

che ha luogo nel tempo generico  $t$  sarà semplicemente  $(dR/dt) t = -2\mu g t / \omega\pi$ ; per cui

$$R(t) = R_0 - \frac{2\mu g}{\omega\pi} t$$

dove  $R_0$  è il valore che l'ampiezza aveva all'istante  $t = 0$ . La [VIII.5.9] diviene pertanto, in definitiva

$$x(t) = (R_0 - \frac{2\mu g}{\omega\pi} t) \cos(\omega t + \alpha_0) \text{ con } \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{[VIII.5.10]}$$

Questa rappresenta la legge oraria di un moto oscillatorio smorzato per effetto di attrito radente costante.

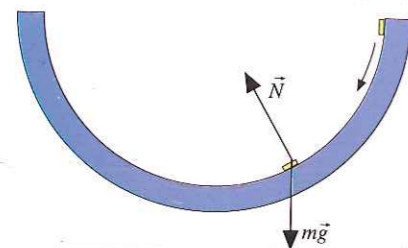
I casi in cui la forza di attrito sia una forza costante (casi cui abbiamo fin qui limitato la nostra attenzione) sono però solo una categoria molto particolare di fenomeni; in generale, la forza di attrito che agisce sul sistema è diversa nelle varie posizioni che il sistema va ad occupare durante il suo moto. Considerata l'espressione della forza di attrito [VIII.5.1], affinché il suo modulo  $f_a$  sia costante è necessario (e sufficiente) che sia costante il modulo  $N$  della reazione normale che il vincolo esercita sul corpo in movimento; affinché sia costante la sua direzione è necessario che  $\hat{v}$  abbia sempre la stessa direzione. Queste condizioni possono essere verificate solo se il vincolo, a contatto col quale il sistema si muove, è un *vincolo piano*. Se la superficie del vincolo ha forma diversa da quella piana, in ogni posizione occupata dal sistema il modulo  $N$  della reazione normale ha, in particolare, valore diverso; e dunque cambia il modulo  $f_a$  della forza di attrito, con modalità che è di solito tutt'altro che semplice calcolare. Ciò è vero anche qualora la forza attiva che preme il corpo in movimento contro il vincolo sia una forza costante (ad esempio la forza peso).

**Esempio**

**VIII.5.3 Vincolo di forma sferica.**

Consideriamo una semisfera rigida concava; e dal suo bordo interno lasciamo scivolare verso il fondo una piccola piastra (ad esempio una moneta), cosicché si muova strisciando - a partire da ferma - lungo un diametro della sfera. Supponiamo per il momento che l'effetto degli attriti sia trascurabile. Le forze che agiscono sul punto materiale (cui la piastrina può essere assimilata), sono allora solo la forza peso  $m\vec{g}$  (costante, diretta verso il basso) e la reazione normale  $\vec{N}$  esercitata dalla sfera rigida.

Consideriamo il momento in cui l'oggetto si trova nella posizione generica  $Q$ , caratterizzata dal fatto che il raggio  $CQ$  (di lunghezza pari a  $R$ , raggio della sfera) forma con l'orizzontale  $CH$  un angolo pari ad  $\alpha$ . Scomponiamo la forza peso  $\vec{p} = m\vec{g}$  nei suoi componenti  $\vec{p}_n$  (ortogonale alla sfera) e  $\vec{p}_t$  (tangente alla sfera). In base a semplici considerazioni geometriche, è immediato verificare che  $p_n = mg \sin\alpha$ ;  $p_t = mg \cos\alpha$ . La componente  $p_n$ , tangente alla traiettoria, è quella che determina la componente tangenziale della accelerazione, e dunque sostanzialmente governa il moto. Alla componente normale  $p_n$  si oppone, invece, la componente normale  $\vec{N}$  della reazione vincolare esercitata dalla sfera. Va osservato tuttavia che la somma vettoriale di  $\vec{N}$  e di  $\vec{p}_n$  non deve semplicemente annullarsi: la forza risultante che agisce normalmente alla traiettoria,  $\vec{N} + \vec{p}_n$ , deve essere infatti tale da fornire la componente centripeta  $\vec{a}_c$  della accelerazione propria del moto circolare compiuto



moto con vincolo di forma sferica

dal punto. Tenuto conto che  $a_c = v^2/R$ , la proiezione centripeta della equazione  $\vec{f} = m\vec{a}$  si scriverà pertanto:

$$\vec{N} + \vec{p}_n = m \vec{a}_c \Rightarrow N - mg \sin\alpha = m \frac{v^2}{R}$$

