

Corso di Fisica Matematica per Ingegneria Aerospaziale

Prof. G. Fiore

Parte 2: Cinematica dei moti rigidi e vincolati

1 Moti rigidi

Definizione 1 Un sistema materiale \mathcal{S} si dice rigido se la distanza tra due sue qualsiasi particelle é vincolata a rimanere inalterata qualunque sia il moto:

$$\|P(t) - Q(t)\| = \|P_* - Q_*\| \quad \forall t. \quad (1.1)$$

Qui P_*, Q_* denotano le posizioni delle due particelle ad un istante di riferimento t_* prefissato, $P(t), Q(t)$ le loro posizioni all'istante t o *attuali*. Indicheremo con $\mathcal{B}_*, \mathcal{B}_t$ le regioni occupate da \mathcal{S} agli istanti t_*, t (v. Fig. 1 sinistra). Denoteremo un corpo rigido anche come un *solido*.

Definizione 2 Un sistema materiale si muove rigidamente se verifica la (1.1).

(anche una mozzarella si può muovere rigidamente, cioè come se fosse rigida).

Nota: date tre particelle qualsiasi di posizioni attuali P, Q, R di un sistema materiale in moto rigido, anche gli angoli del triangolo PQR rimangono inalterati!! Quindi (v. Fig. 1 destra)

Proposizione 1 \mathcal{S} si muove rigidamente $\Leftrightarrow \exists$ terna $\mathcal{T}' = (\Omega', \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$ (che diremo *solidale*) in cui é in quiete.

Dim: \Rightarrow : scelgo 4 particelle di \mathcal{S} che con le loro posizioni individuino a $t = t_*$ l'origine Ω' e gli estremi dei vettori \underline{e}'_i di una terna ortonormale \mathcal{T}' . Per le proprietà precedenti esse continueranno a individuare una terna ortonormale anche per $t > t_*$, ed inoltre le coordinate di una qualunque altra particella appariranno costanti in questa terna. \Leftarrow : ovvio. \square .

Diremo invece fissa la terna $\mathcal{T} = (\Omega, \underline{e}_i)$ in cui siamo interessati a descrivere il moto. Diremo \mathcal{E}_3 lo spazio puntuale fisso, cioè l'insieme dei punti (geometrici) fermi rispetto a \mathcal{T} , e \mathcal{E}'_3 lo spazio puntuale solidale a \mathcal{T}' , cioè l'insieme dei punti (geometrici) fermi rispetto a \mathcal{T}' . Chiaramente i vettori \underline{e}'_i , visti da \mathcal{E}_3 , *dipendono* dal tempo t : $\underline{e}'_i = \underline{e}'_i(t)$.

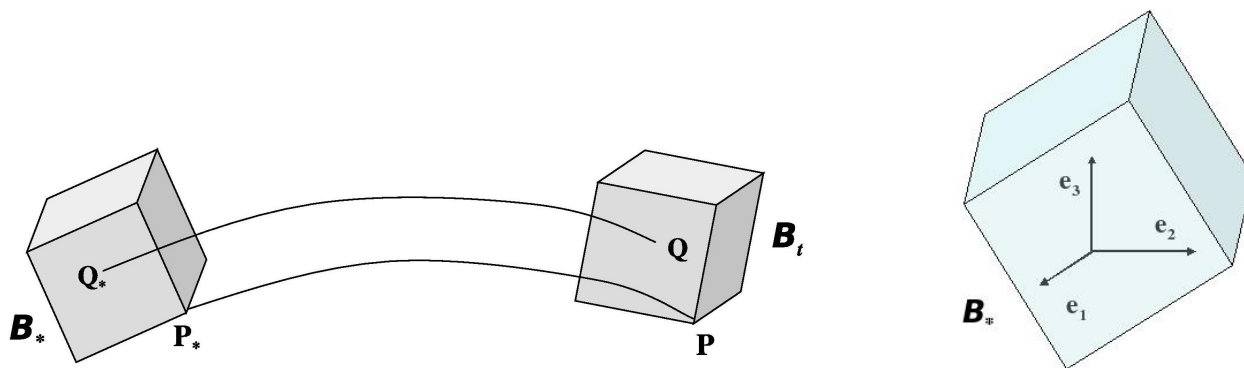


Figure 1:

