

21. Limiti di funzioni. Funzioni convergenti e divergenti.



Prevedere il futuro: ovvero i limiti

Uno dei vantaggi di studiare i fenomeni naturali con l'aiuto di modelli matematici e' quello di poter ottenere previsioni quantitative

Esempio: destino di un gene con una mutazione vantaggiosa, dinamiche di popolazione, epidemiologia



Indice della lezione

1. Limite infinito all'infinito

- Definizione
- f diverge positivamente/negativamente

2. Limite finito all'infinito

- Definizione
- f convergente
- Asintoti orizzontali

3. Limite infinito al finito

- definizione
- f diverge positivamente/negativamente
- asintoto verticale

4. Limite finito al finito

- definizione
- f convergente



Indice della lezione: ragionato

1. Limite infinito all'infinito

$$l=\infty, c=\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

2. Limite finito all'infinito

$$l=finito, c=\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

3. Limite infinito al finito

$$l=\infty, c=finito \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

4. Limite finito al finito

$$l=finito, c=finito \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$



Nota alla lezione

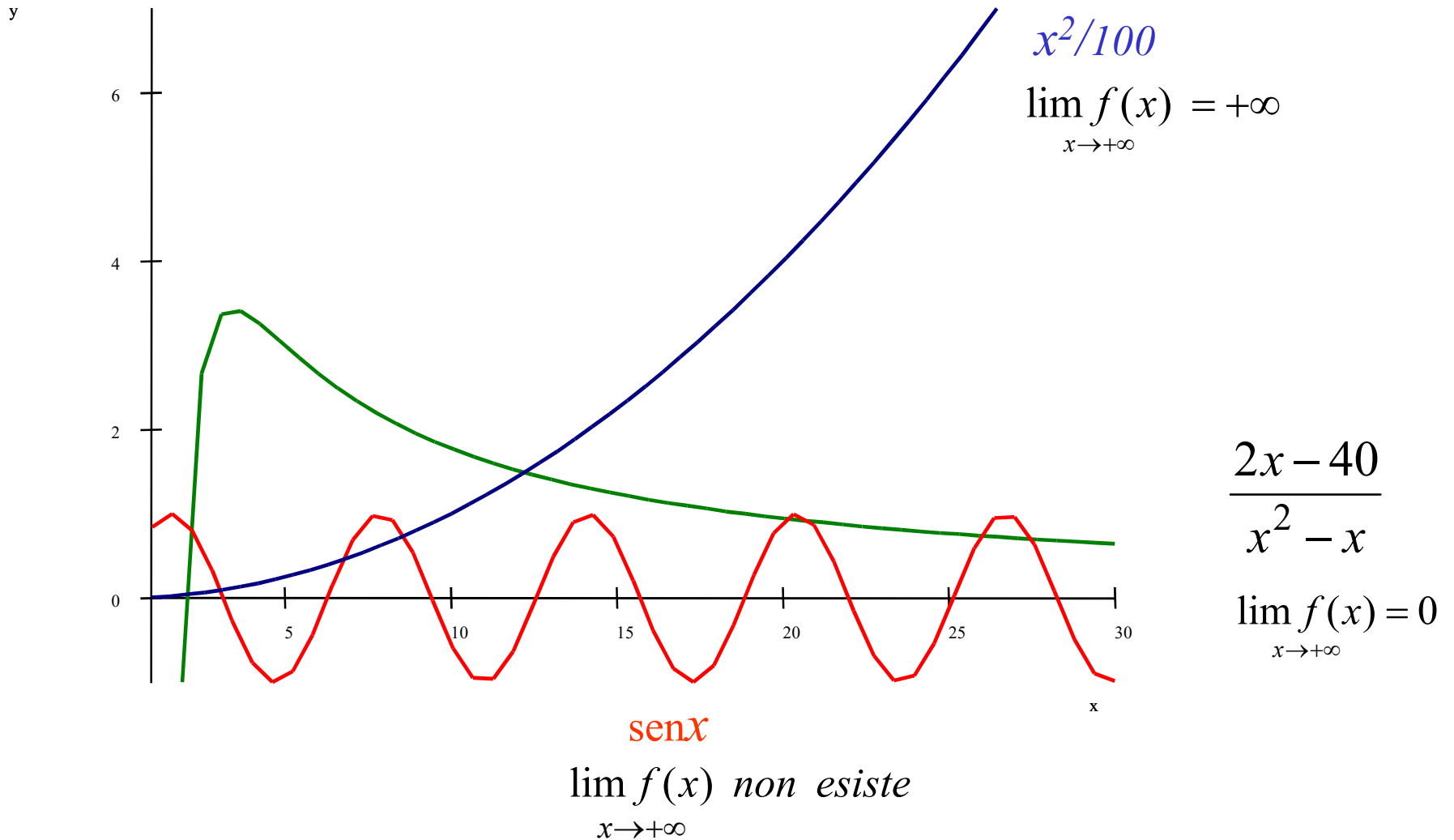
Per semplicità dare le definizioni e fare gli esempi solo con $+\infty$



Limiti all'infinito



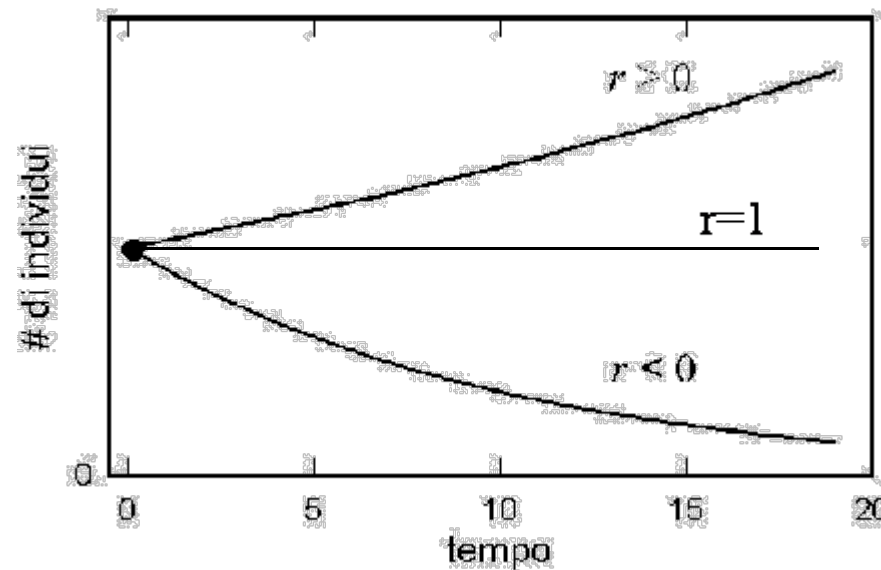
Limiti all'infinito



Destino finale di una popolazione malthusiana

$$N(t) = r^t N_0$$

Dove N_0 e' la numerosità iniziale
r il tasso di crescita netto (natalità-mortalità)

