

# **TEORIA DELLA PROBABILITÀ**

## *Cenni storici*

- i primi approcci alla teoria della probabilità sono della metà del XVII secolo (Pascal, Fermat, Bernoulli)
- gli ambiti di applicazione sono i giochi d'azzardo e problemi di assicurazioni
- la prima formalizzazione rigorosa si deve a Laplace (1812)
- autori cui si devono importanti sviluppi: De Moivre (1667-1754), Gauss (1777-1855) e Poisson (1781-1840)
- dalla metà del XIX secolo fino agli anni venti lo sviluppo è strettamente connesso ai nomi di Cebyshev, Markov e Ljapunov

Cosa si intende per  
PROBABILITÀ?

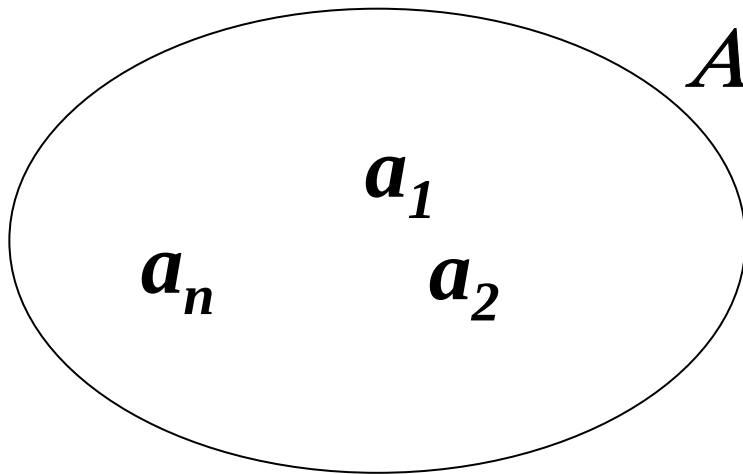
## *Teorie della probabilità*

1. *teoria classica* (Laplace)
2. *teoria frequentista* (Von Mises, Reichebach, Castelnuevo)
3. *teoria soggettivista* (De Finetti, Ramsey, Savage)
4. *impostazione assiomatica* (Kolmogorov)

# *insiemi*

Un insieme è una collezione di oggetti diversi tra loro e, generalmente non ordinati del tipo:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

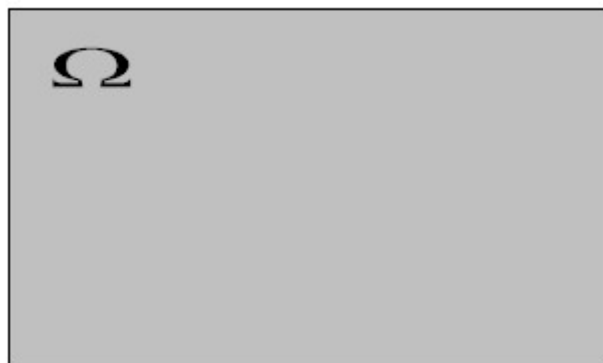


Un insieme senza elementi si chiama *insieme vuoto*:

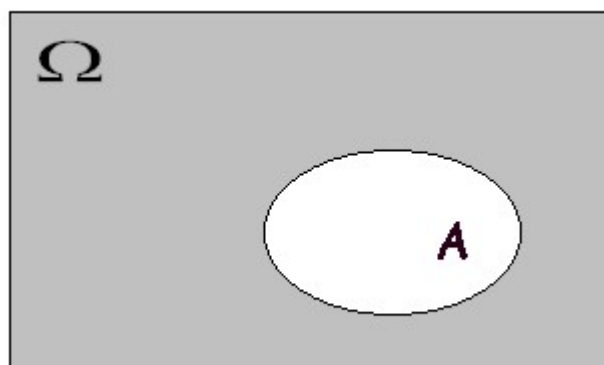
$$\emptyset = \{ \ }$$

# *insiemi*

## UNIVERSO



## COMPLEMENTARE

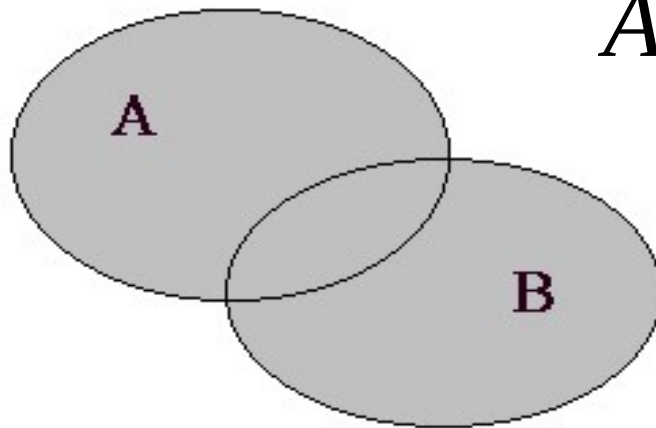


$$A^c = \Omega - A$$

# operazioni con gli insiemi

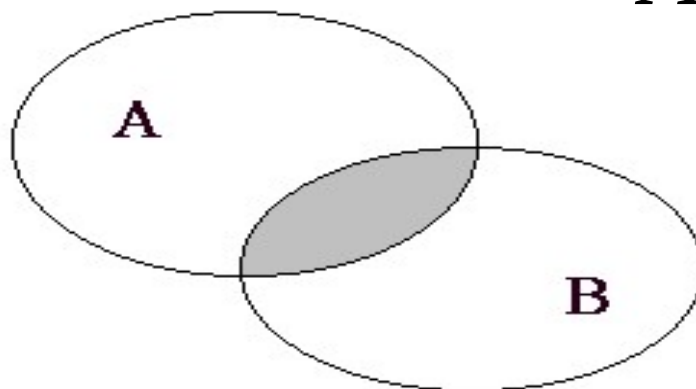
**UNIONE**

$$A \cup B$$



**INTERSEZIONE**

$$A \cap B$$



## *alcune definizioni*

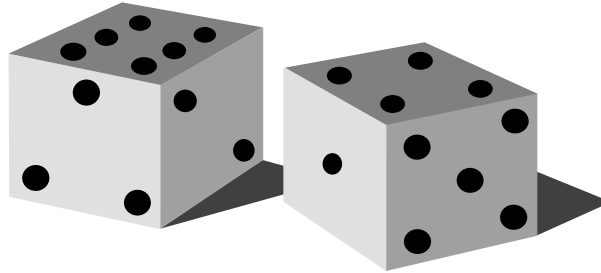
- ***fenomeno aleatorio*** = fenomeno non prevedibile con esattezza;
- ***spazio campione  $\Omega$***  = insieme di tutti gli esiti possibili di un dato fenomeno aleatorio
- ***punti campione*** = elementi di  $\Omega$
- ***evento*** = sottoinsieme dello spazio campione  $\Omega$  (semplice o composto), in simboli  $E \subseteq \Omega$
- uno spazio campione è ***discreto*** se contiene un numero finito di elementi o se è un insieme infinito numerabile
- uno spazio campione è ***continuo*** se contiene una infinità non numerabile di punti

## eventi

- ***certo*** quando si presenta sicuramente, coincide con lo spazio campione  $\Omega$  ( $E = \Omega$ )
- ***impossibile*** quando non può mai verificarsi, coincide con l'insieme vuoto  $\emptyset$  ( $E = \emptyset$ )
- ***aleatorio*** quando può presentarsi o meno
- ***semplice*** quando non può essere scomposto ulteriormente, coincide con un punto dello spazio  $\Omega$
- ***composto*** quando è dato dal raggruppamento di eventi semplici



# *esempio 1*



Consideriamo il lancio di un dado:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Eventi semplici sono:

$$E_1 = \{6\} \quad E_2 = \{3\}$$

Eventi composti sono:

$$E_3 = \{2, 4, 6\}$$

$$E_4 = \{3, 6\}$$

## eventi (2)

Dati due eventi A e B, essi si dicono:

- ***incompatibili*** o disgiunti quando non hanno alcun elemento in comune

$$(A \cap B = \emptyset)$$

Es.  $E_1 = \{6\}$  e  $E_2 = \{3\}$ :  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

