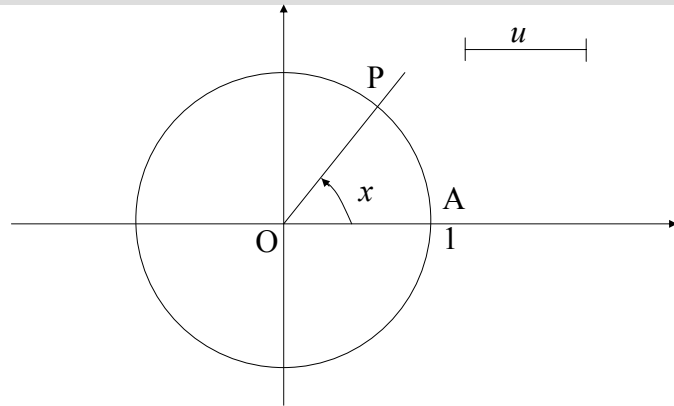


# 17. Funzioni trigonometriche

## Applet delle funzioni trigonometriche

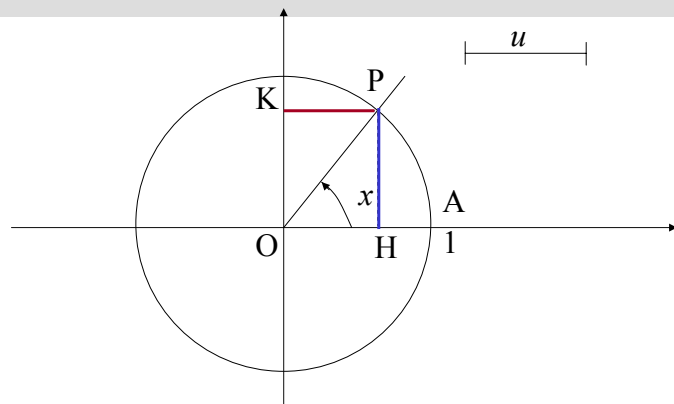
<http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/fun2/fun2.html#sincostan>

## Definizione circonferenza goniometrica



Sia dato un punto  $P$  che si muove sulla circonferenza goniometrica a partire dal punto  $A$  origine degli archi e sia  $x$  l'angolo sotteso dal punto  $P$

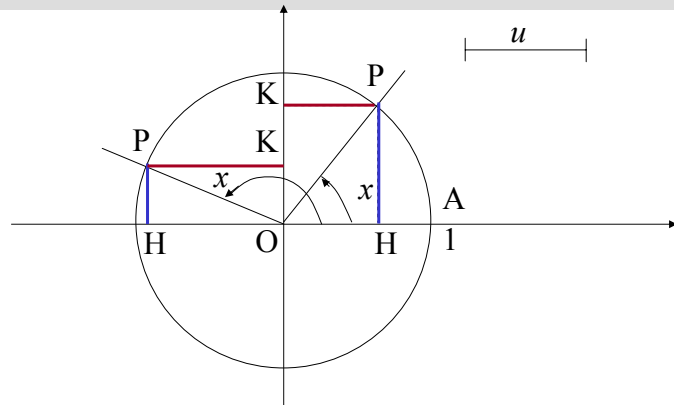
## Definizione seno/coseno



Def. Si definisce  $\text{sen } x$  l'ordinata del punto  $P$  (cioè il segmento  $PH$ )

Def. Si definisce  $\text{cos } x$  l'ascissa del punto  $P$  (cioè il segmento  $PK$ )

## Definizione seno/coseno



Quando il punto  $P$  si muove sulla circonferenza goniometrica variano:

- l'ampiezza dell'angolo  $x$  sotteso dal punto  $P$
- l'ascissa e l'ordinata del punto  $P$

## Definizione seno/coseno



Al variare di  $x$  variano i valori di

*sen  $x$  e cos  $x$*



*sen  $x$  e cos  $x$*  sono funzioni dell'arco  $x$

## Funzione seno

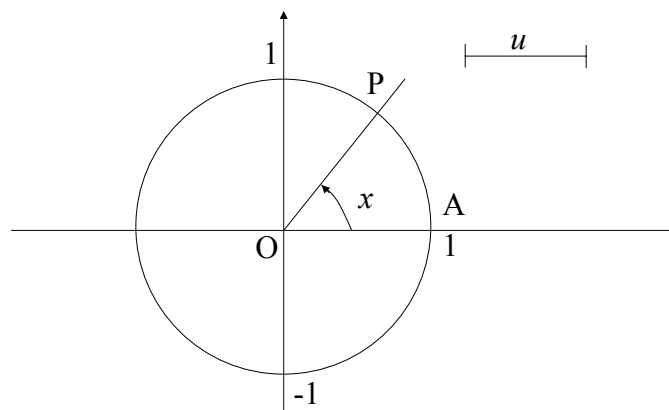
$$f(x) = \text{sen } x$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{sen } x \in [-1, +1]$$

