

21 Definizione di Limiti

23 Limiti funzioni elementari

22 Funzioni continue (quindi limiti solo agli estremi)

25. Operazioni con i limiti + forme indeterminate

Esercizi limiti funzioni composte


26 Limiti polinomi (risoluzione di alcune forme indeterminate)

27 Asintoti


24 Teoremi sui limiti

28 Teoremi funzioni continue

29 Discontinuità

 25. Operazioni con i limiti.

25. Operazioni con i limiti

 25. Operazioni con i limiti.

Indice

- Operazioni con i limiti somma/differenza
- Operazioni con i limiti prodotto
- Operazioni con i limiti quoziente
- Tabella riassuntiva (forme indeterminate)
- Calcolo limiti funzioni composte

25. Operazioni con i limiti.

Calcolo dei limiti

Il calcolo dei limiti, almeno per gli esercizi che gli studenti di questo corso dovranno svolgere, si basano su:

- Continuità delle funzioni elementari
- Limiti delle funzioni composte
- Limiti delle funzioni elementari agli estremi del loro dominio
- Operazioni con i limiti
- Trattamento di alcune forme indeterminate

Non verrà utilizzata la definizione di limite, che, ricordiamolo, comunque consente di verificare, non di determinare un limite.

25. Operazioni con i limiti.

OPERAZIONI CON I LIMITI (somma - differenza)

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti finiti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in uno stesso intervallo I (limitato o non limitato) fatta eccezione al più per un punto $x_0 \in I$ (con x_0 punto al finito o all'infinito).

- Operazioni con i limiti finiti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = l \pm m$$

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti infiniti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty \quad (\text{limite della funzione infinita})$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \pm\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = e^5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 5} (e^x + x) = e^5 + 5$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + 3x \right) = +\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = 3x^4 \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x \right) = +\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = \log x$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = \sqrt[3]{2 + x}$$

$$g(x) = x^5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{2 + x} + x^5) = -\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \log_{\frac{1}{2}} x \right)$$

$$+\infty - \infty$$

25. Operazioni con i limiti.

OPERAZIONI CON I LIMITI (prodotto)

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti finiti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ e } k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [kf(x)] = kl$$



Attenzione!

Non vale il viceversa:

cioè, può esistere il limite del prodotto di due funzioni, ma può non esistere il limite di ciascuna funzione a fattore

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti infiniti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } l > 0 \\ \mp\infty, & \text{se } l < 0 \end{cases}$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ e } k \in \mathbb{R}, \text{ con } k \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } k > 0 \\ \mp\infty, & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti infiniti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \\ +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot \sqrt{x^2 + 1}) = -\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = x^{-2}$$

$$g(x) = x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{-2} \cdot (x - 1)) = -\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \cdot e^x \right) = -\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \log x) = +\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$g(x) = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} x \cdot (-x) \right) = +\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$$

$$g(x) = \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\sqrt[3]{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) \cdot g(x)) =: \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x^2 - 5} \cdot \log x) = +\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = x$$

$$g(x) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x)$$
$$-\infty \cdot 0$$

25. Operazioni con i limiti.

OPERAZIONI CON I LIMITI (quoziente)

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti finiti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti infiniti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \text{ finito}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } l \geq 0 \\ \mp\infty, & \text{se } l \leq 0 \end{cases}$$

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti infiniti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ finito} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti finiti

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti finiti

Esercizio. Verificare se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$

Dobbiamo fare limite a 1^+ e 1^-

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = x - 2$$

$$g(x) = x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = \log x$$

$$g(x) = 3x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{3x - 1} = +\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = 3x - 1$$

$$g(x) = \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - 1}{\log x} = 0$$

25. Operazioni con i limiti.

$$f(x) = 3^x$$

$$g(x) = 1 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{1 - x} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti finiti

Se esistono finiti i limiti di f e g in un punto x_0 (al finito o all'infinito) allora esiste finito anche il limite della loro funzione:

somma, differenza, prodotto e quoziente



se f e g sono funzioni **continue** in un punto x_0 al finito, allora anche la loro funzione

somma, differenza, prodotto e quoziente

è una funzione continua in x_0

25. Operazioni con i limiti.

Osservazioni

Relativamente alle regole enunciate per le operazioni con i limiti, esistono situazioni in cui non è possibile stabilire se la somma, il prodotto, la differenza o il quoziente tra due (o più) funzioni ammetta o non ammetta limite

25. Operazioni con i limiti.

Forme indeterminate

In definitiva, quindi:

le regole enunciate relativamente alle operazioni con i limiti perdono significato quando i limiti considerati si presentano nelle forme

$$\boxed{+\infty - \infty} \quad \boxed{0 \cdot \infty} \quad \boxed{\frac{0}{0}} \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

che vengono dette

forme di indecisione o **forme indeterminate**

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti: finale

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l	m				
l	$\pm\infty$				
$\pm\infty$	m				
0	$\pm\infty$				
$\pm\infty$	0				
$+\infty$	$+\infty$				
$-\infty$	$-\infty$				
$+\infty$	$-\infty$				

25. Operazioni con i limiti.

Operazioni con i limiti: finale

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l	m	$l+m$	lm	$\frac{1}{m}$	$\frac{l}{m}$
l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	0
$\pm\infty$	m	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\frac{1}{m}$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ind	0	0
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	ind	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	ind
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	ind
$+\infty$	$-\infty$	ind	$-\infty$	0	ind

25. Operazioni con i limiti.

Calcolo dei limiti

In definitiva, l'ingrediente fondamentale per il calcolo dei limiti è la conoscenza delle proprietà delle funzioni elementari! La funzione di cui si calcola il limite deve essere scissa nelle sue funzioni componenti, e il limite viene calcolato mediante una sequenza di limiti di funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3^{\frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} 3^y = +\infty$$

25. Operazioni con i limiti.

Calcolo dei limiti

In definitiva, l'ingrediente fondamentale per il calcolo dei limiti è la conoscenza delle proprietà delle funzioni elementari! La funzione di cui si calcola il limite deve essere scissa nelle sue funzioni componenti, e il limite viene calcolato mediante una sequenza di limiti di funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^3} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$