Funzione esponenziale e logaritmo. Proprietà di esponenziale e logaritmo.

Funzione esponenziale

$$f(x) = a^x, \quad a \in R \text{ fissato, } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$f : x \in R \to a^x \in (0,+\infty)$$

a è la base della funzione esponenziale ed è fissata

x è l'esponente della funzione esponenziale e varia nel dominio

$$\Downarrow$$

La funzione esponenziale è sempre positiva

Funzione esponenziale a>1

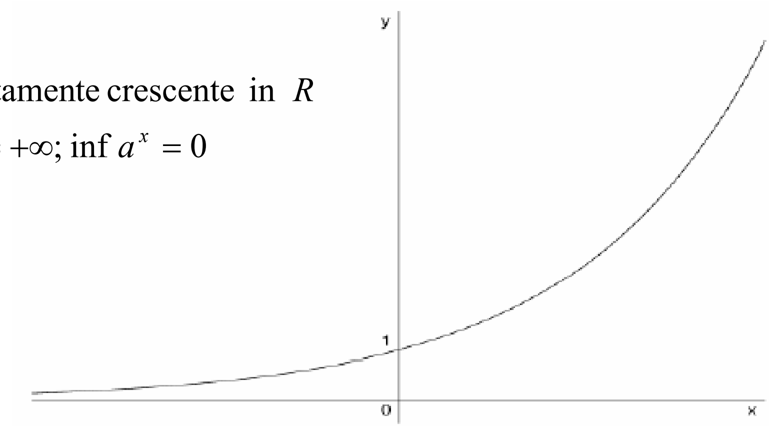
$$f(x) = a^x, \quad a \in R, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$\text{caso } a > 1$$

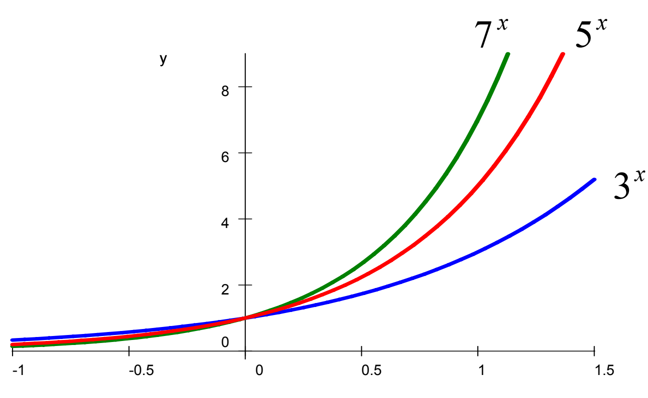
$$f : x \in R \to a^x \in (0, +\infty)$$

f strettamente crescente in R

$\sup a^x = +\infty; \inf a^x = 0$



Funzione esponenziale a>1

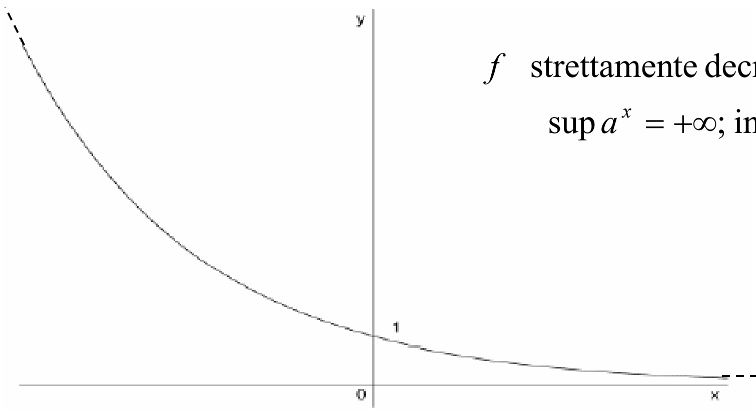


Funzione esponenziale 0<a<1

$$f(x) = a^x, \quad a \in R, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$\text{caso } 0 < a < 1$$

