

ESERCIZI 5

(1) Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n 2^{1/n}}{n+3} \right)^{n^2}, & \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \sin \frac{1}{n} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left(\frac{n}{n^3+2} \right), & \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tan \left(\frac{1+2^n}{3+2^{2n}} \right) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{1/n} - e^{-1/n} \right), & \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{1/\sqrt{n}} - 1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})}, & \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \log \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

(2) Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie numerica è convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! x^n}{n^n}.$$

(3) Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche al variare del parametro reale α :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^\alpha, & \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^\alpha} \\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}, & \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1}. \end{aligned}$$

(4) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la seguente serie numerica converge:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+a}{1-a} \right)^n.$$

In corrispondenza di tali valori di a calcolare la somma della serie.

(5) Verificare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{9}{4}.$$

(6) Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

(7) Sia

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \leq 100 \\ \frac{1}{n^2} & n \geq 101. \end{cases}$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge?

(8) Sia assegnata una successione numerica a_n tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ è convergente. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ è convergente.

(9) Sia assegnata una successione numerica a_n decrescente, non negativa. Dimostrare che, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n n a_n = 0$.

(10) Sia assegnata una successione numerica a_n tale che $a_n \neq -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Dimostrare che, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge assolutamente.
- Dimostrare che, se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(11) Siano C_n e T_n rispettivamente una successione di cerchi ed una di triangoli equilateri tali che T_1 abbia lato di lunghezza $a > 0$, C_1 sia inscritto in T_1 , T_n sia inscritto in C_{n-1} e C_n sia inscritto in T_n . Calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{area}(C_n).$$