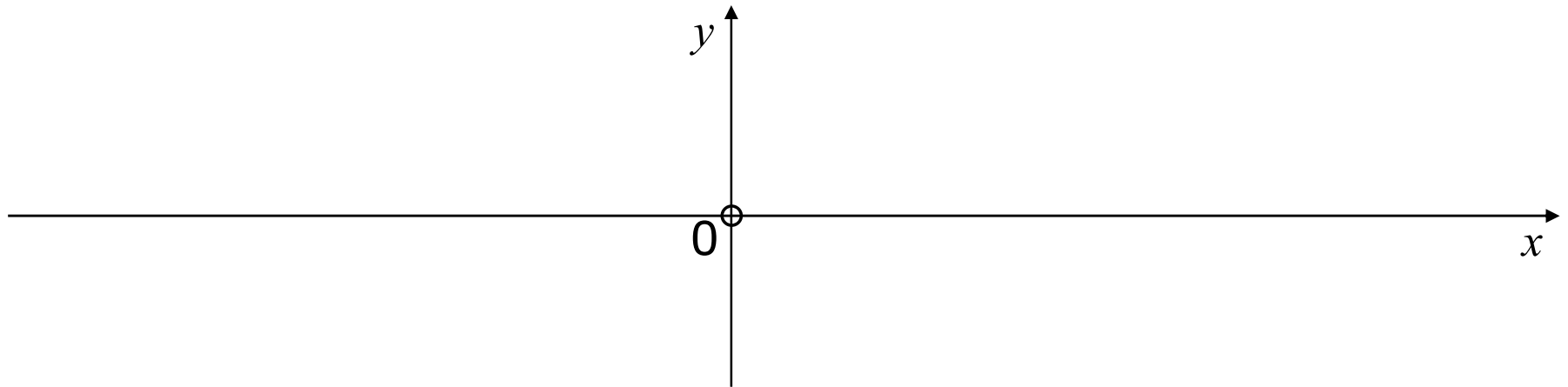


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \log x$

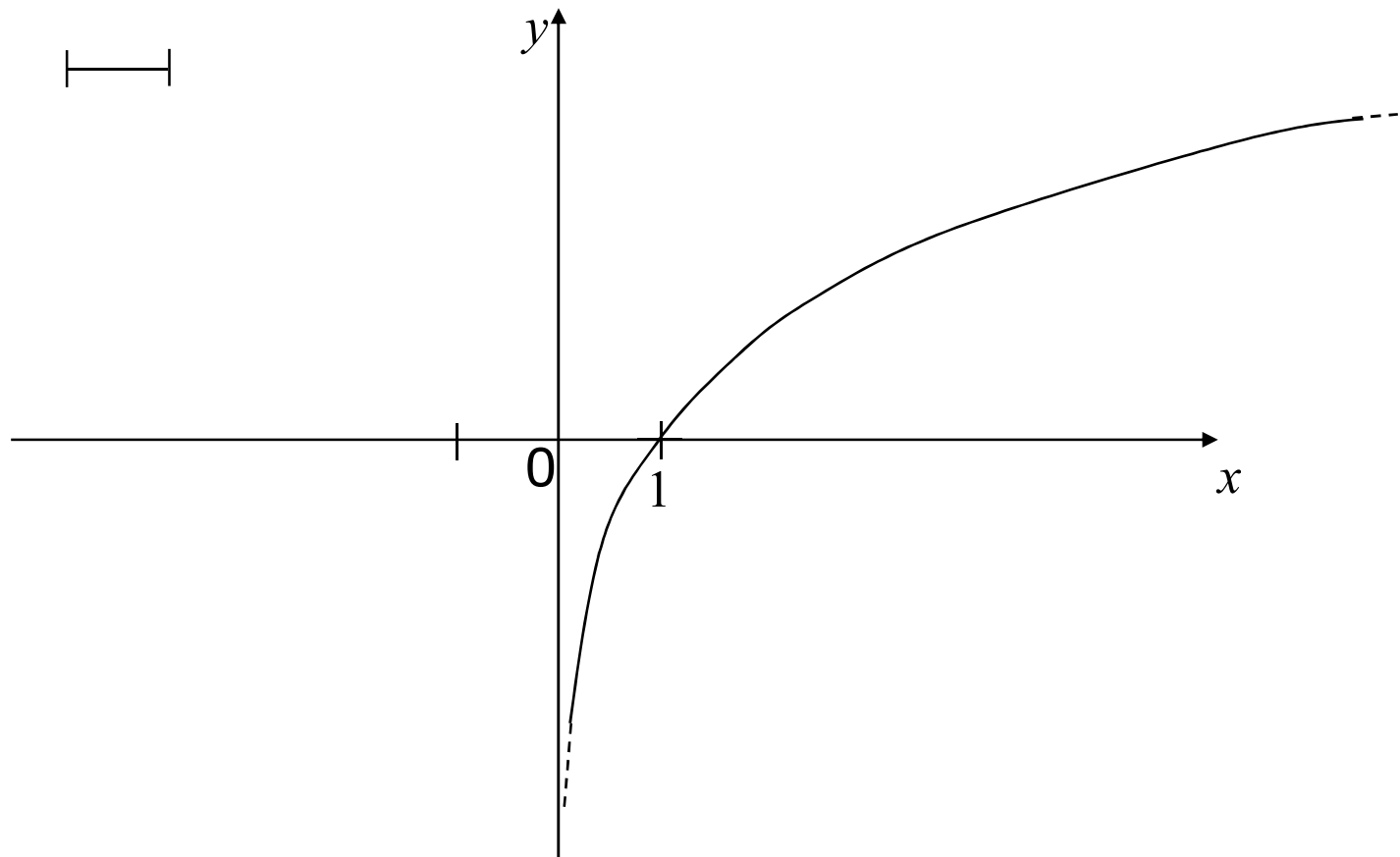
e studiamo il comportamento di tale funzione agli estremi del suo dominio

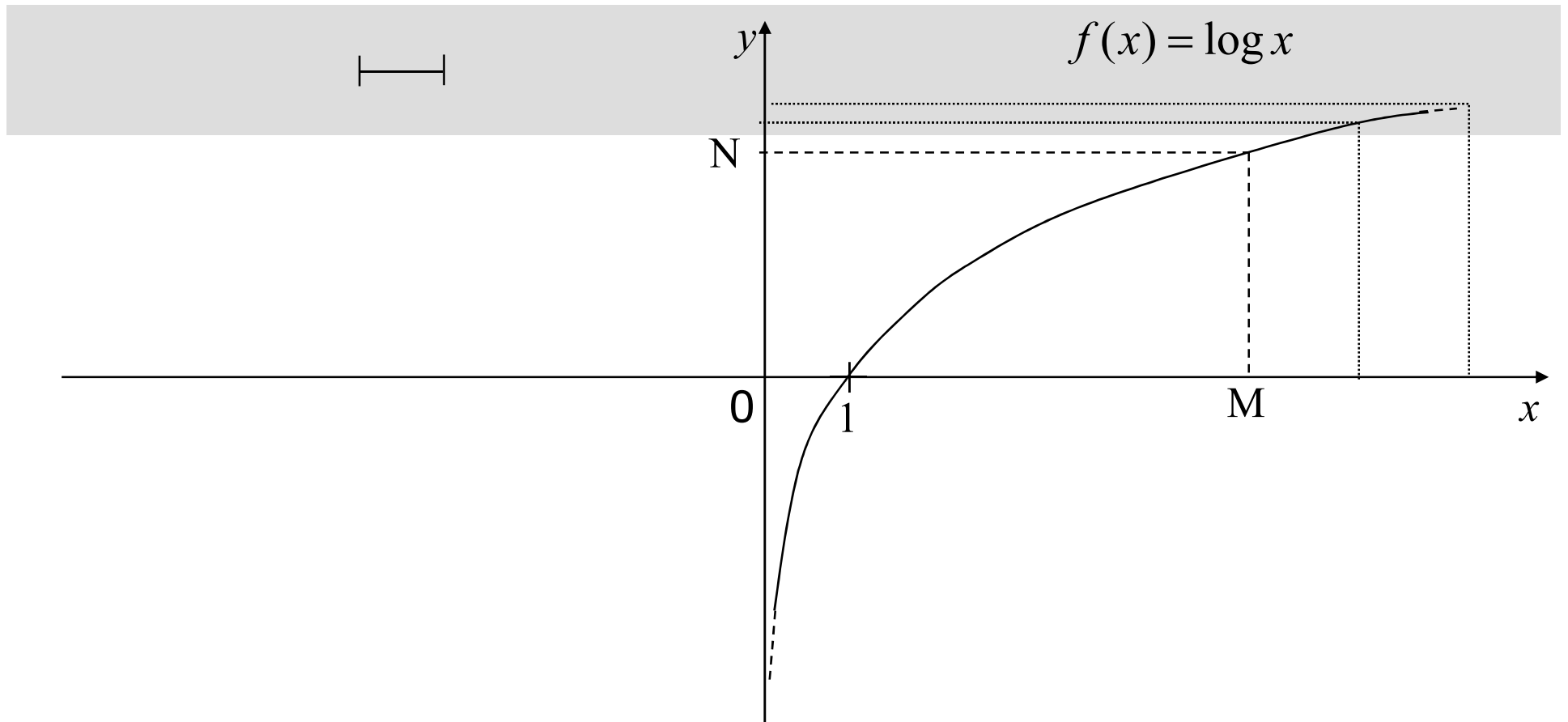


$$X =]0, +\infty[$$

Esempio

Dunque: il grafico della funzione $f(x) = \log x$ è:





In particolare, scegliendo valori della x sempre più grandi del numero M , i corrispondenti valori di f sono sempre più grandi e maggiori del numero N fissato arbitrariamente

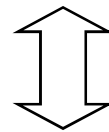


Definizione

Cioe' $f(x)$ supera DEFINITIVAMENTE qualunque soglia arbitraria fissata

Matematicamente vuol dire che:

$$\forall N > 0, \exists M > 0 : \forall x > M \Rightarrow \log x > N$$



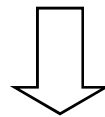
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

Limite infinito all'infinito

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo illimitato I .

- Si dice che f **diverge positivamente** quando x tende a $\pm \infty$ se:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0, \exists M > 0 : |x| > M, f(x) > N$$