Il segno meno davanti a  $mg \sin\alpha$  deriva dal fatto che la componente  $\vec{p}_n$  della forza peso è diretta verso l'esterno. Da cui segue:

$$N = mg \sin\alpha + m \frac{v^2}{R} \quad \text{[VIII.5.11]}$$

D'altro canto, il modulo  $v$  della velocità raggiunta dal punto nella posizione considerata può essere facilmente calcolata ricorrendo al principio di conservazione dell'energia. L'energia cinetica  $(1/2) m v^2$  acquisita dal punto deve essere pari al lavoro compiuto dalla forza peso  $L_p = mgAQ = mg R \sin\alpha$  a partire dalla posizione iniziale in cui il punto era fermo; dunque:

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg R \sin\alpha$$

da cui

$$\frac{m v^2}{R} = 2mg \sin\alpha$$

per cui la relazione [VIII.5.11] diviene

$$N = 3mg \sin\alpha \quad \text{[VIII.5.12]}$$

Vediamo dunque che il modulo  $N$  della reazione normale dipende da  $\sin\alpha$ , cioè dipende dalla posizione per la quale il punto sta passando.

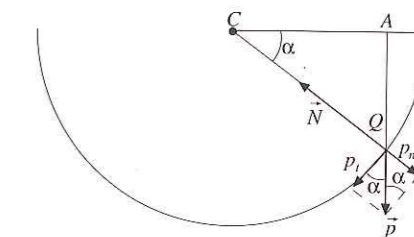
Naturalmente, in presenza di attrito il punto arriverebbe nella posizione considerata con velocità minore; e per conseguenza, coerentemente con la [VIII.5.10], sarebbe minore il valore di  $N$ . In questo caso, il calcolo della legge oraria sarebbe notevolmente complesso, e potrebbe essere risolto praticamente solo in via approssimata. Per conoscere con quale velocità il punto arriva in ciascuna posizione, sarebbe infatti necessario sapere il valore della forza di attrito posizione per posizione; ma tale valore, proporzionale ad  $N$ , dipende a sua volta - tramite la [VIII.5.11] - dalla velocità.

**Esperimento**

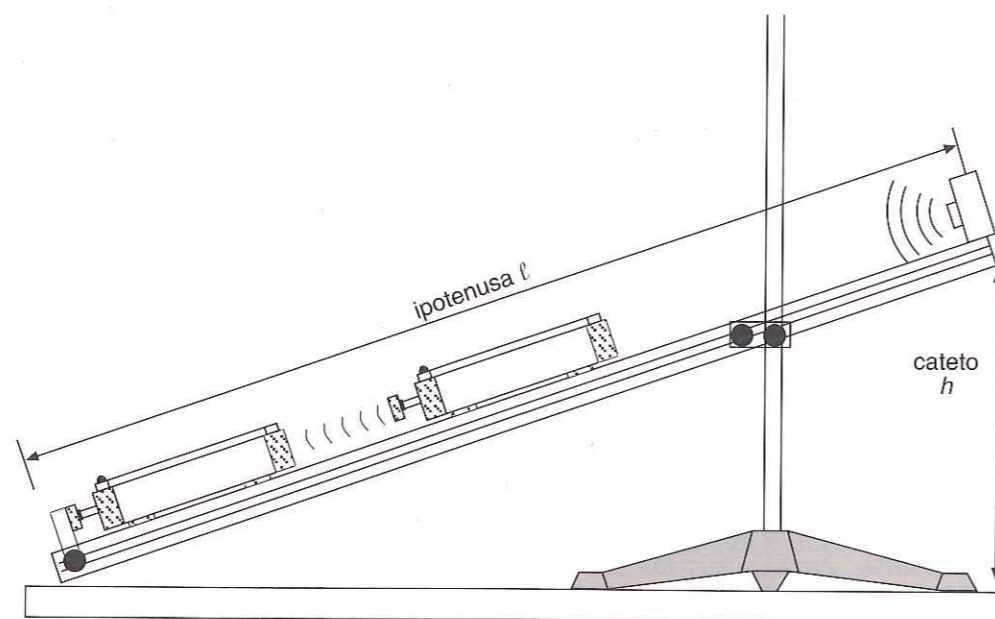
**VIII.5.2 Moto con poco attrito di un carrello lungo una guida inclinata. Urti contro un blocco.**

