempi (modelli)

- Temperatura di denaturazione (processo di divisione dei due filamenti) della molecola di DNA

- Moto rettilineo uniforme $x(t)=x_0+vt$

- Curva di crescita dei neonati

- Tasso di dilatazione termica dei materiali (binari dei treni)

b nel modello lineare

La funzione lineare e' caratterizzata dalle due costanti a e b: comprendiamo meglio il significato geometrico.

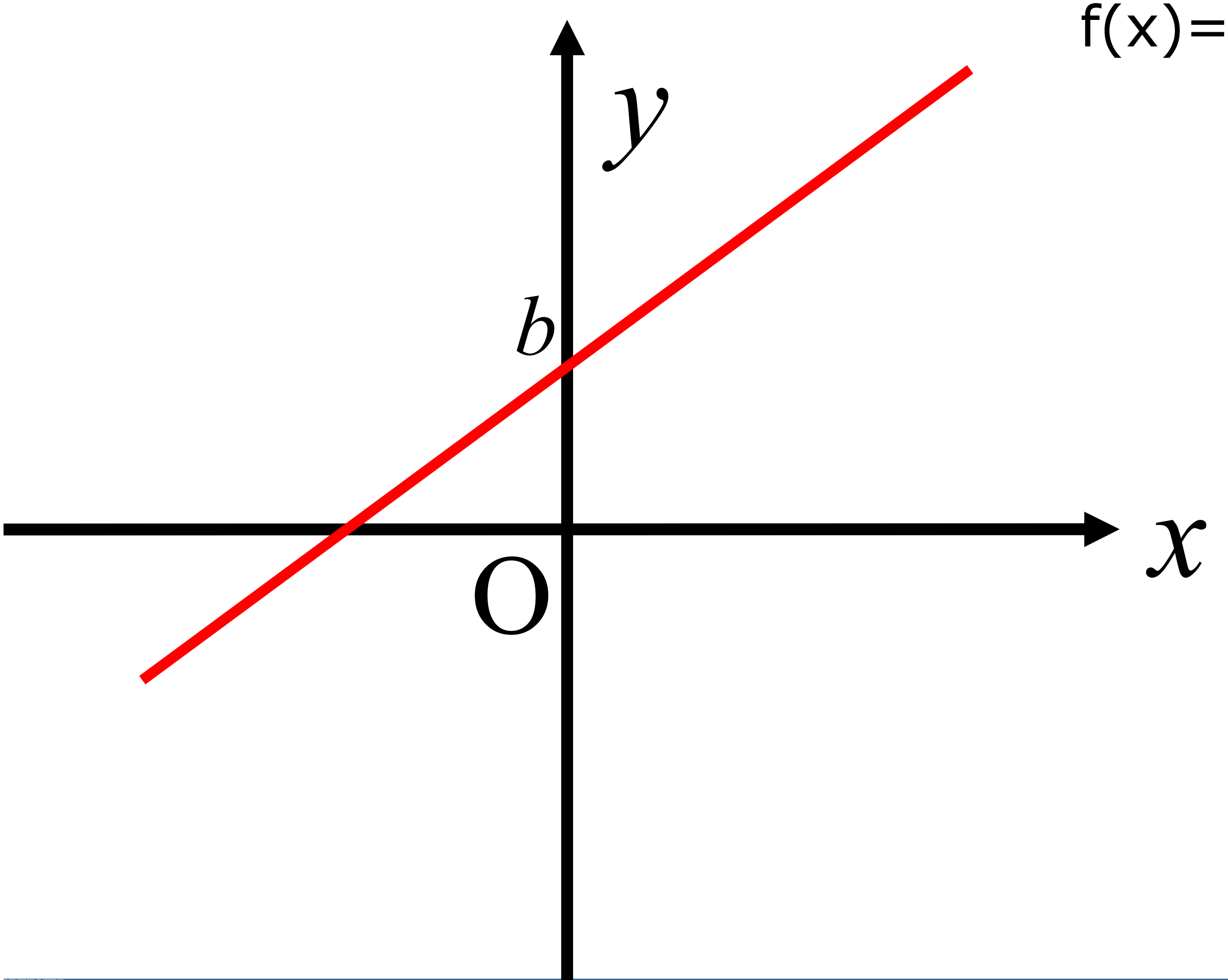
Se $x=0 \rightarrow y=b$, e quindi il punto $P(0,b)$ che si trova sull'asse verticale della y, appartiene al grafico della funzione.