Abbiamo usato tre lettere per distinguere tre diverse particelle di \mathcal{S} , ma se \mathcal{S} consta di infinite particelle (come accade se queste occupano una regione *continua* tri-, bi-, o mono-dimensionale) né l'alfabeto né l'insieme dei numeri naturali basta ad enumerarle. Per individuarle possiamo invece utilizzare le loro posizioni iniziali $P_* \in \mathcal{B}_*$ come variabili indipendenti (*descrizione lagrangiana*). Conoscere il moto del solido equivale a conoscere $\forall P_* \in \mathcal{B}_*$ e $\forall t$

la posizione $\Pi(P_*, t)$ all'istante t della particella che a t_* aveva posizione P_* . Nella nuova notazione $P(t), Q(t), R(t)$ saranno indicate risp. come $\Pi(P_*, t), \Pi(Q_*, t), \Pi(R_*, t)$. Per ogni t fissato la corrispondenza

$$P_* \rightarrow \Pi(P_*, t)$$

è evidentemente biunivoca, e cioè invertibile. Possiamo perciò individuare le particelle di \mathcal{S} anche tramite le loro posizioni attuali $P \in \mathcal{B}_t$, cioè scegliere le P come variabili indipendenti (*descrizione euleriana*). La particella passante per (e perciò individuata da) P però cambia al passare di t . Indicheremo con $x_P^i, x_{P_*}^i$ le coordinate di P, P_* in \mathcal{T} , e le chiameremo rispettivamente coordinate euleriane e lagrangiane. Entrambe possono essere utilizzate come “etichette” per individuare le infinite particelle di \mathcal{S} : le coordinate lagrangiane le individuano in modo indipendente da t , quelle euleriane in modo dipendente da t . Conoscere il moto $\Pi(P_*, t)$ del corpo equivale a conoscere ad ogni istante t questa corrispondenza biunivoca tra la terna delle coordinate lagrangiane e la terna delle coordinate euleriane associate a ciascuna particella.

Le nozioni di descrizione e di coordinate lagrangiane/euleriane sono utilizzate per descrivere moti anche non rigidi. Notiamo che (solo per moti rigidi!) le coordinate lagrangiane $x_{P_*}^i$ si possono anche interpretare come le coordinate x_P^i delle particelle del corpo (e piú in generale dei punti dello spazio solidale) a t qualsiasi in un particolare riferimento solidale \mathcal{T}' : quello che a t_* era sovrapposto a quello fisso \mathcal{T} . Infatti l'uguaglianza

$$x_P^i = x_{P_*}^i$$

vale a t_* perché a questo istante P coincide con P_* e \mathcal{T}' coincide con \mathcal{T} ; ma vale anche a qualunque altro istante t perché entrambi i membri sono indipendenti da t .

Mostriamo che in un moto rigido la corrispondenza $P_* \leftrightarrow \Pi(P_*, t)$ dipende dal tempo solo attraverso 6 variabili, o in altri termini che la collocazione di un solido nello spazio, o equivalentemente di una sua terna solidale $\mathcal{T}' = (\Omega', \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$, dipende da sole 6 coordinate, v. fig. 2 sinistra: cioè un solido ha 6 *gradi di libertà*. Ad ogni istante la posizione di Ω' rispetto a \mathcal{T} é univocamente individuata dalla terna delle sue coordinate $(x_{\Omega'}^1, x_{\Omega'}^2, x_{\Omega'}^3)$. Date queste ultime, la posizione dell'estremo di uno dei tre versori applicati ad Ω' , per es. il punto P_3 estremo di $(\Omega', \underline{e}'_3)$, dovrà trovarsi su una superficie sferica di centro Ω' e di raggio 1, e quindi sarà individuata da due angoli φ, ϑ (per es. longitudine e latitudine). Dati anche questi ultimi, risulteranno determinate le posizioni di tutti i punti dell'asse $\Omega'P_3$, e basterá l'angolo ψ tra un piano fisso e un piano solidale passanti per $\Omega'P_3$ per specificare completamente la posizione della terna solidale. Gli angoli φ, ϑ, ψ , scelti in modo opportuno, sono i cosiddetti *angoli di Eulero*. Riassumendo, P é funzione di P_* e delle 6 variabili $x_{\Omega'}^1, x_{\Omega'}^2, x_{\Omega'}^3, \varphi, \vartheta, \psi$. Esplicitamente,