Il **dominio** della funzione seno è tutto  $\mathbb{R}$  poiché un punto  $P$  che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri

(ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a  $2\pi$ )

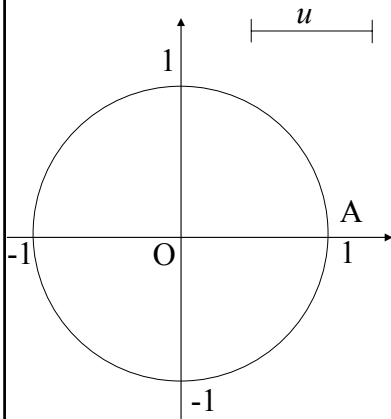
## Funzione seno



Il **codominio** della funzione seno è l'intervallo  $[-1, +1]$  poiché il minimo valore che può assumere l'ordinata del punto  $P$  è  $-1$ , mentre il massimo valore è  $+1$

## Funzione seno: tabella $\Pi$ valori

Per ogni valore fissato dell'arco  $x$ , la funzione seno assume un corrispondente valore numerico



$x$	$\text{sen } x$
0	0
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	1
$\pi$	0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$3/2 \pi$	-1
$2 \pi$	0

17. Funzioni trigonometriche.

## Funzione seno: periodicit 

### OSSERVAZIONE

Ogni giro (pari ad un arco che misura  $2\pi$ )

la funzione *sen x*  
assume gli stessi valori



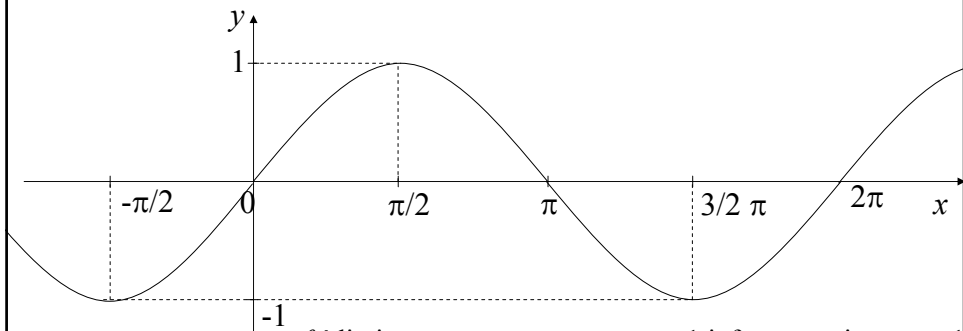
la funzione seno   **periodica** di periodo  $2\pi$

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x, \forall x \in \mathbb{R}$$

<http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/fun2/fun2.html#sincostan>

17. Funzioni trigonometriche.

## Funzione seno: grafico



$f$  è limitata :  $\sup \text{sen} x = \max \text{sen} x = 1$ ;  $\inf \text{sen} x = \min \text{sen} x = -1$

$f$  strettamente crescente in  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$f$  strettamente decrescente in  $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$f$  dispari :  $-\text{sen} x = \text{sen}(-x)$   $\Downarrow$  Non è invertibile su  $\mathbb{R}$ !

## Funzione seno: invertibilita'

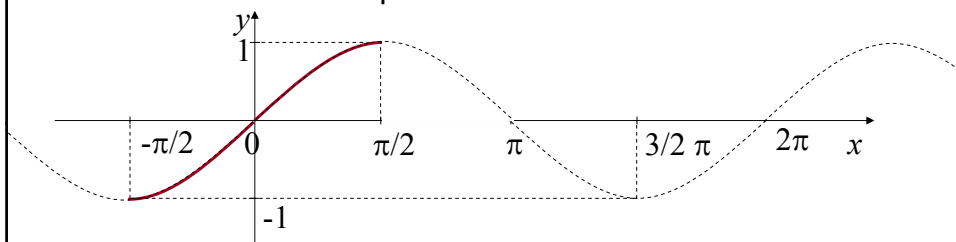
Abbiamo detto che la

FUNZIONE SENO non è invertibile su  $\mathbb{R}$ .