Il termine noto b e' l'ordinata dell'intersezione del grafico della funzione con l'asse y e prende il nome di INTERCETTA

Nel caso in cui la variabile indipendente e' il tempo, e la legge quindi e' $f(t)=at+b$, il coefficiente $b=f(0)$ si chiama VALORE INIZIALE

Termine noto b

f(x)=ax+b



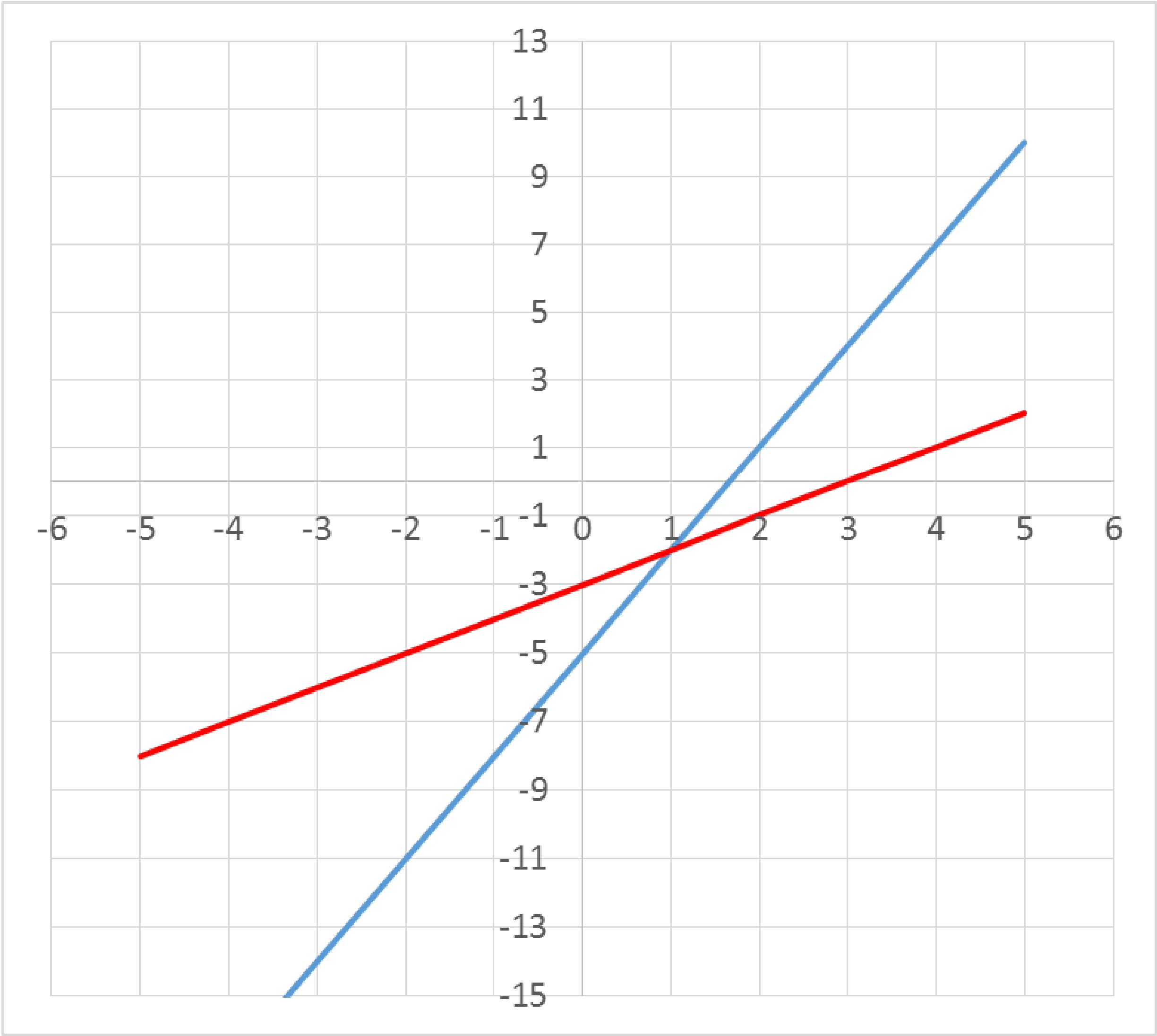
a nel modello lineare

Data la funzione f(x)=ax+b, il coefficiente a rappresenta la VARIAZIONE delle ordinate di due punti qualunque del grafico rispetto alla corrispondente variazione delle ascisse

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Il coefficiente a quantifica l'inclinazione della retta rispetto all'asse orizzontale

Calcolare a delle due rette



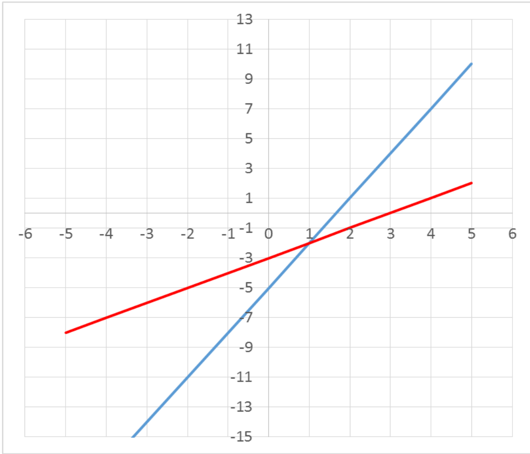
Calcolare a delle due rette

Per ogni retta prendo 2 punti

A(3,4) e B(4,7)

AA(4,1) e BB(5,2)

E calcolo il relativo a usando la formula



$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Della retta azzurra a=(7-4)/(4-3)=3

