19. Funzioni composte

Funzioni composte

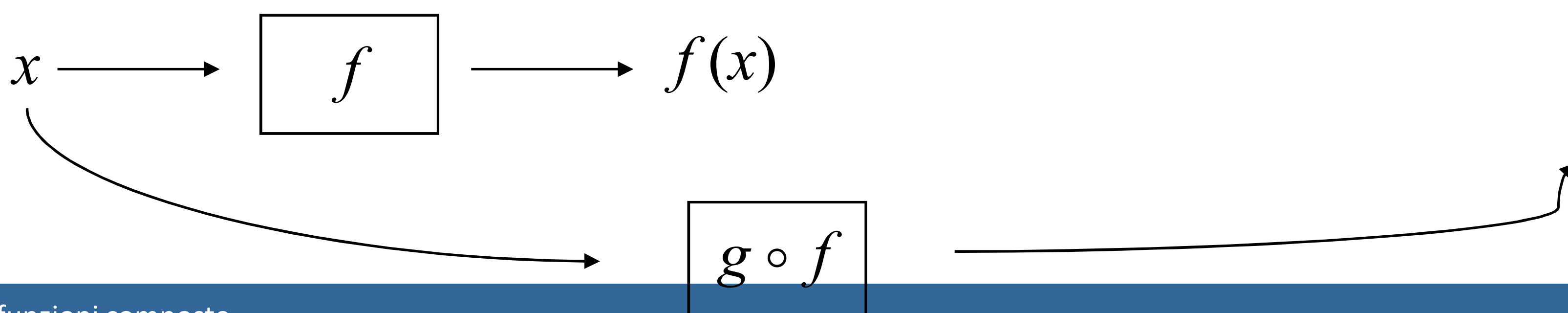
Def. Assegnate le funzioni

$$f : A \to B \quad \text{e} \quad g : X \to Y \quad \text{con} \quad f(A) \subseteq X$$

si definisce la funzione composta $g\big(f(x)\big) \equiv g \circ f$

$$g \circ f : A \xrightarrow{f} f(A) \xrightarrow{g} Y$$

$$g \circ f : x \in A \to g\big(f(x)\big) \in Y$$



Dalle funzioni alla funzione composta

Sia data la funzione

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

Calcoliamo la funzione g(f(x))

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \boxed{f} \arrow[r] & x^3 \arrow[r] & \boxed{g} \arrow[r] & \sqrt{x^3} \\
 & & \boxed{g \circ f} \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

$$g(f(x)) = \sqrt{x^3}$$

Dalla funzione composta alle funzioni

Sia data la funzione

$$g(f(x)) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Calcolare le due funzioni f(x) e g(x)

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \boxed{f} \arrow[r] & \frac{1}{x} \arrow[r] & \boxed{g} \arrow[r] & \ln\left(\frac{1}{x}\right) \\
 & & \boxed{g \circ f} \arrow[urr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \ln(x)$$

Osservazione

Può succedere che siano ben definite sia

$$g(f(x)) \equiv g \circ f \quad \text{che} \quad f(g(x)) \equiv f \circ g$$

ma in generale vale che:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Esercizio

2. Sia data la funzione $f: R \to R$ tale che $f(x) = e^x$

e la funzione $g: R_0^+ \to R$ tale che $g(x) = \sqrt{x}$

verificare se è possibile costruire le composte

$$g \circ f \quad \text{e} \quad f \circ g$$

Dunque:

$f(x) \geq 0, \forall x \in R$ e poiché g è definita in tutto R_0^+, ha senso $g \circ f = \sqrt{e^x}$

poiché f è definita in tutto R, ha senso $f \circ g = e^{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \quad g \circ f \neq f \circ g$$

Esercizio

Se f e g sono due funzioni definite su R:

$f(x) = 3x - 1$

$g(x) = -2x + 4$

Trovare $g(f(x))$ e $f(g(x))$

$g(f(x))= g(3x - 1) = -2\,(3x - 1) + 4=-6x + 6;$

$g \circ f(x) = -6x + 6.$

$f(g(x))= f(-2x + 4)=3\,(-2x + 4) - 1=-6x + 11.$

$f \circ g(x) = -6\,x+ 11$

Esercizio

Se f e g sono due funzioni definite su R:

$f(x) = x^2 - 1$

$g(x) = 2e^x + 1$

Trovare $f(g(x))$

$f(g(x))= (2e^x+1)^2 - 1 =4e^{2x} + 4e^x + 1 - 1$

$f \circ g(x) = 4e^x(e^x + 1)$

Esercizio

Sia data la funzione $f: R \rightarrow R$ tale che $f(x) = x^3$

e la funzione $g: R_0^+ \rightarrow R$ tale che $g(x) = \log(x)$

verificare se è possibile costruire $g \circ f$

Posso fare $g \circ f = \log(x^3)$?

Consideriamo che:

- l'immagine di f è tutto]- ∞,+∞[
- Il dominio di g è]0,+∞[

Potrei rischiare che $x = -3 \Rightarrow x^3 = -27 \Rightarrow \log(-27)$

QUINDI posso farla solo se **impongo (o restringo)** l'immagine di f a solo]0,+∞[