Se però, invece di considerare come dominio tutto  $\mathbb{R}$  consideriamo solo una parte di esso e cioè

l'intervallo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , allora in tale intervallo la

funzione seno risulta strettamente crescente e quindi invertibile



## Funzione coseno

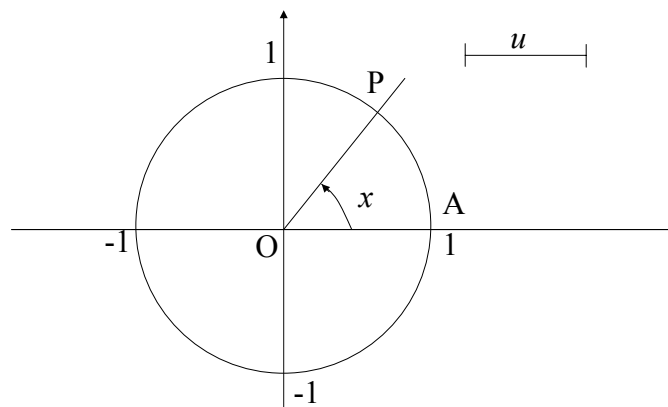
$$f(x) = \cos x$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \cos x \in [-1, +1]$$

Il **dominio** della funzione coseno è tutto  $\mathbb{R}$  poiché un punto  $P$  che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri

(ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a  $2\pi$ )

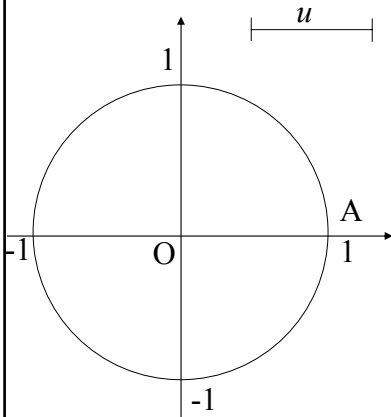
## Funzione coseno



Il **codominio** della funzione coseno è l'intervallo  $[-1, +1]$  poiché il minimo valore che può assumere l'ascissa del punto  $P$  è  $-1$ , mentre il massimo valore è  $+1$

## Funzione coseno: tabella $\pi$ valori

Per ogni valore fissato dell'angolo  $x$ , la funzione coseno assume un corrispondente valore numerico



$x$	$\cos x$
0	1
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	0
$\pi$	-1
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/3$	1/2
$3/2 \pi$	0
$2 \pi$	1

17. Funzioni trigonometriche.

## Funzione coseno: periodicit 

### OSSERVAZIONE

Ogni giro (pari ad un arco che misura  $2\pi$ )

la funzione  $\cos x$   
assume gli stessi valori

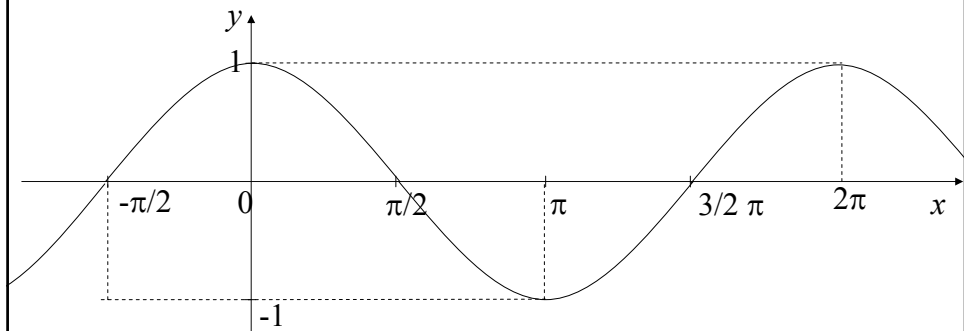


la funzione coseno   periodica di periodo  $2\pi$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$$

17. Funzioni trigonometriche.

## Funzione coseno: periodicità'



$f$  è limitata :  $\sup \cos x = \max \cos x = 1$ ;  $\inf \cos x = \min \cos x = -1$

$f$  strettamente crescente in  $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$f$  strettamente decrescente in  $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$f$  pari :  $\cos x = \cos(-x)$



Non è invertibile su  $\mathbb{R}$ !