Non esiste **asintoto orizzontale** per la funzione f

Limite infinito all'infinito

Quindi, se il limite all'infinito di una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I risulta **infinito**, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

allora la funzione non ammette sicuramente asintoto orizzontale

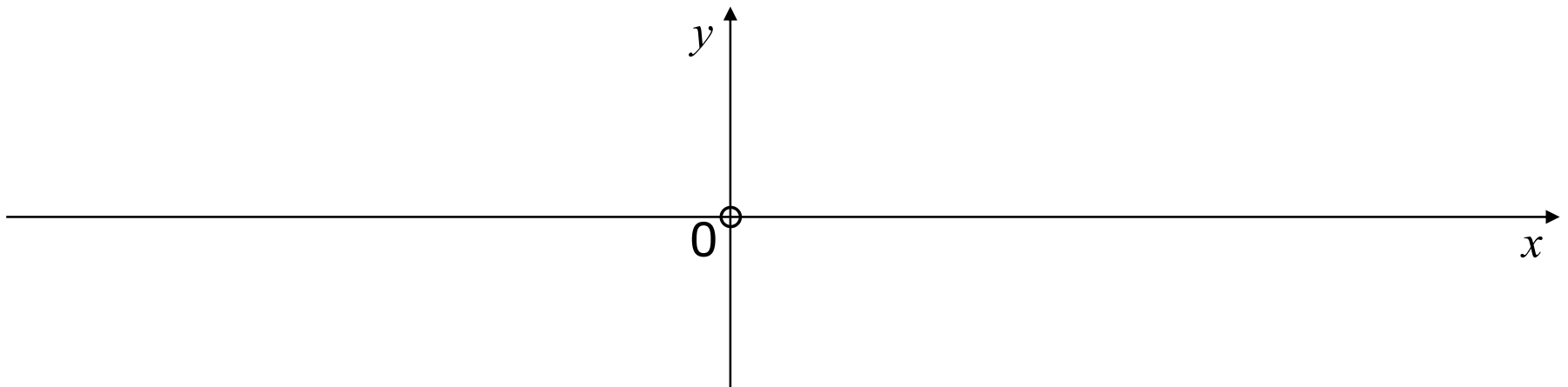


$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$

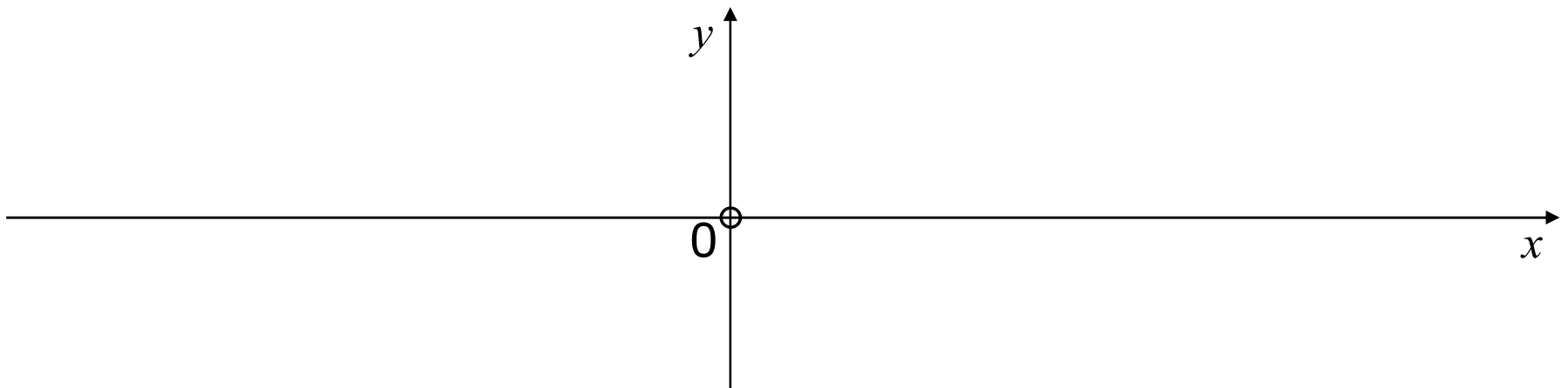
e studiamo il comportamento di tale funzione agli estremi del suo dominio



$$X = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Funzione agli estremi

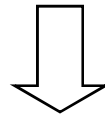
Vediamo cosa succede fornendo alla variabile indipendente x valori prima sempre più piccoli e poi sempre più grandi



Funzione agli estremi

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

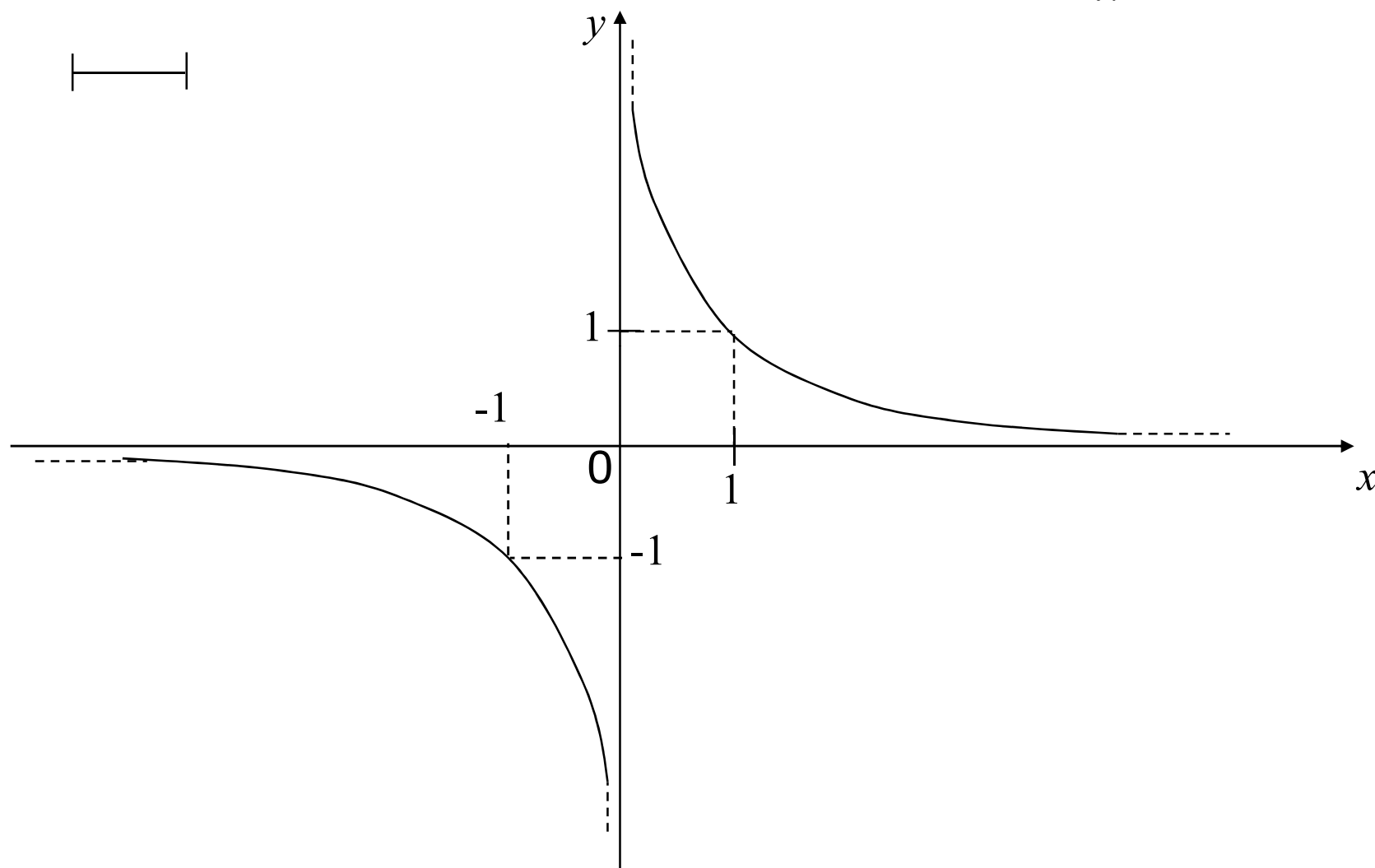
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1	-1	1	1
-10	-0.1	10	0.1
-100	-0.01	100	0.01
-1000	-0.001	1000	0.001
-10000	-0.0001	10000	0.0001

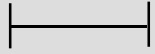


Quando la variabile indipendente x assume valori sempre più piccoli il valore corrispondente $f(x)$ diventa sempre più prossimo allo zero; allo stesso modo, quando la variabile indipendente x assume valori sempre più grandi, il valore corrispondente $f(x)$ diventa sempre più prossimo allo zero