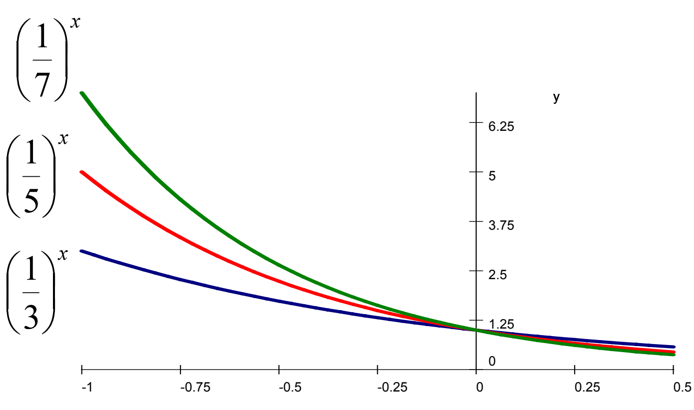
$$f : x \in R \to a^x \in (0, +\infty)$$



f strettamente decrescente in R

$\sup a^x = +\infty; \inf a^x = 0$

Funzione esponenziale 0<a<1



Funzioni potenza/esponenziale

OSSERVAZIONE:

Quindi, la differenza tra funzione potenza e funzione esponenziale risiede nel fatto che:

nella funzione potenza la variabile indipendente è la base (l'esponente è un numero reale fissato)

mentre nell'esponenziale la variabile indipendente è l'esponente (la base è un numero reale fissato >0)

Funzioni esponenziale con base *e*

Una funzione esponenziale molto utilizzata è quella che ha per base il numero irrazionale

$$e = 2{,}7182...$$

detto numero di Nepero

$$\Downarrow$$

la funzione esponenziale

$$f(x) = e^x$$

è una funzione strettamente crescente poichè

$$e > 1$$

Funzioni esponenziale: proprieta'

1) $a^0 = 1, \ \forall a \in R, \ a > 0 \ e \ a \neq 1$

2) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \ \forall a \in R, \ a > 0 \ e \ a \neq 1, \ \forall x_1, x_2 \in R$

3) $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}, \ \forall a \in R, \ a > 0 \ e \ a \neq 1, \ \forall x_1, x_2 \in R$

4) $a^x > 0, \ \forall a \in R, \ a > 0 \ e \ a \neq 1, \ \forall x \in R$

5) se $a > 1$ e $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}, \ \forall x_1, x_2 \in R$

6) se $0 < a < 1$ e $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}, \ \forall x_1, x_2 \in R$

Funzioni logaritmo

$$f(x) = \log_a x, \quad a \in R \ \text{fissato}, a > 0 \ \text{e} \ a \neq 1$$

$$f : x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in R$$

a è la base della funzione logaritmo ed è fissata

x è l'argomento della funzione logaritmo e varia nel dominio

Il logaritmo e' la funzione inversa dell'esponenziale

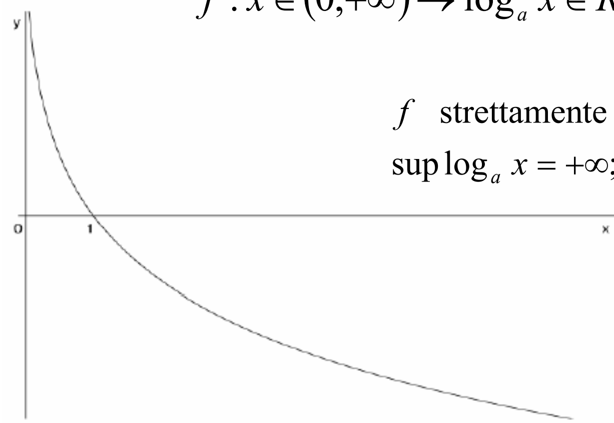
$$x = a^{\log_a x} \qquad x = \log_a(a^x)$$