- ***compatibili*** quando hanno almeno un punto in comune

$$(A \cap B \neq \emptyset)$$

Es.  $E_1 = \{6\}$  e  $E_2 = \{3, 6\}$ :  $E_1 \cap E_2 = \{6\}$

- ***complementari*** quando sono disgiunti e la loro unione dà luogo allo spazio campione

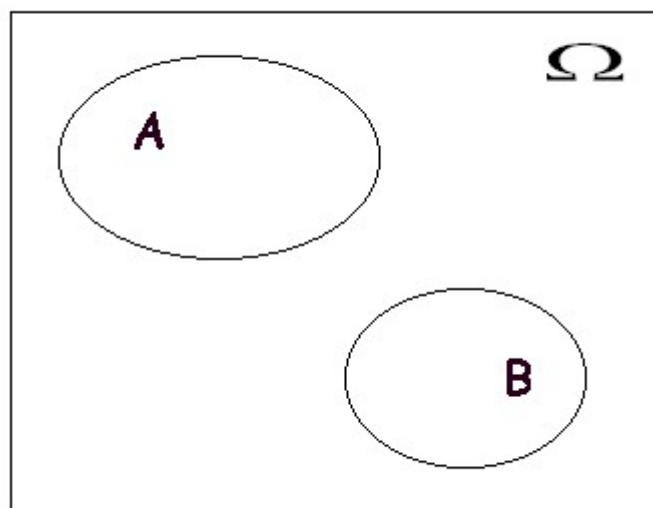
$$(A \cup B = \Omega)$$

in questo caso B si chiama complementare di A e si indica con  $A^c$

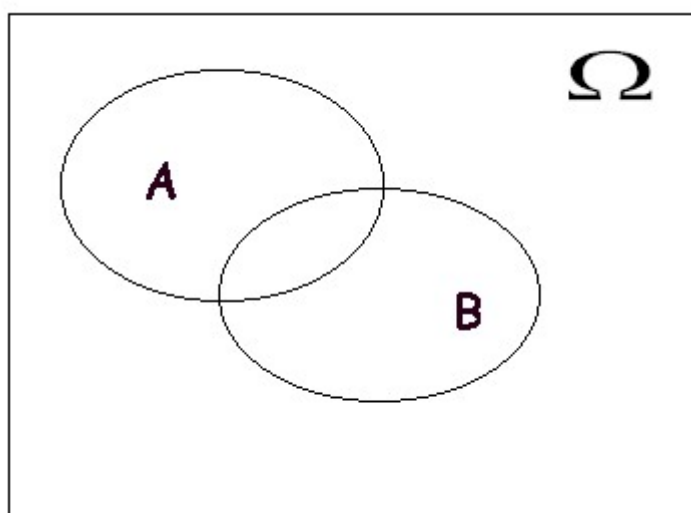
Es.  $E_1 = \{2, 4, 6\}$  e  $E_2 = \{1, 3, 5\}$ :  $E_1 \cup E_2 = \Omega$

# *rappresentazione degli eventi*

## **INCOMPATIBILI**



## **COMPATIBILI**



## *esempio 2*

Si vuole calcolare la probabilità di ottenere un 3 lanciando un dado.

Lo spazio campione è

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

L'evento che consideriamo è

$$E_2 = \{3\}$$

Dal momento che tutti gli eventi che compongono lo spazio campione sono UGUALMENTE PROBABILI possiamo costruire la probabilità cercata come rapporto

$$p(E_2) = \frac{1}{6}$$

## *esempio 3*

Si vuole calcolare la probabilità di estrarre un asso da un mazzo di 40 carte.

Lo spazio campione è dato dal mazzo di carte (casi possibili = 40).

L'evento che consideriamo è

$$E_3 = \{AC, AQ, AF, AP\}$$

I casi favorevoli sono 4.

Dal momento che i casi possibili sono EQUIPROBABILI la probabilità cercata sarà

$$p(E_3) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

## *definizione classica*

La probabilità di un evento  $A$  è data dal rapporto tra i casi favorevoli al realizzarsi di esso ( $s$ ) e i casi possibili ( $n$ ), a patto che i casi possibili siano EQUIPROBABILI.

Formalmente:

$$p(A) = \frac{s}{n}$$

Limiti della definizione:

- non sempre è possibile conoscere  $n$ , numero di casi possibili;
- non sempre gli eventi possibili sono equiprobabili.