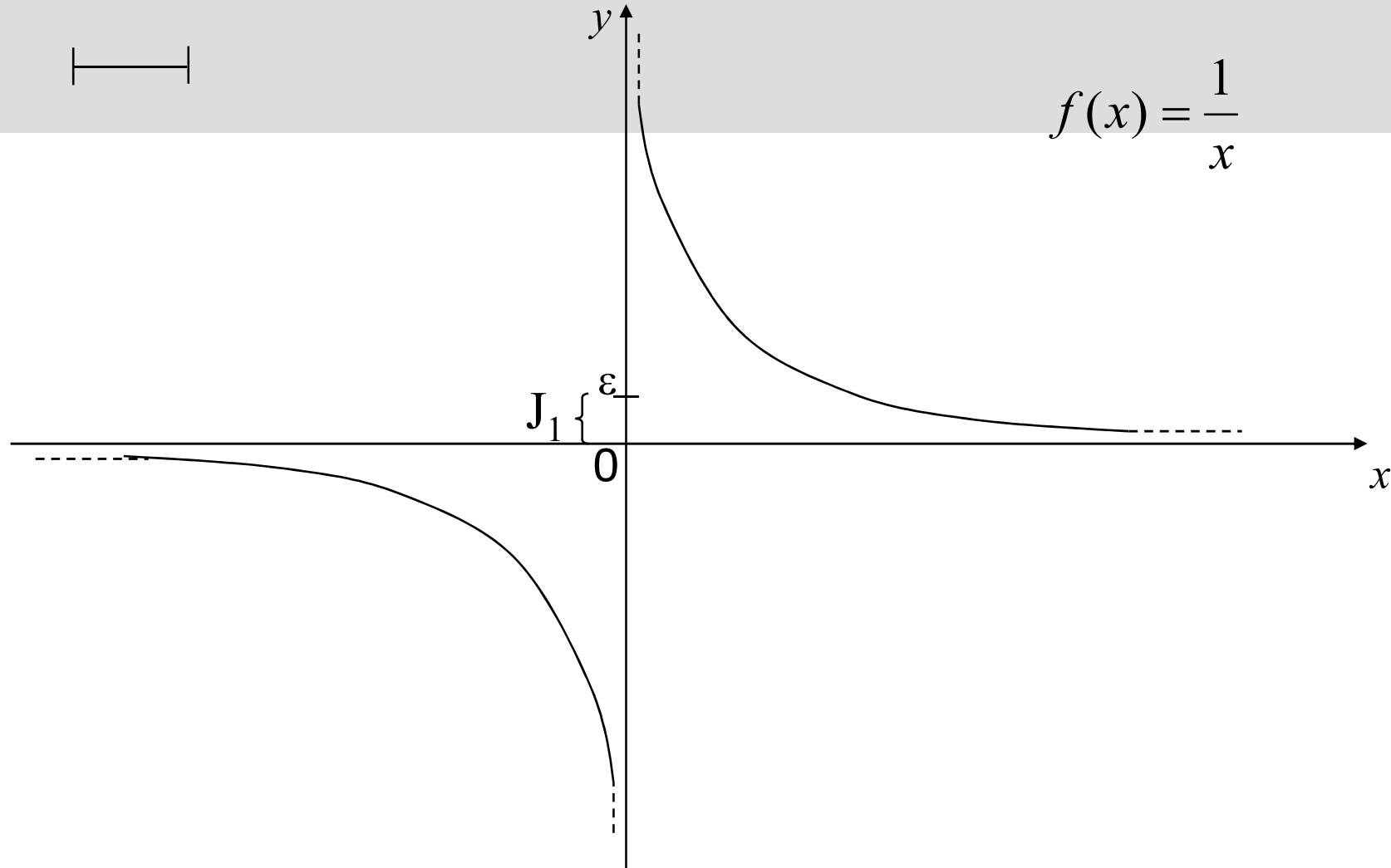
Il grafico di $1/x$

Dunque: il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è:





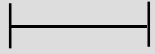
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



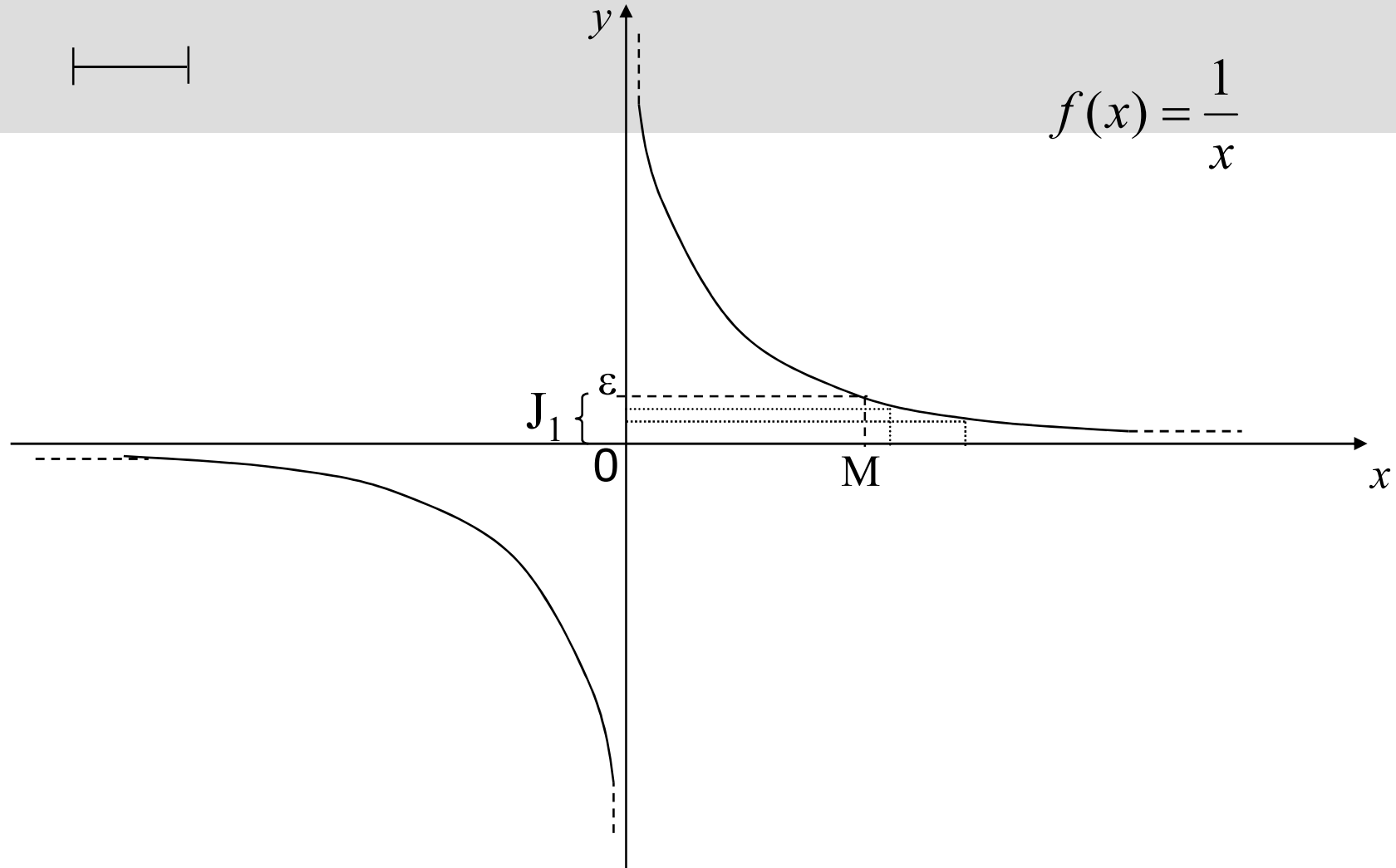
Fissiamo arbitrariamente sull'asse delle ordinate un intorno destro J_1 dello zero

$$J_1 = (0, \varepsilon)$$



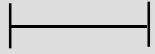


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

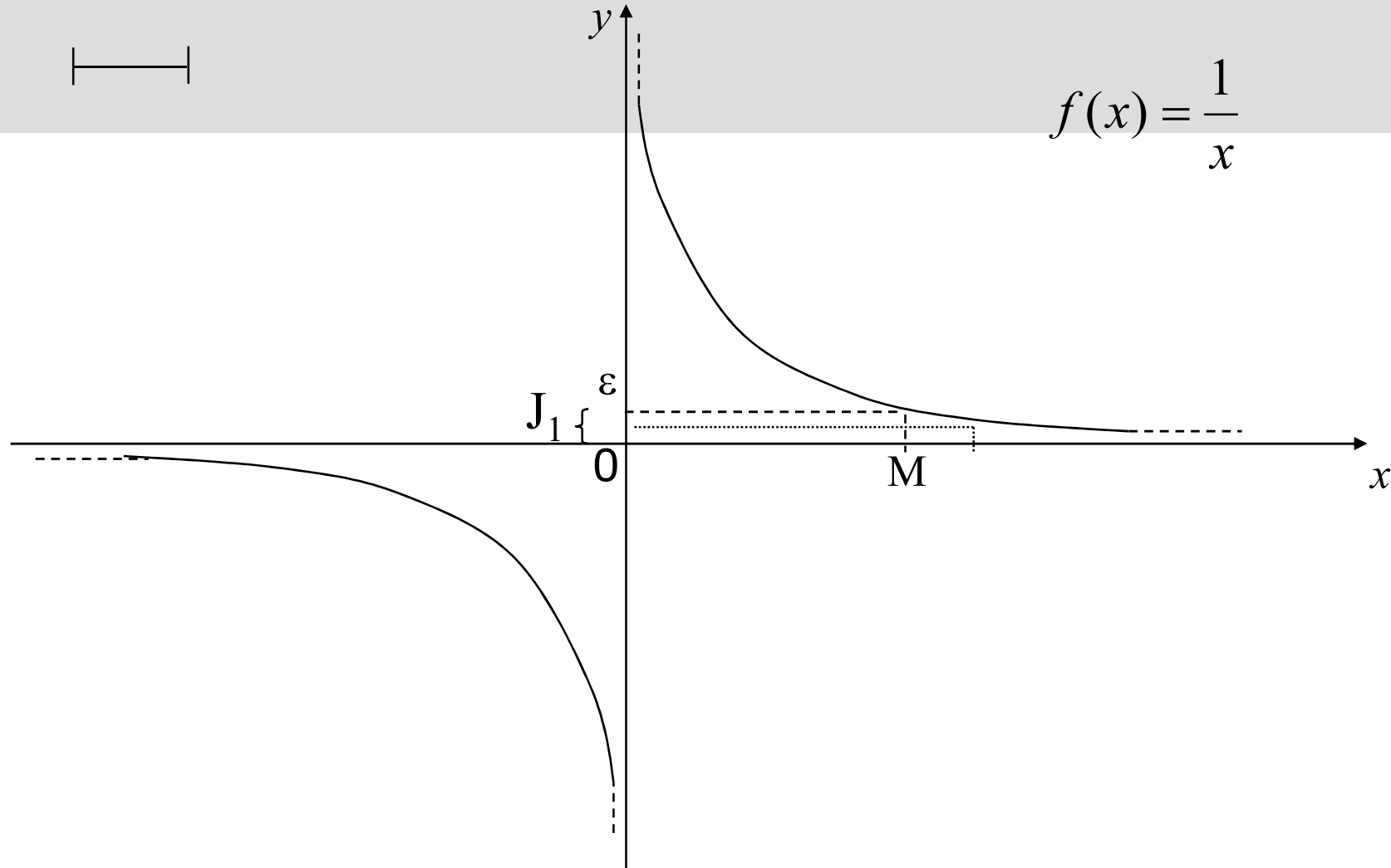


Tutti i valori di f appartenenti a J_1 sono i corrispondenti di valori della x più grandi del numero M che dipende dalla dimensione dell'intorno scelto.