Funzioni logaritmo 0<a<1

$$f(x) = \log_a x, \quad a \in R, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$\text{caso } 0 < a < 1$$

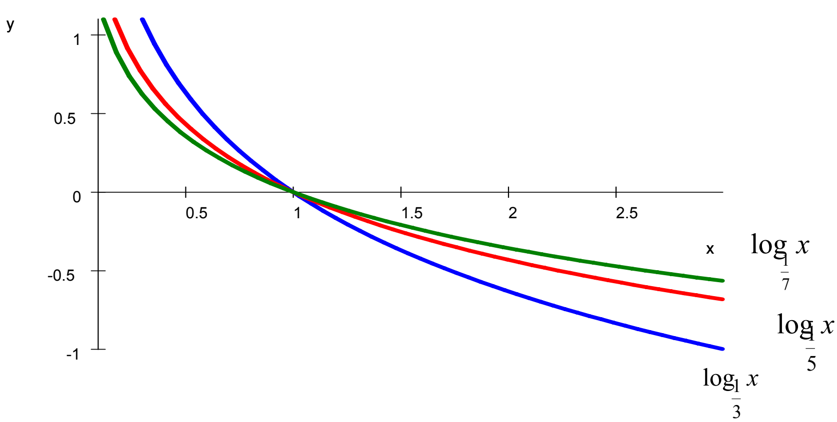
$$f : x \in (0,+\infty) \to \log_a x \in R$$



f strettamente decrescente in $(0,+\infty)$

$\sup \log_a x = +\infty; \inf \log_a x = -\infty$

Funzioni logaritmo 0<a<1

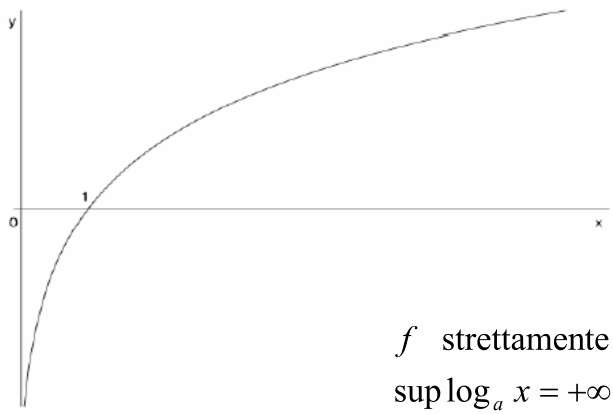


Funzioni logaritmo a>1

$$f(x) = \log_a x, \quad a \in R, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$\text{caso } a > 1$$

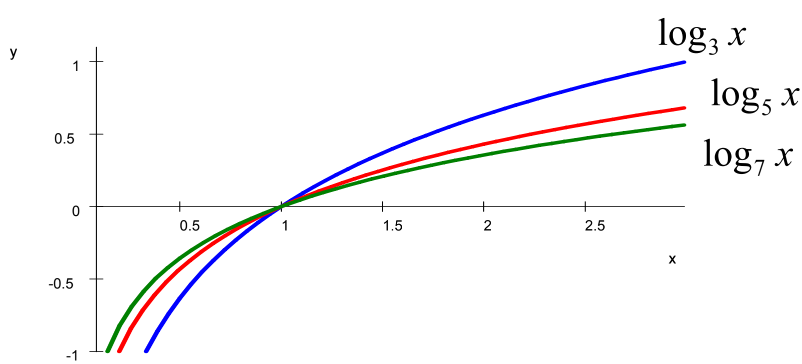
$$f : x \in (0,+\infty) \to \log_a x \in R$$



f strettamente crescente in $(0,+\infty)$

$\sup \log_a x = +\infty; \inf \log_a x = -\infty$

Funzioni logaritmo a>1



Funzioni logaritmo con base *e*

Una funzione logaritmo molto utilizzata è quella che ha per base il numero irrazionale