Dal momento che l'insieme dei casi favorevoli è un sottoinsieme dei casi possibili possiamo scrivere:

$$0 \leq s \leq n$$

Se dividiamo tutti i termini per **n** otteniamo:

$$0 \leq \frac{s}{n} \leq 1$$

Da cui deriva la proprietà fondamentale:

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

*La probabilità di un evento è sempre un numero compreso tra 0 e 1.*

## proprietà

1. La probabilità di un evento è sempre compresa tra zero e uno

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

2. La probabilità di un evento certo è 1

$$p(\Omega) = 1$$

3. La probabilità di un evento impossibile è 0

$$p(\emptyset) = 0$$

4. Dato l'evento A, la probabilità del suo complementare  $A^c$  sarà:

$$p(A^c) = 1 - p(A)$$



## *esempio 4*

Un'urna contiene 20 palline colorate: 5 sono bianche e 15 rosse. Vogliamo calcolare la probabilità che la pallina estratta non sia bianca.

L'evento che consideriamo è

$$E_4^c = \{\text{non esce bianca}\}$$

la cui probabilità coincide con la probabilità di estrarre una pallina rossa e cioè

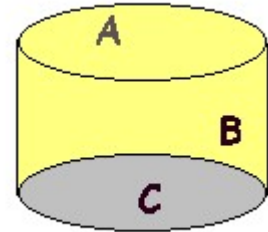
$$p(E_4^c) = \frac{15}{20}$$

si noti che

$$p(E_4) + p(E_4^c) = 1$$

## *esempio 5*

Sia dato un cilindro di plastica infrangibile, le cui facce vengono indicate con A, B, C. Vogliamo calcolare la probabilità che, se lo lanciamo in aria, esso cada con la faccia C rivolta verso l'alto.



Lo spazio campione sarà:

$$\Omega = \{A, B, C\}$$

Possiamo dire che

$$p(C) = \frac{1}{3} \quad ?$$

Evidentemente NO perché gli eventi  
*non sono EQUIPROBABILI*

## *esempio 5<sub>(2)</sub>*

Supponiamo di lanciare il cilindro NELLE STESSE CONDIZIONI per un gran numero di volte (ad es  $n = 100$ ). Se osserviamo che l'evento da noi considerato si presenta  $s = 20$  volte potremo assumere la *frequenza relativa dell'evento* come **stima** della sua probabilità:

$$f(C) = \frac{20}{100}$$

Possiamo attenderci che la stima migliorerà aumentando il numero delle prove.

## *definizione frequentista*

La probabilità di un evento A è data dal valore intorno al quale tende a stabilizzarsi la frequenza relativa di presentazione dell'evento al crescere del numero di prove .

Formalmente:

$$p(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s}{n}$$

Limiti della definizione:

- non è possibile determinare la probabilità con esattezza;
- se le prove non vengono effettuate nelle medesime condizioni la stima non è attendibile



## *esempio 6*

Vogliamo calcolare la probabilità che un giocatore di basket faccia centro ad un tiro libero.

Lo spazio campione sarà:

$$\Omega = \{ \text{farà centro, non farà centro} \}$$

Sicuramente ***non ha senso*** dire che

$$p(\text{centro}) = \frac{1}{2}$$

Supponiamo di sapere che nelle precedenti partite ha segnato 82 volte su 100 tiri, quindi

$$f(\text{centro}) = \frac{82}{100}$$

## *esempio 7*

Vogliamo calcolare la probabilità che il risultato del lancio di un dado sia 3 oppure un multiplo di 2.