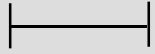


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

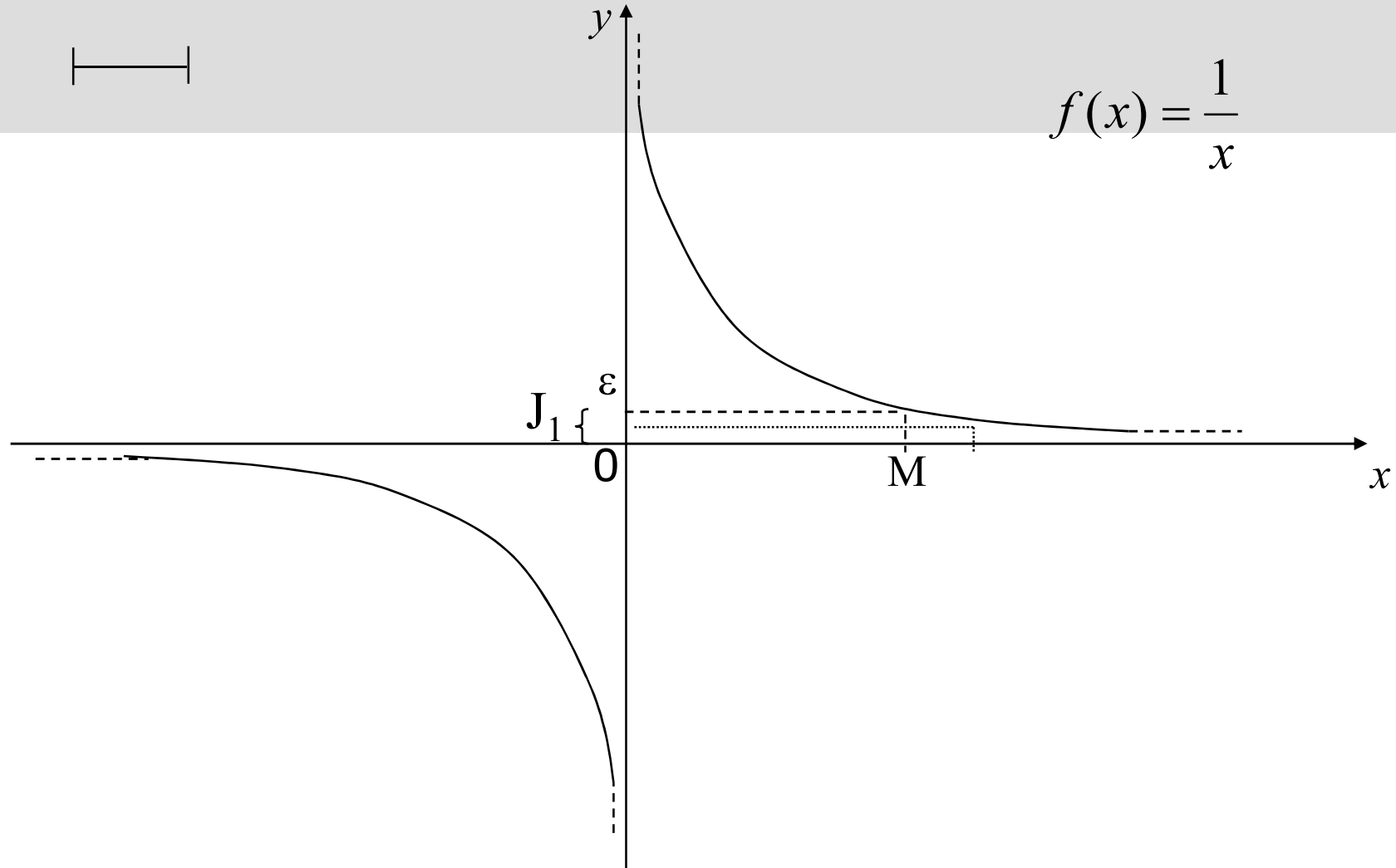


Restringendo ulteriormente l'intorno destro J_1 , il numero M corrispondente diventa sempre più grande e i valori di f appartenenti a J_1 sono sempre i corrispondenti di valori della x più grandi del numero M





$$f(x) = \frac{1}{x}$$



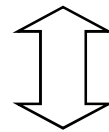
In particolare, scegliendo valori della x sempre più grandi del numero M , i corrispondenti valori di f appartenenti a J_1 sono sempre più prossimi allo zero



Definizione di limite

Utilizzando la nozione di intorno, possiamo scrivere equivalentemente la seguente definizione:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x > M \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Osservazione

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si parla di:

Limite finito all'infinito

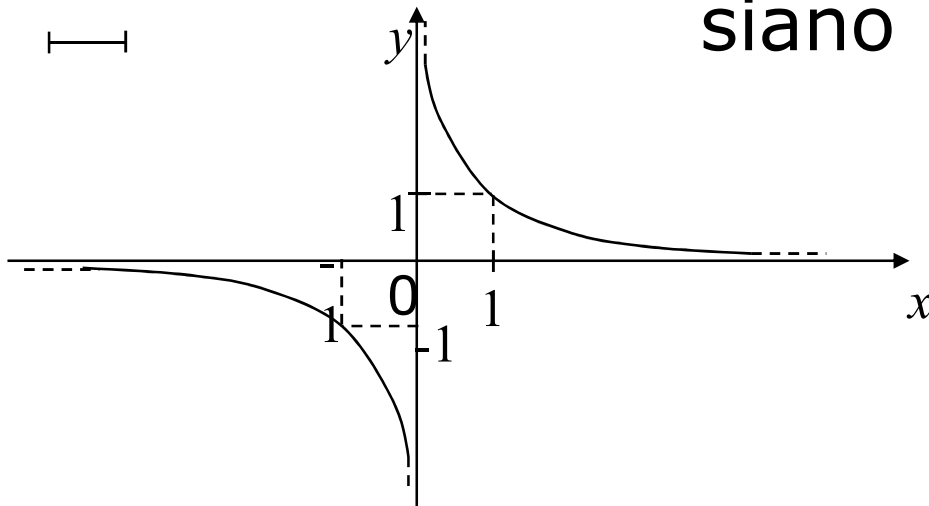


Osservazione

Non sempre succede che per una funzione con dominio non limitato i valori del limite per

$$x \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad x \rightarrow +\infty$$

siano uguali!



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

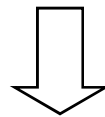


Limite finito all'infinito

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo illimitato I .

- Si dice che f **converge** ad un numero l quando x tende a $\pm \infty$ se:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : |x| > M, |f(x) - l| < \varepsilon$$



La retta $y = l$ è un **asintoto orizzontale** per la funzione f

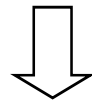
Limite finito all'infinito

- Si dice che f **converge** ad un numero l_1 quando x tende a $+\infty$ se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x > M, |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

- Si dice che f **converge** ad un numero l_2 quando x tende a $-\infty$ se:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x < -M, |f(x) - l_2| < \varepsilon$$



Le rette $y = l_1$ e $y = l_2$ sono un **asintoto orizzontale** per la funzione f a destra e a sinistra rispettivamente