Un carrello di massa  $m$  con respingente a molla può andare su e giù, con poco attrito, lungo una guida inclinata, come in figura. All'estremità in basso il carrello urta, con il respingente, contro un blocco pesante, posto all'estremità in basso della guida e torna indietro. Un sonar posto in alto alla guida e collegato ad un computer permette di studiare il moto del carrello attraverso i grafici che sono costruiti in tempo reale, cioè mentre il fenomeno si svolge.

I sistemi per lo studio del moto in tempo reale sono presenti in



diverse scuole e noi abbiamo utilizzato uno di essi<sup>1</sup> per realizzare l'esperimento che ci apprestiamo a descrivervi.



Abbiamo disposto la guida, lunga 230 cm in modo che l'altezza  $h$ , dislivello tra il pavimento e un punto in alto risultasse pari a 7,9 cm. In questo modo il triangolo rettangolo in figura ha ipotenusa  $l = 221$  cm e cateto  $h = 7,9$  cm. Il sistema di acquisizione dati è configurato in modo che il vettore posizione abbia origine nel sonar, abbia la direzione dell'ipotenusa del triangolo rettangolo, sia orientato verso il basso.

Comprimiamo la molla e la blocchiamo nella posizione di massima compressione. Disponiamo il carrello in modo che il respingente urti contro il blocco pesante, così come in figura e iniziamo a registrare i grafici di posizione, velocità ed accelerazione. All'istante  $t = 2$  s la molla viene liberata, la molla si decomprime, e il carrello si mette in moto lungo la guida. Nei 15 secondi di registrazione dei grafici, per tre volte il carrello sale, raggiunge una quota massima scende ed urta contro il blocco.

I grafici che otteniamo sono quelli in figura ed osserviamo che essi appaiono come curve continue anche se in realtà la registrazione è avvenuta in modo discreto ad intervalli regolari di 0,05s: in un secondo sono stati rilevati 20 dati sperimentali. I punti sperimentali sono stati raccordati con tratti rettilinei. L'analisi che vi proponiamo terrà conto sia dei grafici, sui quali siete invitati fare osservazioni ad effettuare delle misure, sia di dati che abbiamo ottenuto nell'esperimento.

Per voi:

Il moto del carrello è rettilineo?

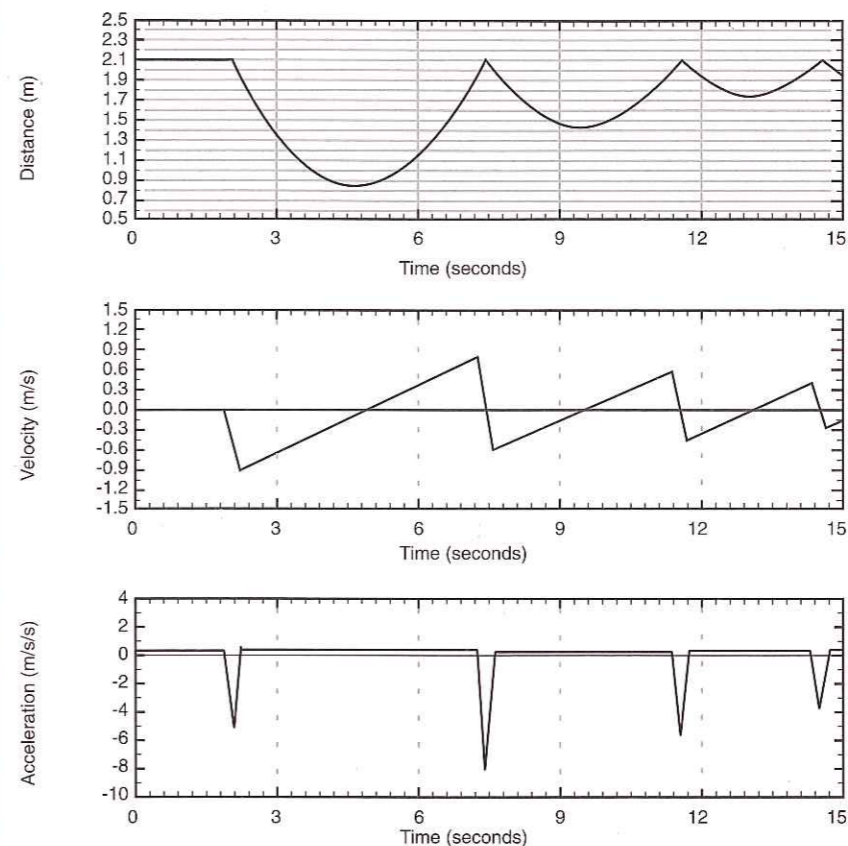
I tre grafici sono relativi al punto  $P$  della parte anteriore del carrello