Della retta blu a=(2-1)/(5-4)=1

a nel modello lineare

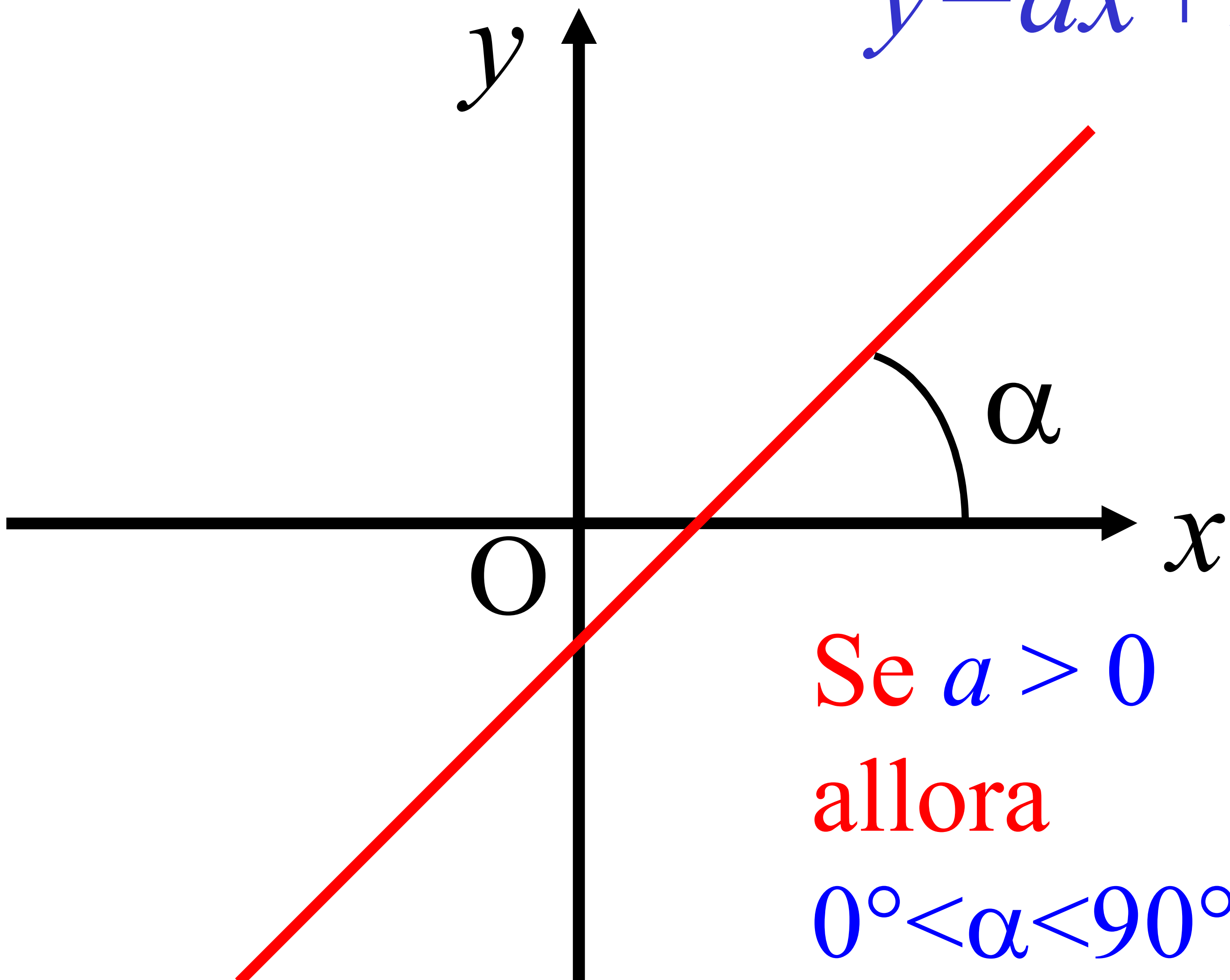
Il coefficiente a prende il nome di COEFFICIENTE ANGOLARE della retta e vale

$$a = \tan \alpha$$

dove α e' l'angolo che la retta forma con l'asse orizzontale, misurato in senso antiorario