## Funzione coseno: invertibilità'

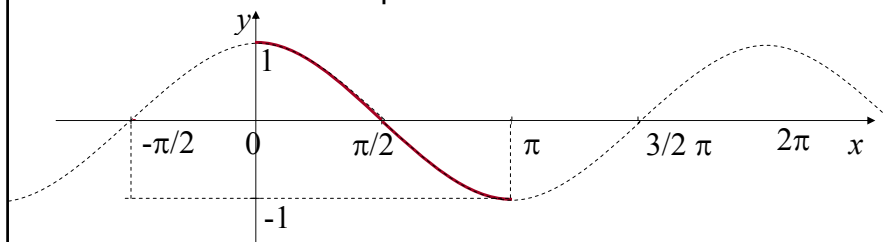
Abbiamo detto che la

**FUNZIONE COSENO** non è invertibile su  $\mathbb{R}$ .

Se però, invece di considerare come dominio tutto  $\mathbb{R}$  consideriamo solo una parte di esso e cioè

l'intervallo  $[0, \pi]$ , allora in tale intervallo la

funzione coseno risulta strettamente crescente e quindi invertibile



## Funzione seno/coseno

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sen } x$  *non esiste*

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{cos } x$  *non esiste*



Pur non esistendo, tali limiti rappresentano qualcosa di limitato (finito) poiché sia la funzione seno che la funzione coseno assumono valori nell'intervallo chiuso e limitato  $[-1, 1]$

## Funzione tangente

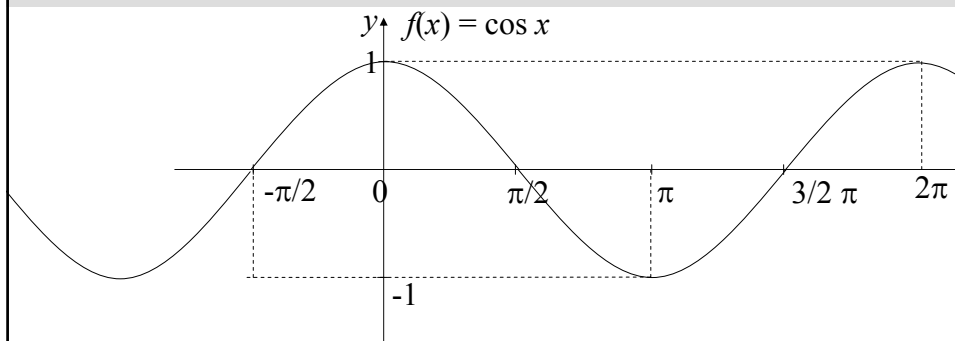
$$f(x) = \tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

Affinchè abbia senso il rapporto  $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ ,  
deve essere il denominatore  $\text{cos } x \neq 0$



Il **dominio** della funzione tangente è tutto  $R$  privato dei valori  $x$  che annullano il coseno al denominatore

## Funzione tangente: dominio



$$\cos x \neq 0 \text{ se } x \neq \dots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$$



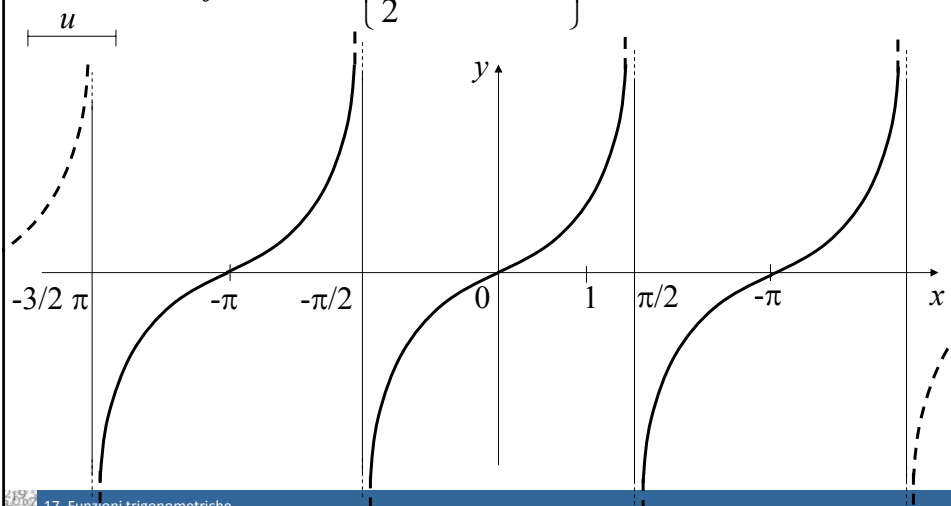
$$\cos x \neq 0 \text{ se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

17. Funzioni trigonometriche.

## Funzione tangente: dominio/codomio

$$f(x) = \tan x$$

$$f : x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \tan x \in \mathbb{R}$$