<sup>1</sup> Il sistema di acquisizione (hardware e software) da noi utilizzato è l'ULI-Motion della Vernier SOFTWARE-USA

La guida e il carrello sono della PASCO scientific-USA.

sulla quale si riflettono le onde ultrasoniche del sonar. Sapete da questi, costruire i grafici relativi al moto del baricentro del carrello?

Osservando i tre grafici contemporaneamente indicate gli intervalli di tempo relativi alle fasi di salita-discesa e quelli relativi all'urto.



Indicate sui tre grafici gli istanti in cui il carrello si trova rispettivamente: a) nell'inversione salita-discesa; b) con i più alti valori assoluti della velocità; c) con la molla che ha subito il massimo di compressione nell'urto.

Quanti secondi dura approssimativamente un urto del carrello contro il blocco?

Se il grafico posizione-tempo è ben rappresentato nel moto di salita-discesa da tratti di parabola che moto è quello di salita-discesa?

Calcolate, dal grafico della velocità, l'accelerazione media negli intervalli di tempo:  $[2,4; 4,5]$ s,  $[4,5; 7,5]$ s,  $[2,4; 7,5]$ s.

Nella tabella che segue riportiamo alcuni dei valori della posizione (distanza dal sonar), della velocità e dell'accelerazione che permettono di analizzare con maggiore dettaglio il moto del carrello. Indicate sui tre grafici i punti in tabella.

Con una bilancia abbiamo misurato la massa del carrello:  $m = 0,495$  kg.

Quale valore massimo, in newton, ha raggiunto la forza impulsiva di spinta del carrello quando è stata liberata la molla?

Comprimendo la molla del carrello con forze note abbiamo, con la legge di Hooke, determinato la costante elastica della molla stessa:  $K = 817 \text{ N/m}$ .

$t(\text{s})$	$p(\text{m})$	$v(\text{m/s})$	$a(\text{m/s}^2)$
0,00	2,11	0,00	0,00
1,95	2,11	0,00	0,00
2,10	2,10	-0,51	-4,97
2,25	1,96	-0,88	0,39
4,65	0,87	0,00	0,35
7,25	1,95	0,79	0,25
7,40	2,07	0,41	-6,54
7,65	1,99	-0,61	0,35
9,45	1,43	0,00	0,31
11,40	2,00	0,56	0,26
11,60	2,09	-0,03	-5,42
11,80	2,01	-0,40	0,32
13,00	1,76	-0,01	0,31
14,40	2,04	0,38	0,07
14,55	2,09	0,06	-3,78
14,75	2,04	-0,26	0,31

Avendo misurato la compressione iniziale della molla pari a  $x = 24 \text{ mm}$ , calcoliamo l'energia potenziale elastica iniziale,  $E_{el} = 1/2 K x^2 = 0,24 \text{ J}$ . In assenza di forze dissipative l'energia potenziale elastica iniziale dovrebbe trasformarsi integralmente, dopo la spinta, in energia cinetica  $1/2 mv^2$  e in energia potenziale di gravità  $mgh$ .

Per il calcolo dell'energia potenziale osserviamo che la variazione di altezza del carrello può essere valutata considerando che lungo il nostro piano inclinato percorrere in salita un tratto  $d$  significa salire di una quota  $h_1 = dh/l = d \cdot 7,9 \text{ cm} / 221 \text{ cm} = d \cdot 0,036$ .