Asintoti orizzontali

Quindi, se il limite all'infinito di una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I risulta **finito**, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$

allora la retta $y = l$ è un

asintoto orizzontale

per il grafico della funzione $f(x)$



Asintoti orizzontali

Se in particolare succede che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2$$

allora il grafico di $f(x)$ ammette due
asintoti orizzontali:

$$y = l_1 \quad \text{a} \quad +\infty$$

$$y = l_2 \quad \text{a} \quad -\infty$$



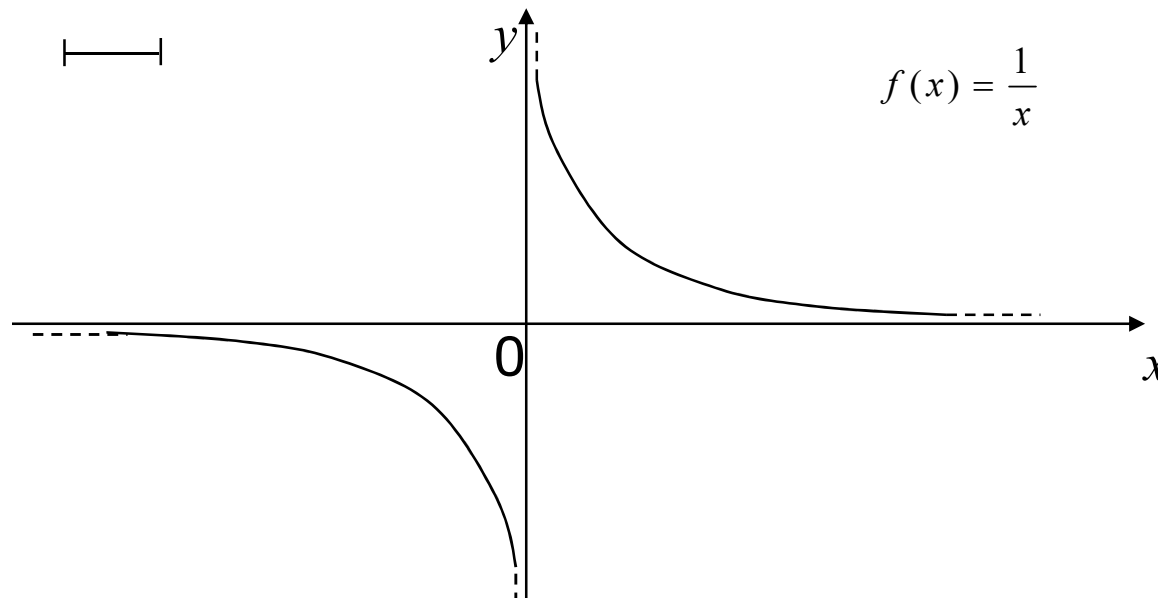
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

Esempio

Torniamo ora a studiare il comportamento della

funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita nell'intervallo:
 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

quando la x assume valori numerici positivi e valori numerici negativi sempre più prossimi allo zero

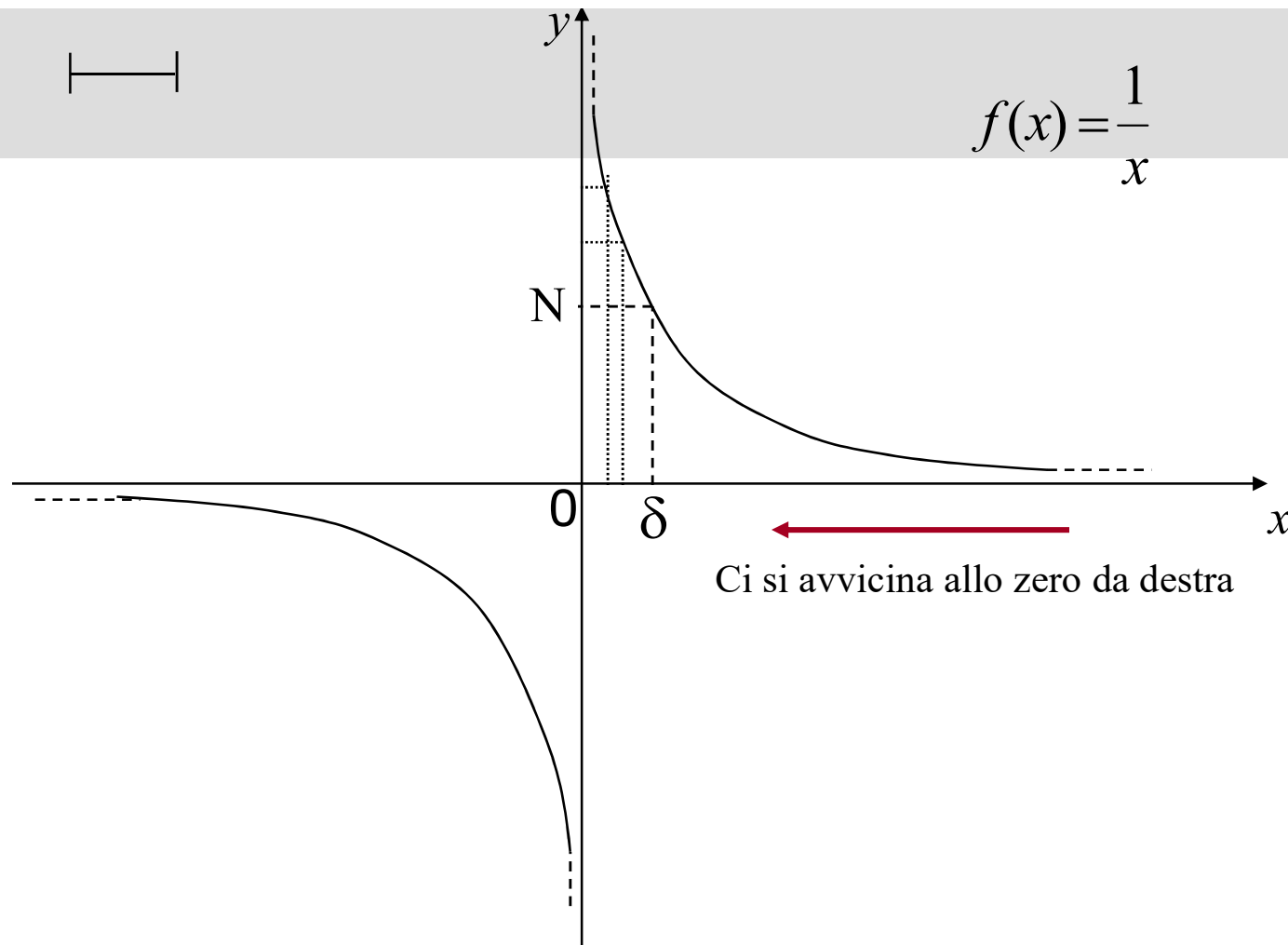


Esempio

x	$f(x)$		x	$f(x)$
1	1		-1	-1
0.1	10		-0.1	-10
0.01	100		-0.01	-100
0.001	1000		-0.001	-1000
0.0001	10000	↓	-0.0001	-10000

Quando la variabile indipendente x assume valori positivi sempre più prossimi allo zero il valore corrispondente $f(x)$ diventa sempre grande; allo stesso modo, quando la variabile indipendente x assume valori negativi sempre più prossimi allo zero, il valore corrispondente $f(x)$ diventa sempre più piccolo





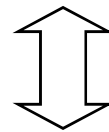
Se fissiamo arbitrariamente sull'asse delle ordinate un numero $N > 0$ molto grande, allora tutti i valori $f(x) > N$ sono i corrispondenti di valori della x che si trovano in un intorno destro dello zero che dipende dal N scelto



Definizione

Tutto ciò, ricordando la nozione di intorno destro, può essere scritto mediante la seguente definizione:

$$\forall N > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (0, \delta) \Rightarrow \frac{1}{x} > N$$