17. Funzioni trigonometriche.

## Funzione tangente: tabella $\pi$ valori

$x$	$\tan x$
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	/
$\pi$	0
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}$
$3/2 \pi$	/
$2 \pi$	0

17. Funzioni trigonometriche.

## Funzione tangente: periodicità'

Ogni mezzo giro (pari a metà arco che misura  $\pi$ )

la funzione  $\tan x$

assume gli stessi valori



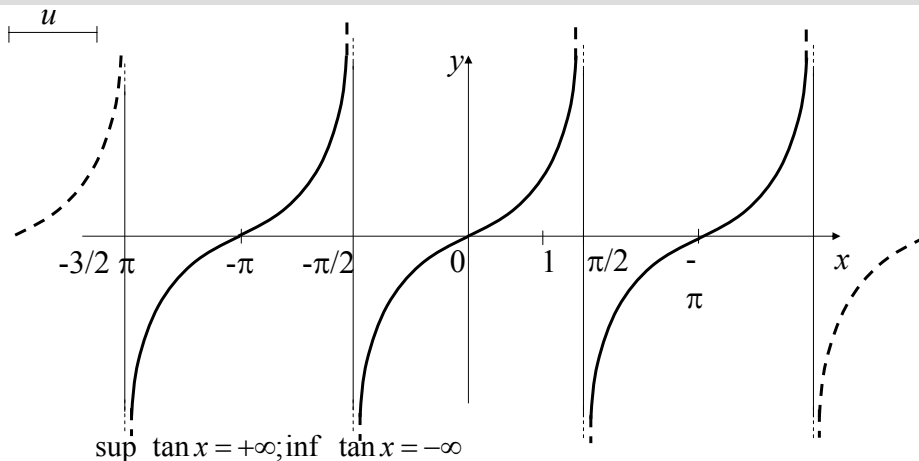
la funzione tangente è periodica di periodo  $\pi$

$$\tan(x + \pi) = \tan x,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

17. Funzioni trigonometriche.

## Funzione tangente



$f$  strettamente crescente in  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \forall k \in \mathbb{Z}$

$f$  dispari:  $-\tan x = \tan(-x)$

## Funzione tangente: invertibilita'

Abbiamo detto che la

FUNZIONE TANGENTE è strettamente crescente

in ciascuno degli intervalli  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Così, se invece di considerare come dominio tutto

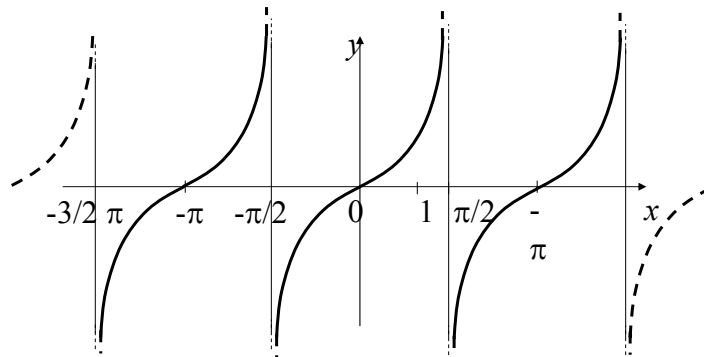
$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

consideriamo solo una parte di esso e cioè

l'intervallo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , allora in tale intervallo la

funzione tangente risulta strettamente crescente e quindi invertibile

## Funzione tangente



- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan x$  non esiste
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \tan x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x = -\infty$

17. Funzioni trigonometriche.

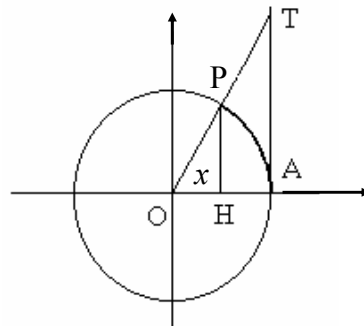
## Funzioni trigonometriche: relazioni

Tra le funzioni trigonometriche viste intercorrono le seguenti relazioni:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(teorema di Pitagora)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$$



Si può inoltre dimostrare che  $\operatorname{tg} x$  è l'ordinata del punto T di intersezione tra la tangente geometrica alla circonferenza nel punto A e la semiretta OT

17. Funzioni trigonometriche.

## Regole di derivazione

- $D \operatorname{sen} x = \cos x$

- $D \cos x = -\operatorname{sen} x$

- $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