L'evento in questione  $E$  è costituito da due eventi tra loro incompatibili:

$$E_1 = \{3\}$$

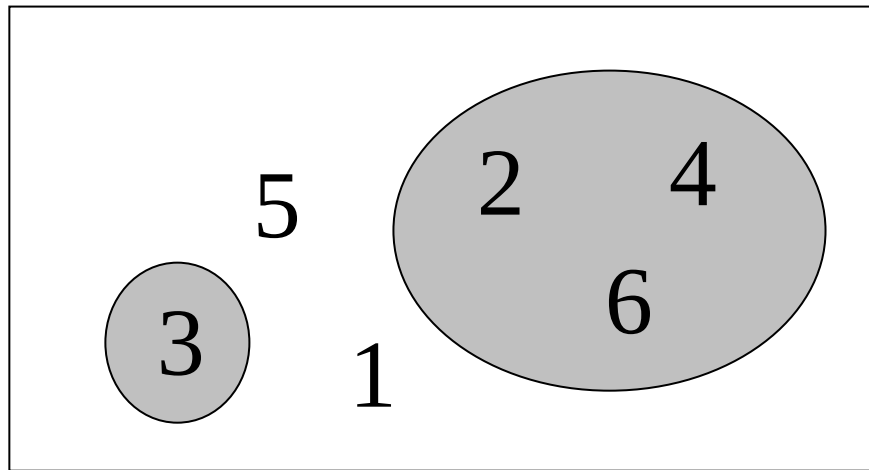
$$E_2 = \{2, 4, 6\}$$

in particolare  $E$  è dato dall'UNIONE dei due eventi:

$$E = E_1 \cup E_2 = \{2, 3, 4, 6\}$$

## *esempio 7<sub>(2)</sub>*

Graficamente



$$p(E) = \frac{4}{6}$$

Notiamo che

$$p(E_1) = \frac{1}{6} \quad p(E_2) = \frac{3}{6}$$

e quindi

$$p(E) = p(E_1) + p(E_2)$$

## legge della somma

Dati due eventi *incompatibili*  $A$  e  $B$ , la probabilità dell'evento unione  $A \cup B$  è data dalla somma delle singole probabilità dei due eventi.

Formalmente:

se  $A \cap B = \emptyset$

allora

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Ciò vale anche se gli eventi sono genericamente  $n$ , a patto che siano a due a due incompatibili



## *esempio 8*

Vogliamo calcolare la probabilità che il risultato del lancio di un dado sia un multiplo di 3 oppure un numero maggiore di 4. Questa volta i due eventi che compongono l'evento unione  $E$  sono compatibili:

$$E_1 = \{3, 6\}$$

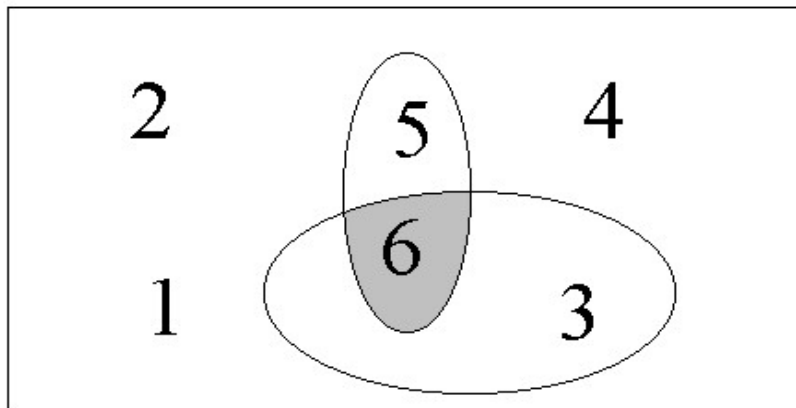
$$E_2 = \{5, 6\}$$

l'elemento 6 è presente in entrambi gli insiemi

$$E = E_1 \cup E_2 = \{3, 5, 6\}$$

## *esempio 8<sub>(2)</sub>*

Graficamente



$$p(E) = \frac{3}{6}$$

Notiamo che

$$p(E_1) = \frac{2}{6} \quad p(E_2) = \frac{2}{6}$$

e quindi

$$p(E) < p(E_1) + p(E_2)$$

## *esempio 8<sub>(3)</sub>*

Si ha

$$p(E_1 \cup E_2) < p(E_1) + p(E_2)$$

perché i casi favorevoli nel secondo membro vengono contati due volte; per ristabilire l'equilibrio bisogna sottrarre al secondo membro la probabilità dell'intersezione.

Avremo pertanto:

$$p(E) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

## legge della somma

Dati due eventi *compatibili*  $A$  e  $B$ , la probabilità dell'evento unione  $A \cup B$  è data dalla somma delle singole probabilità dei due eventi meno la probabilità della loro intersezione  $A \cap B$ .