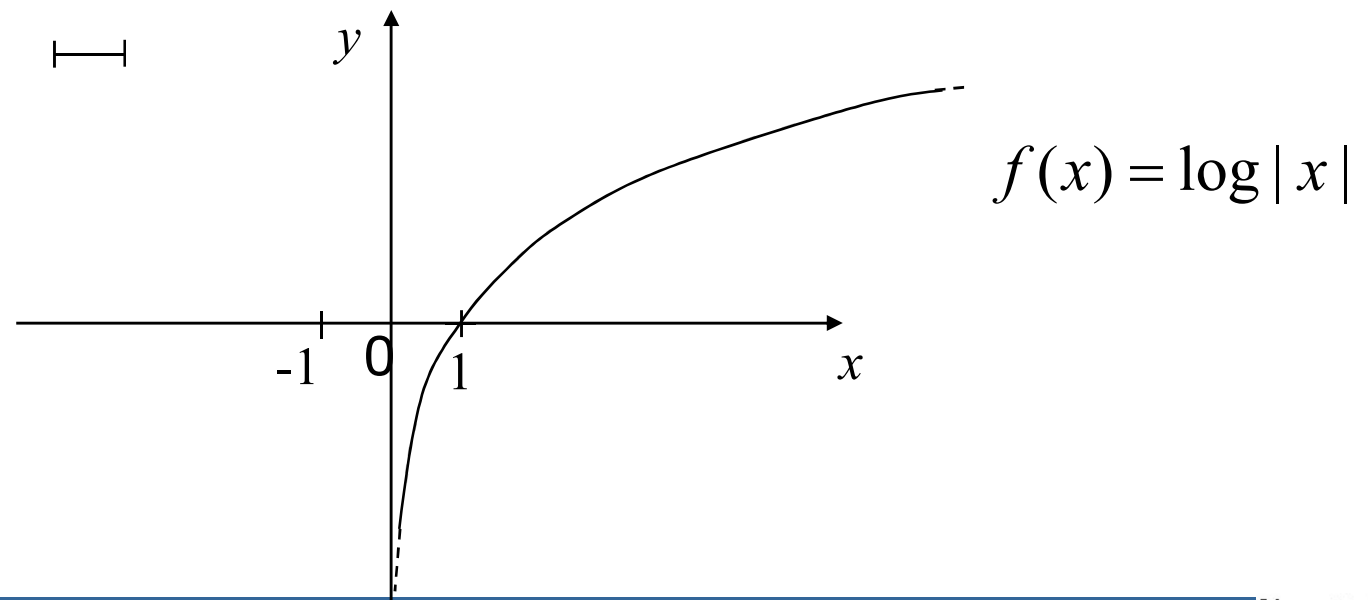


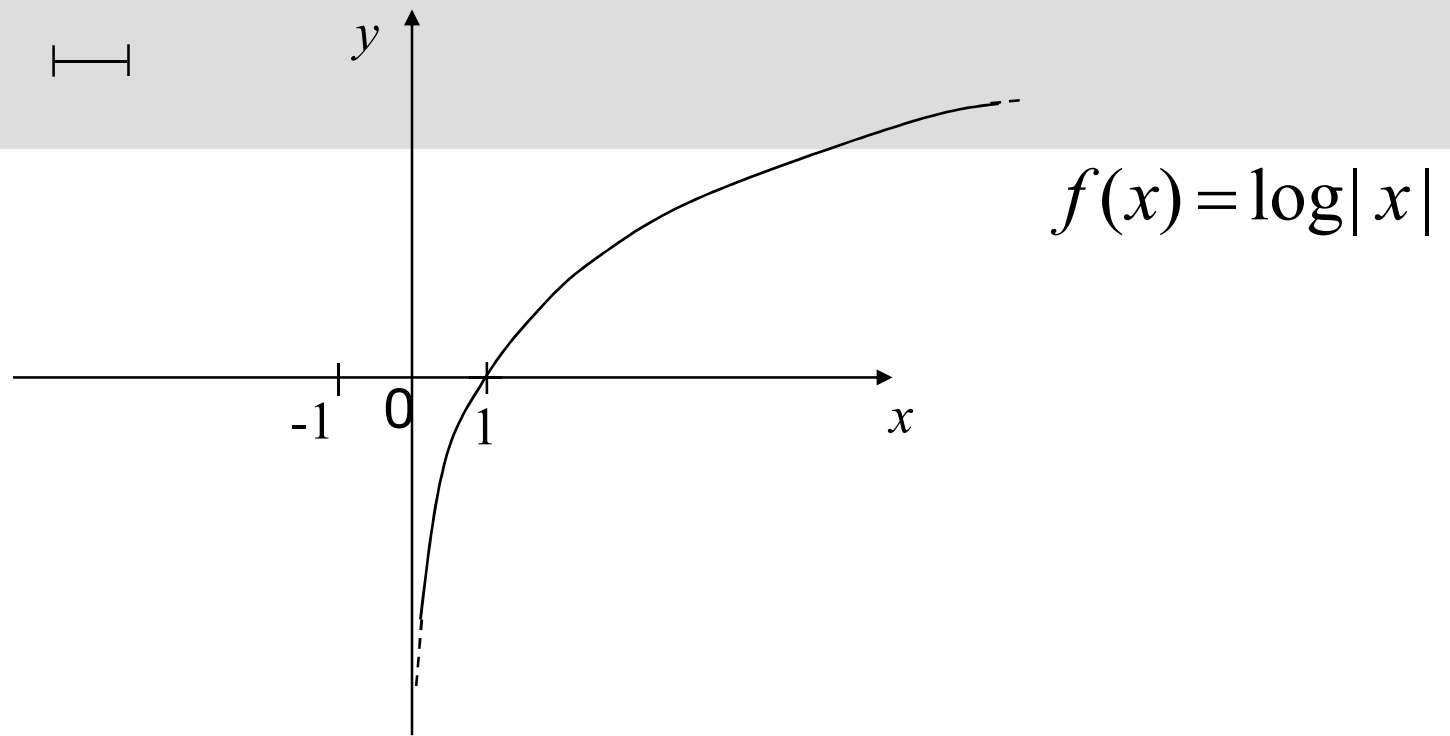
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Esempio

Torniamo ora a studiare il comportamento della
funzione $f(x) = \log x$ definita nell'intervallo:
 $(0, +\infty)$

quando la x assume valori numerici prossimi a zero da
destra





Risulta che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

In tutti e tre gli esempi studiati si parla di:

Limite infinito al finito



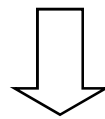
Limite infinito al finito

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo limitato o illimitato I privato eventualmente di un suo punto x_0 .

- Si dice che f **diverge positivamente** quando x tende a x_0 da sinistra e da destra rispettivamente se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ con } x \neq x_0,$$

$$f(x) > N$$



La retta $x = x_0$ è detta **asintoto verticale** per la funzione f

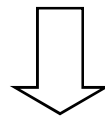


Limite infinito al finito

- Si dice che f **diverge negativamente** quando x tende a x_0 da sinistra e da destra rispettivamente se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ con } x \neq x_0,$$

$$f(x) < -N$$



La retta $x = x_0$ è detta **asintoto verticale** per la funzione f

Asintoti verticali

Quindi, se il limite al finito di una funzione f , a valori reali definita in un intervallo I privato al più di un punto x_0 risulta **finito**, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

allora la retta $x = x_0$ è un

asintoto verticale

per il grafico della funzione $f(x)$



Asintoti verticali

Se in particolare succede che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

allora allo stesso modo, la retta $x = x_0$ è un

asintoto verticale

per il grafico della funzione $f(x)$



Asintoti verticali

Quindi, se il limite al finito di una funzione risulta **infinito**, allora la funzione ammette sicuramente asintoto verticale

$x =$ valore finito del valore a cui tende la x



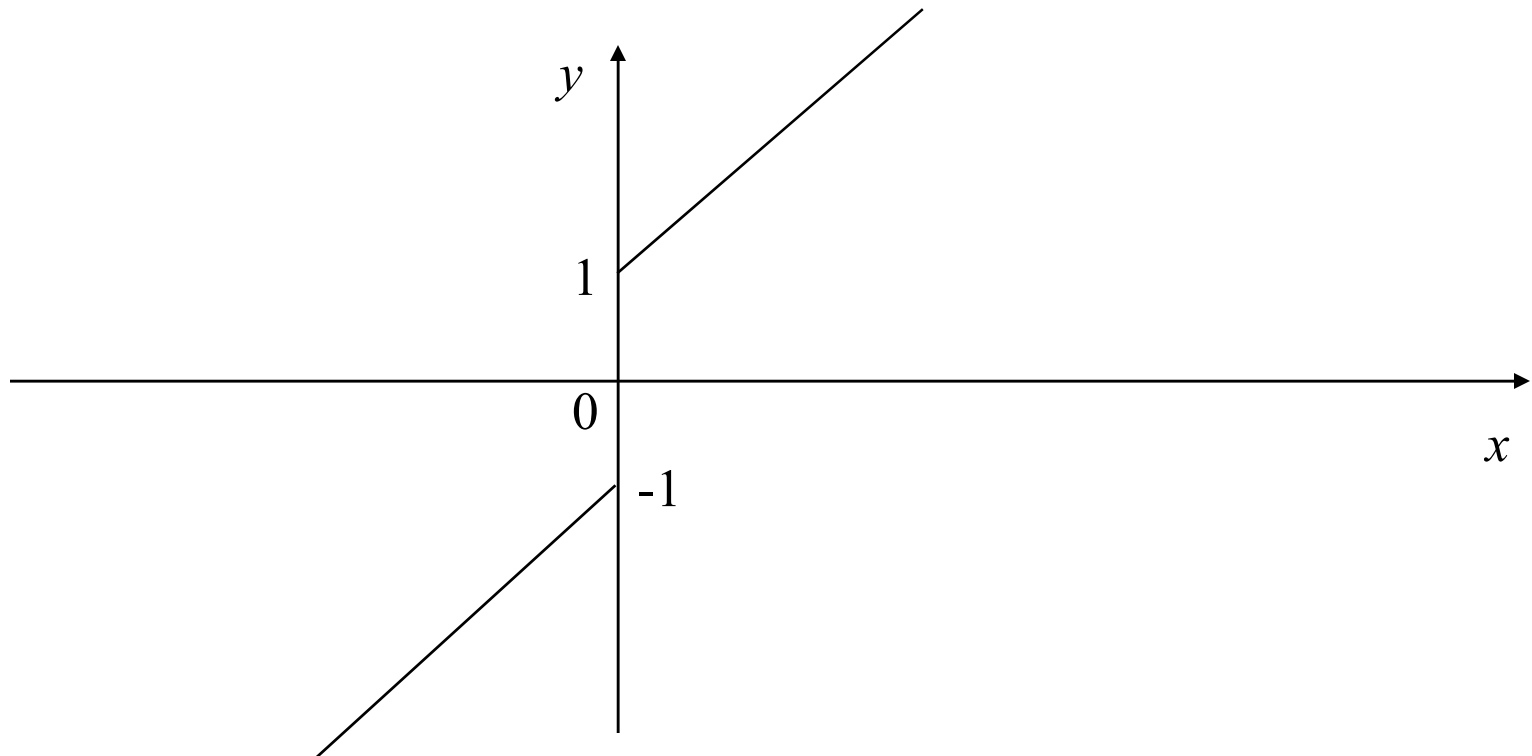
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