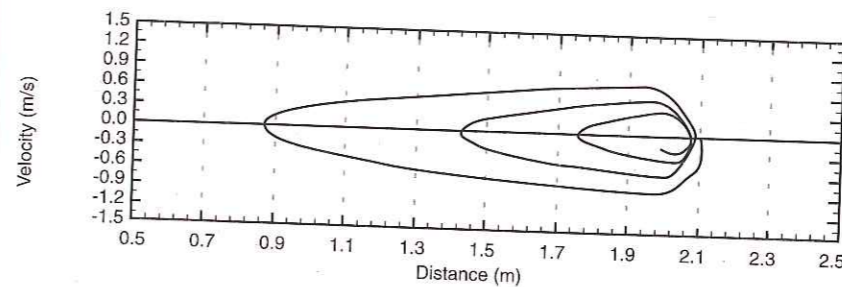
All'istante  $t = 4,65 \text{ s}$  il carrello raggiunge la massima altezza, la velocità è nulla, l'energia cinetica è nulla, l'energia meccanica è espressa tutta in energia potenziale di gravità.

Quanta energia potenziale elastica si è trasformata in energia potenziale di gravità?

Quanta energia si perde in ciascuno degli urti del carrello contro il blocco?

**Esercizi**  
**VIII.5.1**

Il grafico in figura rappresenta la corrispondenza esistente tra velocità e distanza dal sonar del carrello dell'esperimento precedente. Individuate sul grafico della curva i punti della tabella riportata nell'esperimento. Con quale verso (orario o antiorario) è percorsa la curva? Facendo riferimento all'esperimento precedente descrivete a parole il moto del carrello riferendovi al grafico della curva velocità-distanza in figura.



**VIII.5.2** Costruite il grafico della curva velocità-spazio dell'oscillatore armonico dell'Esempio VIII.4.1

**VIII.6 - Leggi del moto in presenza di attrito del mezzo**

Come abbiamo già anticipato – in particolare nel capitolo quinto e nel capitolo sesto – quando un sistema si muove immerso in un fluido fermo (o comunque a contatto con esso), ne subisce una *forza resistente*, la cui intensità e direzione dipendono dalla forma dell'oggetto e dalla sua velocità: forza detta, per l'appunto, di *resistenza del mezzo*, perché qualunque sia la sua direzione essa forma comunque un angolo ottuso rispetto alla velocità, e dunque *il lavoro da essa compiuto è sempre negativo* e tende quindi ad esercitare una azione frenante sul moto. Poiché, intorno a noi, gli oggetti si muovono – salvo poche eccezioni costruite artificialmente – immersi nell'aria (e talvolta a contatto, o immersi, nell'acqua) la fenomenologia delle forze di resistenza del mezzo riveste grande rilievo pratico. Tuttavia si tratta di una fenomenologia assai complessa: la dipendenza della forza dalla forma dell'oggetto, oltre che dalla velocità, assume caratteristiche estremamente variabili da caso a caso, influenzando sul moto con modalità le più differenziate. Allo studio teorico e sperimentale di queste forze sono dedicati interi settori della fluidodinamica (aerodinamica e idrodinamica): settori specifici che sono lontani dalle finalità e dalle possibilità di un corso elementare e generale come questo.

Qui ci limitiamo a considerare alcuni casi molto semplici. Assumeremo in primo luogo che la forma dell'oggetto sia particolarmente simmetrica intorno alla direzione del moto (come ad esempio nel caso di una sferetta; o nel caso di oggetti con forma ad ogiva dotati di velocità parallela al loro asse, come accade per i proiettili delle armi da fuoco); in questa ipotesi la forza di resistenza del mezzo ha direzione opposta rispetto alla velocità, e può essere dunque scritta nella forma

$$\vec{f}_r = -k(v)\hat{v} \quad \text{[VIII.6.1]}$$

dove  $\hat{v}$  è il versore della velocità dell'oggetto rispetto al fluido, e  $k(v)$  una quantità positiva che dipende dal modulo  $v$  della velocità. Inoltre, supporremo che la funzione  $k(v)$  – relativa all'oggetto considerato – ci sia nota. Del tutto in generale,  $k(v)$  è una *funzione crescente* della velocità (la resistenza al moto aumenta all'aumentare della velocità) il cui andamento qualitativo è del tipo mostrato nella figura a lato. Per bassi valori della velocità,  $k(v)$  può essere approssi-

moto e resistenza del mezzo

lavoro negativo della forza resistente