$$e = 2{,}7182...$$

detto numero di Nepero

$$\Downarrow$$

la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_e x$$

è una funzione strettamente crescente poichè

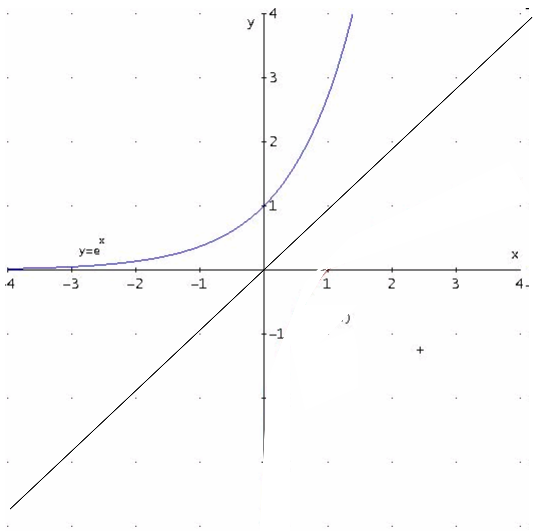
$$e > 1$$

Funzioni logaritmo con base *e*

Molto spesso la funzione logaritmo che ha per base il numero di Nepero viene indicata con uno dei seguenti simboli:

$$f(x) = \log x \quad \text{oppure} \quad f(x) = \ln x$$

Funzioni esponenziale e logaritmo



Funzioni esponenziale/logaritmo

Abbiamo detto che la funzione logaritmo è l'inversa della funzione esponenziale (e viceversa).

Ciò vuol dire che, se:

$$y = a^x \text{, dove } a \text{ è la base dell'esponenziale}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \log_a y, \text{ dove } a \text{ è la base del logaritmo}$$

$$\Downarrow$$

Quindi, affermare che $x = \log_a y$ equivale a dire che x è l'esponente da dare alla base del logaritmo per avere l'argomento

Funzioni logaritmo: esempi

Quindi, affermare che $\log_a y = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = y$

equivale a dire che x è l'esponente da dare alla base del logaritmo per avere l'argomento

$\log_e 1 = x$	$e^x=1$	$x=0$
$\log_2 8 = x$	$2^x=8$	$x=3$
$\log_4 2 = x$	$4^x=2$	$x=1/2$
$\log_3 \frac{1}{3} = x$	$3^x=1/3$	$x=-1$
$Log_{10} 0 = x$	$10^x=0$	$x=$ non esiste

Funzioni esponenziale/logaritmo

Così, funzione esponenziale e funzione logaritmo con base uguale sono l'una l'inversa dell'altra

$\Downarrow$

ricordando le proprietà delle funzioni inverse secondo cui

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{e} \qquad f(f^{-1}(x)) = x$$

si verifica facilmente che

$$a^{\log_a x} = x \qquad \text{e} \qquad \log_a a^x = x$$

Funzioni logaritmo: esempi

$$a^{\log_a x} = x \qquad \text{e} \qquad \log_a a^x = x$$

$$\log_e e^x = \quad x$$

$$\log_2 2^{3x} = \quad 3x$$

$$\log_4 4^{x^2} = \quad x^2$$

$$3^{\log_3 2x} = \quad 2x$$

$$\frac{1}{2}^{\log_{\frac{1}{2}} x} = \quad x$$

Proprieta' del logaritmo

1) $\log_a x^b = b \cdot \log x \qquad (\forall x > 0 \ ; \ \forall b \in R, \ \ a > 0 \ e \ a \neq 1);$

2) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (\forall x > 0, \forall y > 0 \ ; \ \ a > 0 \ e \ a \neq 1);$

3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad (\forall x > 0, \forall y > 0 \ ; \ \ a > 0 \ e \ a \neq 1);$

4) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (a, \ b > 0 \ \ a \neq 1);$ *formula di cambiamento di base nei logaritmi*

5) $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

$$\text{Infatti:} \log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$