Coefficiente angolare

$y = ax + b$

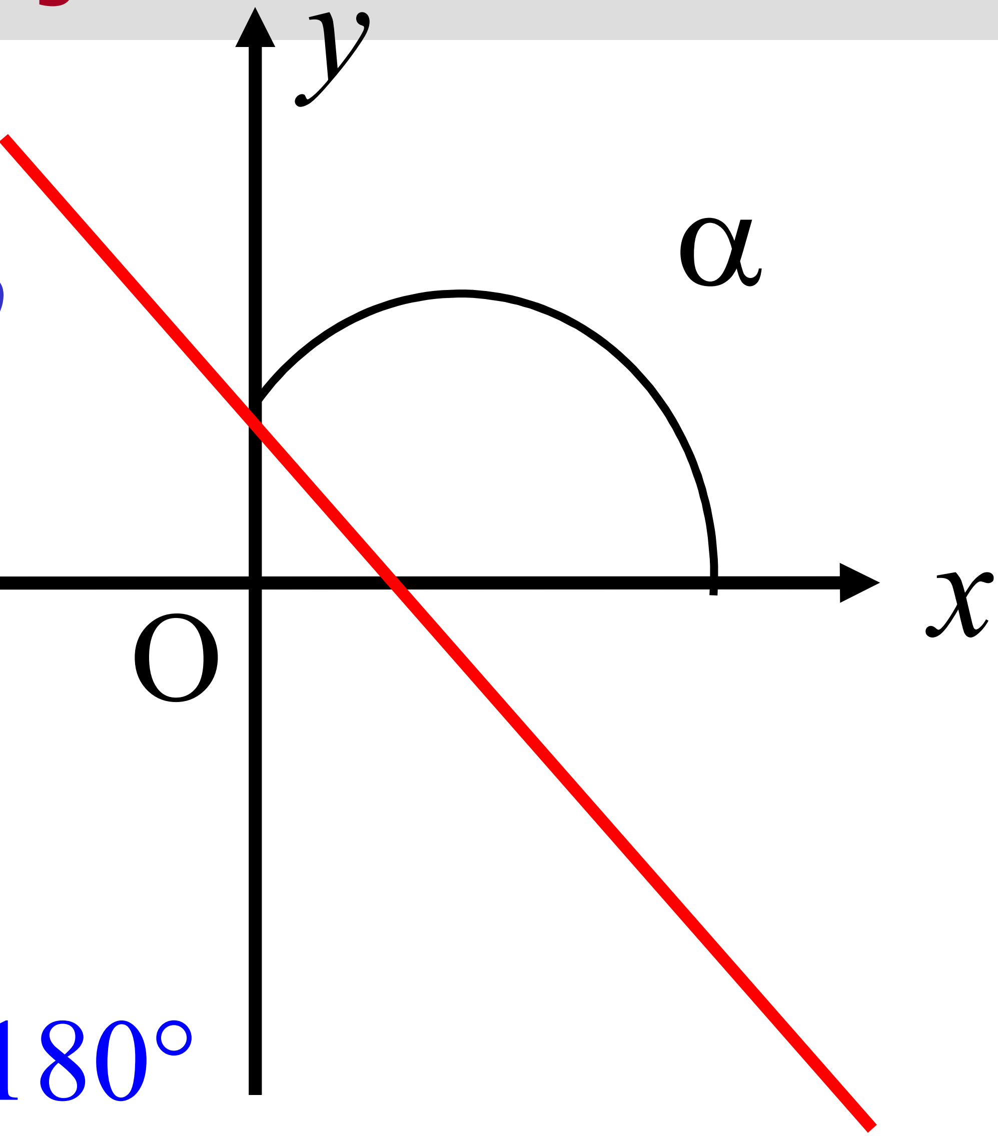


Se $a > 0$ allora

$0° < \alpha < 90°$

Coefficiente angolare

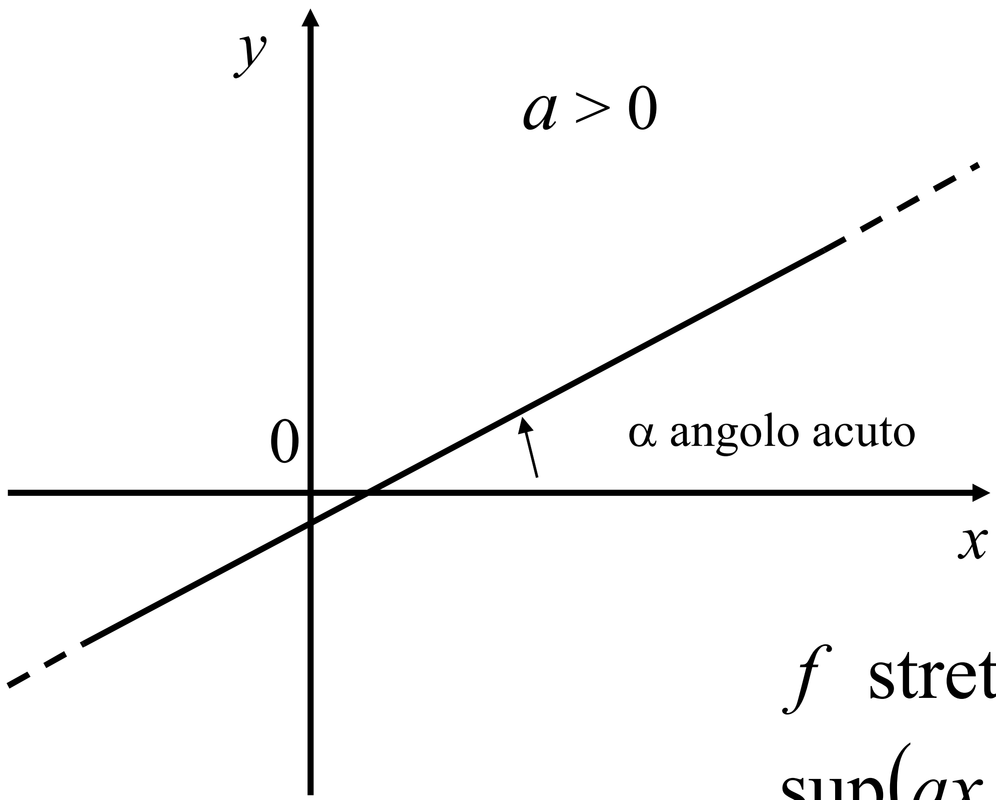
$y = ax + b$



Se $a<0$
allora
$90° < \alpha < 180°$

Funzione lineare a>0

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in R$$

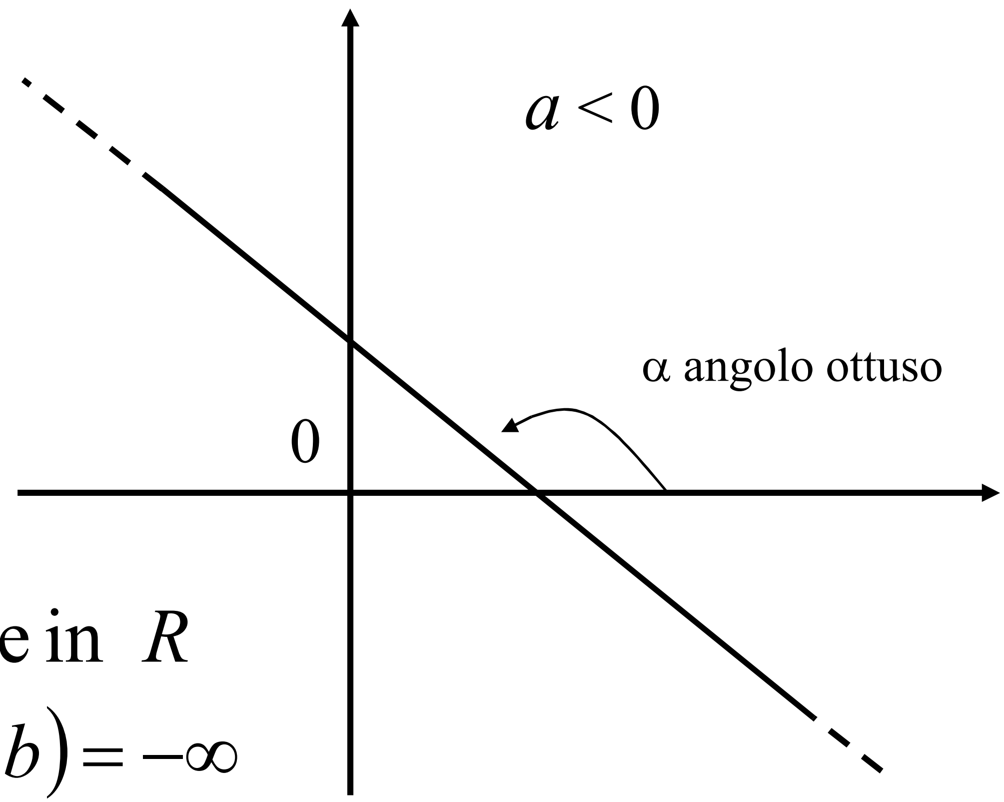


f strettamente crescente in R

$$\sup(ax+b) = +\infty; \inf(ax+b) = -\infty$$

Funzione lineare m<0

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in R$$

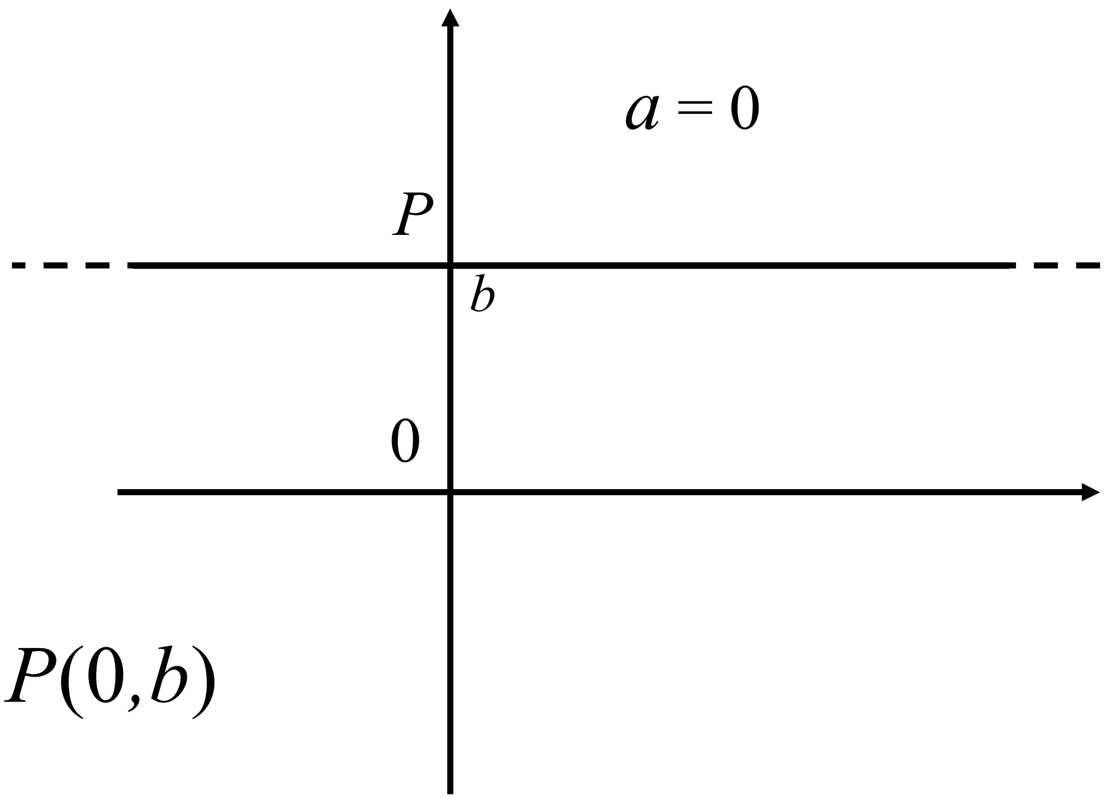


f strettamente decrescente in R

$$\sup(ax+b) = +\infty; \inf(ax+b) = -\infty$$

Funzione lineare a=0

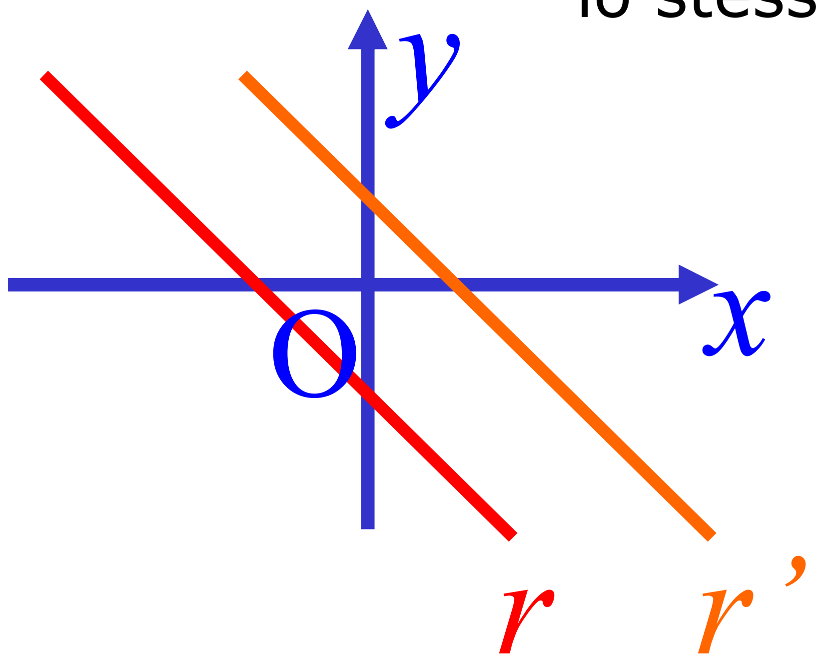
$$f(x) = b, \quad b \in R$$



f costante in R per $P(0,b)$

Condizione di parallelismo

Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare



$$r: y = mx + q$$

$$r': y = m'x + q'$$

$$r \,//\, r' \Leftrightarrow m = m'$$

Equazioni della generica retta

Esercizio 3. Verificare se il punto P = $(1;\ 4)$ appartiene alla retta r di equazione

$$y = 3x + 1$$

Soluzione. Se il punto P appartiene alla retta r, le sue coordinate verificano l'equazione di r.

Andiamo perciò a sostituire le coordinate di P all'interno dell'equazione e verifichiamo se sussiste l'identità.

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 4 = 4$$

$\Rightarrow$ Il punto P appartiene alla retta r

Funzione lineare

Abbiamo visto che a partire dall'espressione analitica di una funzione lineare è possibile tracciare il suo grafico individuando due suoi punti.

Viceversa, conoscendo le coordinate cartesiane di due punti appartenenti al grafico di una funzione lineare oppure le coordinate cartesiane di un solo punto ed il coefficiente angolare, è possibile determinare l'espressione analitica di una funzione lineare

Funzione lineare

Precisamente:

- se $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ appartengono al grafico di una funzione lineare, la sua espressione analitica è:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \ \text{con } y_2 \neq y_1 \text{ e } x_2 \neq x_1}$$

- se $P(x_0,y_0)$ appartiene al grafico della funzione lineare (retta non parallela all'asse delle ordinate) ed m è il coefficiente angolare, la sua espressione analitica è:

$$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$

Funzione lineare

Esempio. Determinare l'espressione analitica della funzione avente come grafico la retta passante per il punto $B(1,2)$ e di coefficiente angolare $m=3$ e rappresentarla poi graficamente.