Formalmente:

se  $A \cap B \neq \emptyset$

allora

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \end{aligned}$$



## *esempio 9*

Si lancino insieme un dado ed una moneta.



Vogliamo calcolare la probabilità di ottenere testa e 3.

$$E_1 = \{\text{testa}\}$$

$$E_2 = \{3\}$$

I due eventi sono tra loro INDIPENDENTI

L'evento composto  $E$  si verifica quando si verificano *entrambi* gli eventi che lo compongono, si tratta pertanto di una INTERSEZIONE

$$E = E_1 \cap E_2 = \{\text{testa e } 3\}$$

## *esempio 9<sub>(2)</sub>*

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | • | • |
| 2 | • | • |
| 3 | • | • |
| 4 | • | • |
| 5 | • | • |
| 6 | • | • |
|   | T | C |

Gli eventi possibili sono 12, solo uno di essi è favorevole al verificarsi di E; pertanto la probabilità cercata sarà

$$p ( E ) = \frac{1}{12}$$

## *esempio 9*<sub>(3)</sub>

Notiamo che la probabilità dell'uscita TESTA ( $E_1$ ) è data da

$$p(E_1) = \frac{1}{2}$$

mentre la probabilità dell'uscita 3 ( $E_2$ ) da

$$p(E_2) = \frac{1}{6}$$

la probabilità dell'evento composto ( $E$ ) è data dal prodotto tra le due

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

## legge del prodotto

Dati due eventi *indipendenti*  $A$  e  $B$ , la probabilità dell'evento intersezione  $A \cap B$  è data dal prodotto delle singole probabilità dei due eventi.

Formalmente:

se

$A$  e  $B$  indipendenti

allora

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Ciò vale anche se gli eventi sono genericamente  $n$ , a patto che siano a due a due indipendenti



## *esempio 10*

Abbiamo un sacchetto contenente due gettoni rossi ed uno nero. Estraiamo due gettoni in sequenza (senza reinserire il primo estratto nel sacchetto); vogliamo determinare la probabilità dell'evento

$E = \{\text{i gettoni estratti sono entrambi rossi}\}$

L'evento  $E$  risulta composto dai due eventi elementari:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{R'\} \\ E_2 &= \{R''\} \end{aligned} \quad E = E_1 \cap E_2$$

Si noti però che, mentre  $p(E_1) = 2/3$ , non così vale per  $p(E_2)$  che può variare a seconda del risultato della prima estrazione.

## *esempio 10<sub>(2)</sub>*

seconda estrazione

|       |       |       |   |
|-------|-------|-------|---|
|       |       |       |   |
| N     | •     | •     |   |
| $R_2$ | •     |       | • |
| $R_1$ |       | •     | • |
|       | $R_1$ | $R_2$ | N |

prima estrazione

Gli eventi possibili sono 6, quelli favorevoli al verificarsi di E sono due; pertanto la probabilità cercata sarà

$$p ( E ) = \frac{2}{6}$$

## *esempio 10*<sub>(3)</sub>

La probabilità di estrarre come primo un gettone rosso ( $E_1$ ) è data da

$$p(E_1) = \frac{2}{3}$$

la probabilità di estrarre un rosso anche alla seconda estrazione ( $E_2$ ) dipende dal risultato della prima; supponendo di avere estratto già un gettone rosso tale probabilità sarà

$$p(E_2 \mid E_1) = \frac{1}{2}$$

la probabilità dell'evento composto ( $E$ ) è data dal prodotto tra le due

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$$

## legge del prodotto

Dati due eventi *non indipendenti*  $A$  e  $B$ , la probabilità dell'evento intersezione  $A \cap B$  è data dal prodotto della probabilità del primo per la probabilità del secondo condizionata al primo.

Formalmente:

se  $A$  e  $B$  non indipendenti

allora

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A)$$

## definizioni

- dati due eventi A e B con  $p(B) > 0$ , si chiama *probabilità condizionata* di A dato B (scritto formalmente  $p(A|B)$ ) la quantità

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

in pratica  $p(A|B)$  indica la probabilità che si verifichi A quando si è verificato B

- due eventi A e B si dicono *indipendenti* se e solo se vale che

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

## riassumendo