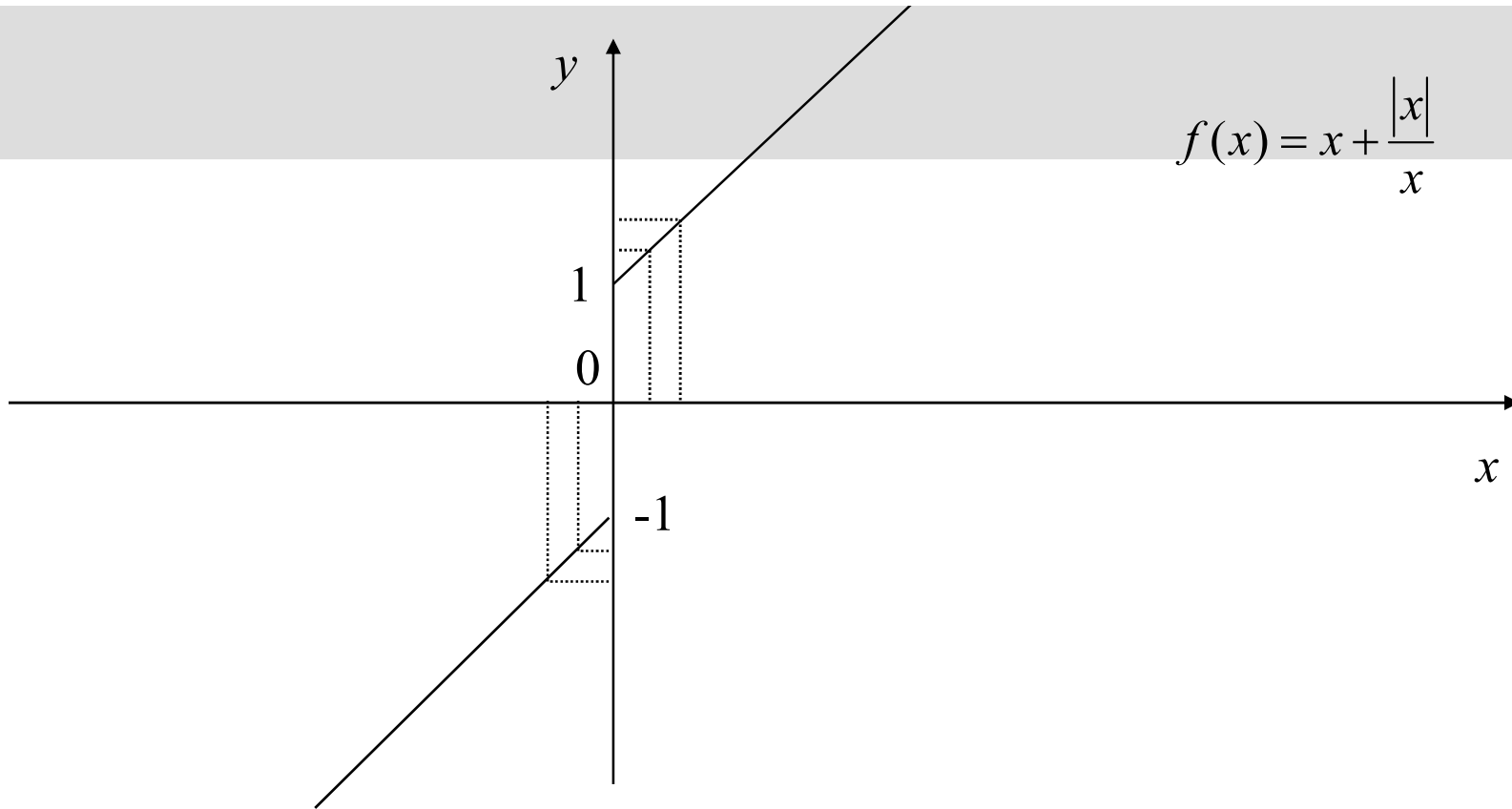
Esempio

Studiamo ora il comportamento della funzione

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x+1, & \text{se } x > 0 \\ x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

definita nell'intervallo: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

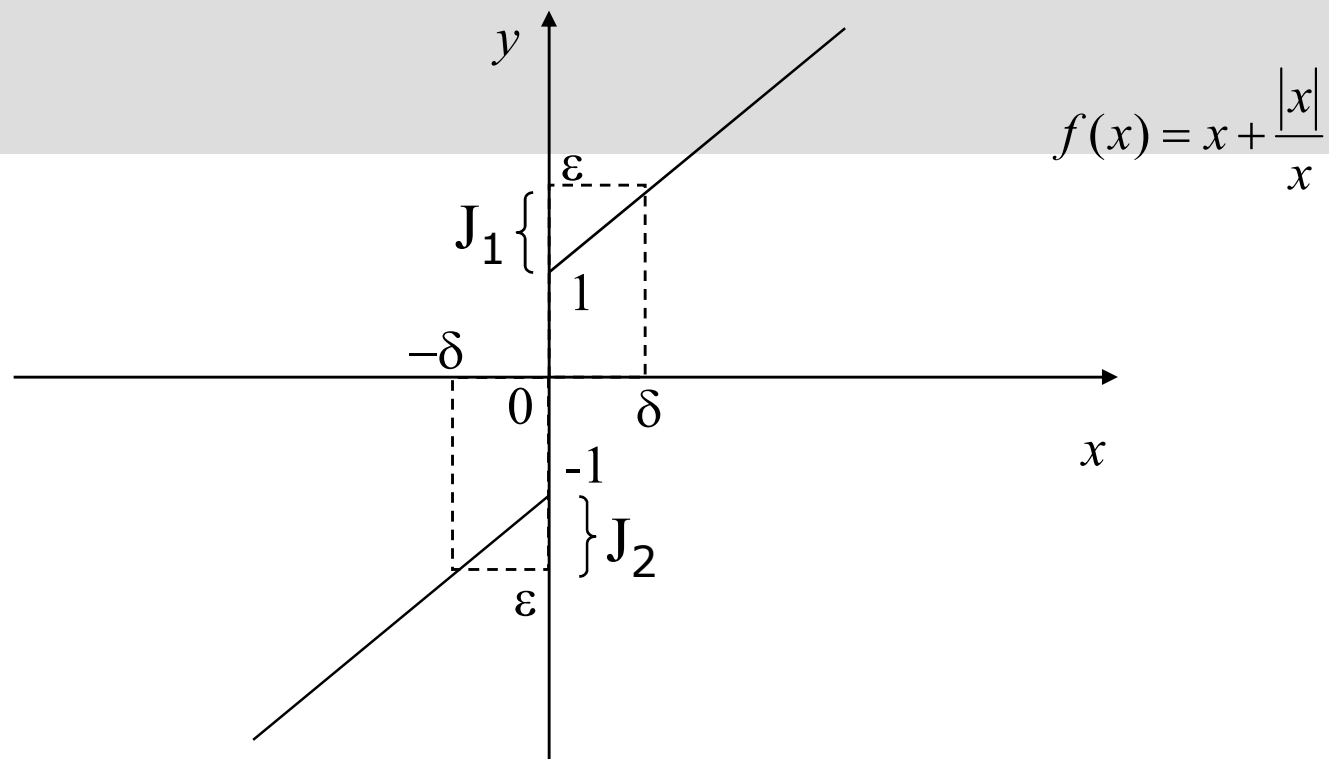




$$f(x) = x + \frac{|x|}{x}$$

quando la x assume valori numerici sempre più prossimi a zero da destra, i corrispondenti valori $f(x)$ si avvicinano sempre di più al numero 1, mentre quando la x assume valori numerici sempre più prossimi a zero da sinistra, i corrispondenti valori $f(x)$ si avvicinano sempre di più al numero -1





Risulta che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) = +1$$

In entrambi gli esempi studiati si parla di:

Limite finito al finito



Limite finito al finito

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo limitato o illimitato I privato eventualmente di un suo punto x_0 .

- Si dice che f **converge** ad un numero l_1 quando x tende a x_0 da sinistra se:

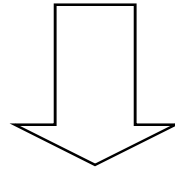
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0), |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

- Si dice che f **converge** ad un numero l_2 quando x tende a x_0 da destra se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), |f(x) - l_2| < \varepsilon$$



Limite finito al finito



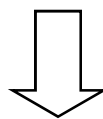
La differenza $l_1 - l_2$ (con $l_1 > l_2$) viene detto **salto** della funzione f e non esiste asintoto verticale

Asintoto verticale

- Si dice che f **converge** ad un numero l quando x tende a x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ con } x \neq x_0,$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$



La funzione f

non ammette **asintoto verticale**

Asintoto verticale

Quindi, se il limite al finito di una funzione
risulta **finito**

allora la funzione non ammette sicuramente
asintoto verticale



Osservazione

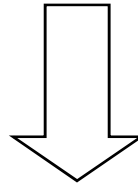
Si può dimostrare che se il limite sinistro l_1 ed il limite destro l_2 al finito di una funzione risultano uguali ($l_1 = l_2 = l$),

allora la funzione ammette globalmente limite e risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$



Osservazione



Si dice che una funzione ammette limite in un punto al finito x_0 se
limite sinistro e limite destro coincidono

Schema riassuntivo

	<i>asintoti</i>
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$	<i>f ha un asintoto orizzontale di equazione $y=l$</i>
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	<i>Non esistono asintoti orizzontale</i>
$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$	<i>$x=c$ e' asintoto verticale per f</i>
$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l_1$ $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l_2$	<i>Non esistono asintoti verticale (l_2-l_1) salto</i>