Dalla formula:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

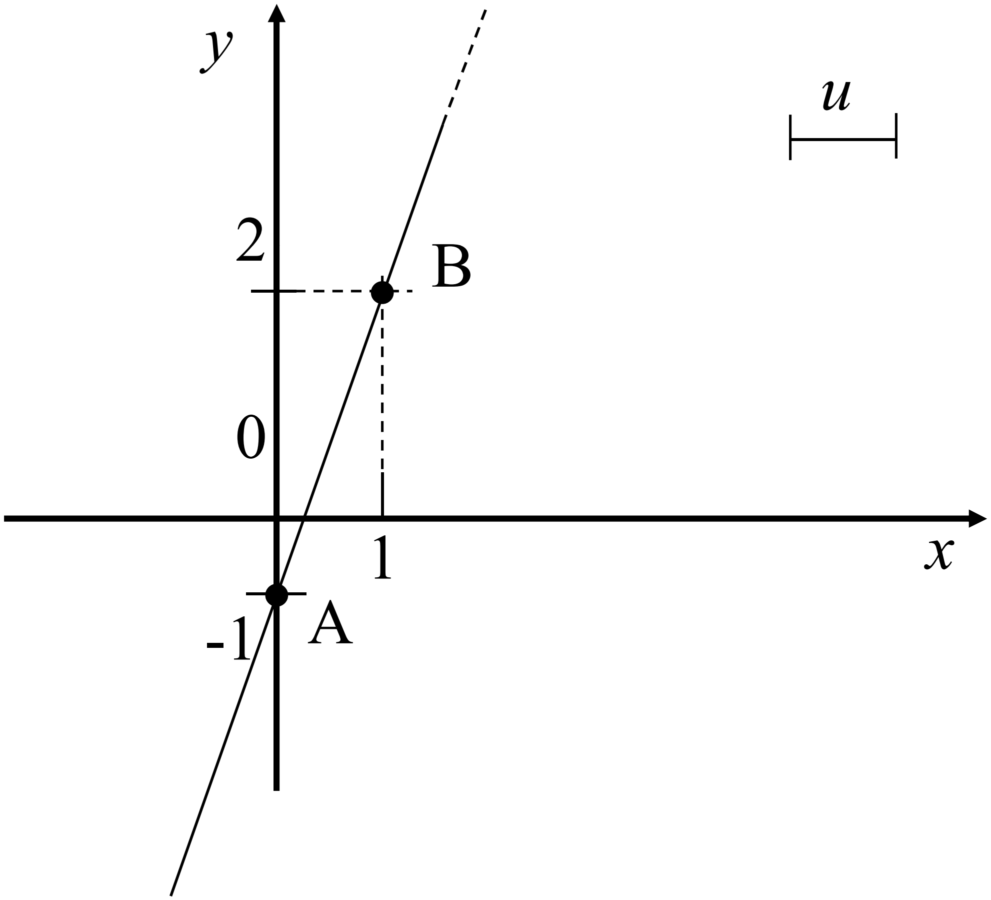
segue che l'espressione analitica richiesta è:

$$y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 3x - 3$$

$$\Rightarrow y = 3x - 3 + 2 \Rightarrow y = 3x - 1$$

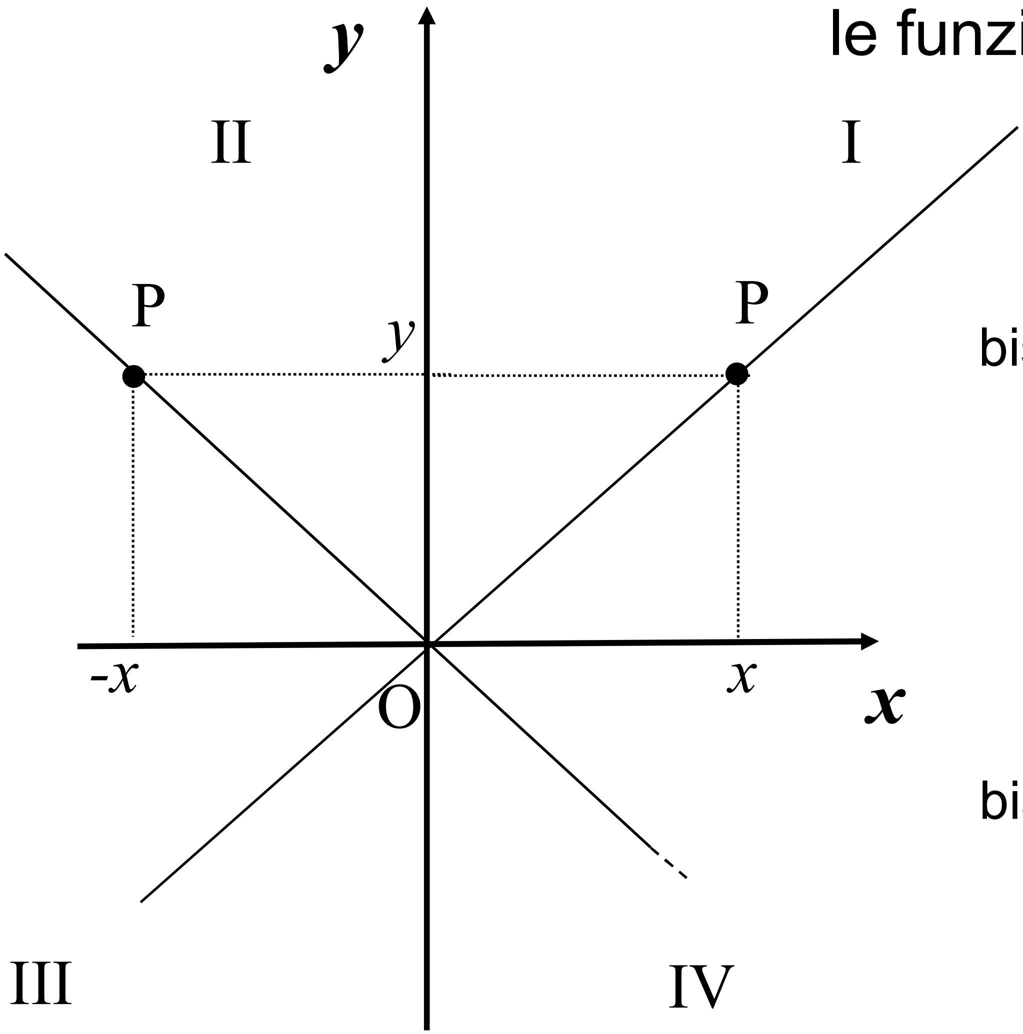
x	y
0	-1

A(0,-1)



Funzione lineare

Due particolari funzioni lineari sono le funzioni che hanno come grafico le *bisettrici*



Tutti i punti che si trovano sulla bisettrice del I e III quadrante hanno ascissa e ordinata uguali

Tutti i punti che si trovano sulla bisettrice del II e IV quadrante hanno ascissa e ordinata opposte

Funzione lineare

LE BISETTRICI

L'espressione analitica delle due bisettrici è la seguente

Bisettrice del I e III quadrante

$$f(x) = x$$

$$\Downarrow$$

$$m = 1 \quad \text{e} \quad q = 0$$

f strettamente crescente

Bisettrice del II e IV quadrante

$$f(x) = -x$$

$$\Downarrow$$

$$m = -1 \quad \text{e} \quad q = 0$$

f strettamente decrescente

Risoluzione grafica di un'equazione di I grado

Risolvere graficamente un'equazione di I grado del tipo

$$ax + b = 0 \ \text{ con } a, b \in R$$

vuol dire perciò determinare i punti di intersezione fra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione lineare

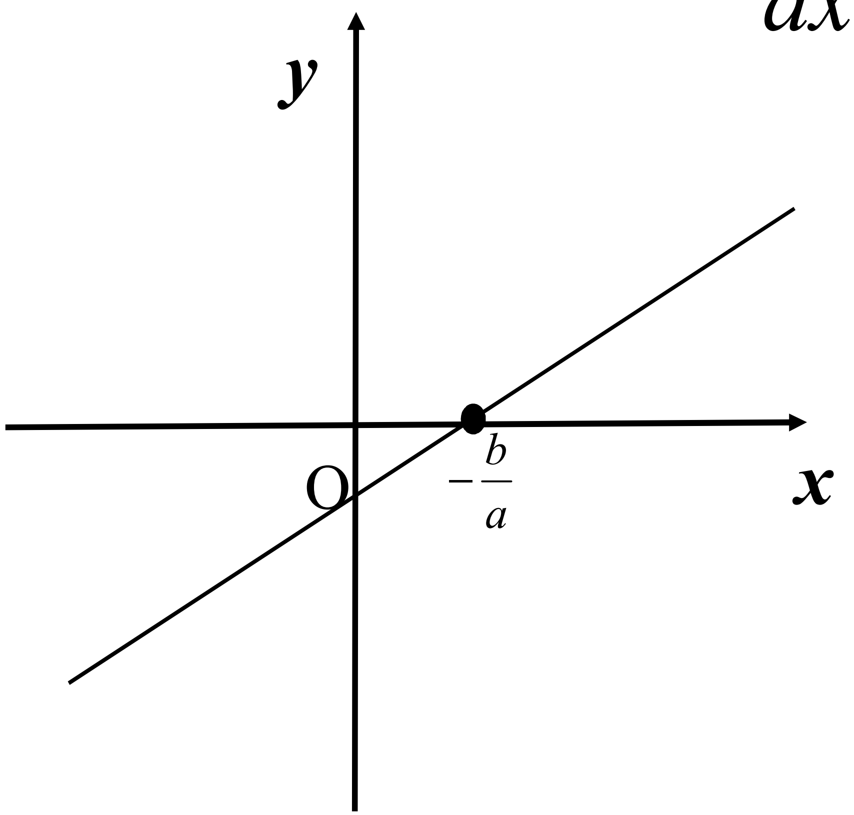
$$f(x) = ax + b$$

avente per grafico una retta del piano di coefficiente angolare a e ordinata all'origine b

Risoluzione grafica di un'equazione di I grado

$a > 0$

$$ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$$



Risoluzione grafica di una disequazione di I grado

Risolvere graficamente una disequazione di primo grado

$$ax + b > 0 \ \text{ con } a, b \in R$$

vuol dire determinare le ascisse dei punti del grafico della

funzione lineare $f(x) = ax + b$

che si trovano sopra l'asse delle ascisse

(f ha per grafico la retta del piano di coefficiente angolare o pendenza a e ordinata all'origine b)

Risoluzione grafica di una disequazione di I grado

$$a > 0$$

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$