$$\sum_{j=1}^3 \underline{e}_j x_P^j = P - \Omega = [P - \Omega'] + [\Omega' - \Omega] = \sum_{i=1}^3 \underline{e}'_i x_{P_*}^i + \sum_{j=1}^3 \underline{e}_j x_{\Omega'}^j = \sum_{i,j=1}^3 (\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j) \underline{e}_j x_{P_*}^i + \sum_{j=1}^3 \underline{e}_j x_{\Omega'}^j, \quad (1.2)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la decomposizione di \underline{e}'_i nella base ortonormale (\underline{e}_j) ; i coseni direttori $A_j^i := \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j$ dipendono esclusivamente da φ, ϑ, ψ . Da questa relazione vediamo che $P = \Pi(P_*, t)$ dipende da t solo attraverso $x_{\Omega'}^1, x_{\Omega'}^2, x_{\Omega'}^3, \varphi, \vartheta, \psi$. In termini delle coordinate, omettendo i pedici P, P_* , la relazione precedente si scrive

$$x^j = \sum_{i=1}^3 A_i^j(t) x^i + x_{\Omega'}^j, \quad A_i^j(t) := \underline{e}_j \cdot \underline{e}'_i(t). \quad (1.3)$$

Teorema 1 (Formule di Poisson) $\forall t \exists!$ vettore $\underline{\omega}(t)$, detto velocità angolare, indipendente dalla particolare terna solidale $(\Omega', \underline{e}'_i)$ scelta e tale che

$$\frac{d}{dt} \underline{e}'_i(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{e}'_i(t) \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Esso è dato da

$$\underline{\omega} := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j. \quad (1.5)$$

Dim:

1. Esistenza. Innanzitutto derivando rispetto a t la relazione di ortonormalità $\underline{e}'_j \cdot \underline{e}'_i = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j = i \end{cases}$ si trova per ogni $i, j = 1, 2, 3$

$$\dot{\underline{e}}'_j \cdot \underline{e}'_i = -\underline{e}'_j \cdot \dot{\underline{e}}'_i. \quad (1.6)$$

Inoltre ricordiamo che dall'ortonormalità segue anche, qualunque sia il vettore \underline{x} ,

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j (\underline{e}'_j \cdot \underline{x}) \quad (1.7)$$

in particolare per $\underline{x} = \dot{\underline{e}}'_i$. Infine ricordiamo la seguente proprietà del doppio prodotto vettoriale:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{a}(\underline{b} \cdot \underline{c}), \quad (1.8)$$

che useremo ponendo $\underline{a} = \underline{e}'_j$, $\underline{b} = \dot{\underline{e}}'_j$, $\underline{c} = \underline{e}'_i$. Allora

$$\dot{\underline{e}}'_i \stackrel{(1.7)}{=} \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j (\underline{e}'_j \cdot \dot{\underline{e}}'_i) \stackrel{(1.6)}{=} - \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j (\dot{\underline{e}}'_j \cdot \underline{e}'_i) \stackrel{(1.8)}{=} \sum_{j=1}^3 [(\underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j) \times \underline{e}'_i - \dot{\underline{e}}'_j (\underline{e}'_j \cdot \underline{e}'_i)] = \left(\sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j \right) \times \underline{e}'_i - \dot{\underline{e}}'_i$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo di nuovo usata la relazione di ortonormalità), da cui

$$2\dot{\underline{e}}'_i = \left(\sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j \right) \times \underline{e}'_i \stackrel{(1.5)}{=} 2\underline{\omega} \times \underline{e}'_i \quad \Rightarrow \quad (1.4).$$

2. Unicità. Detto $\underline{\omega}^*$ un vettore con analoghe proprietà, sarà $\frac{d}{dt} \underline{e}'_i(t) = \underline{\omega}^*(t) \times \underline{e}'_i(t)$. Sottraendo membro a membro troviamo

$$[\underline{\omega}(t) - \underline{\omega}^*(t)] \times \underline{e}'_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, 3;$$

$(\underline{\omega}(t) - \underline{\omega}^*(t))$, dovendo essere quindi parallelo a $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3$, sarà quindi nullo.

3. Indipendenza dalla terna solidale. Sia $(\Omega'', \underline{e}''_j(t))$, un'altra terna ortonormale solidale; allora i 9 coseni direttori $O_i^j := \underline{e}'_j \cdot \underline{e}''_i$ sono *indipendenti* da t (essi formano una matrice O ortogonale, per la precisione) e tali che $\underline{e}''_i(t) = \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j(t) O_i^j$. Derivando rispetto a t troviamo

$$\frac{d}{dt} \underline{e}''_i = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j(t) O_i^j = \sum_{j=1}^3 \dot{\underline{e}}'_j(t) O_i^j \stackrel{(1.4)}{=} \sum_{j=1}^3 \underline{\omega} \times \underline{e}'_j(t) O_i^j = \underline{\omega} \times \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j(t) O_i^j = \underline{\omega} \times \underline{e}''_i. \quad \square$$

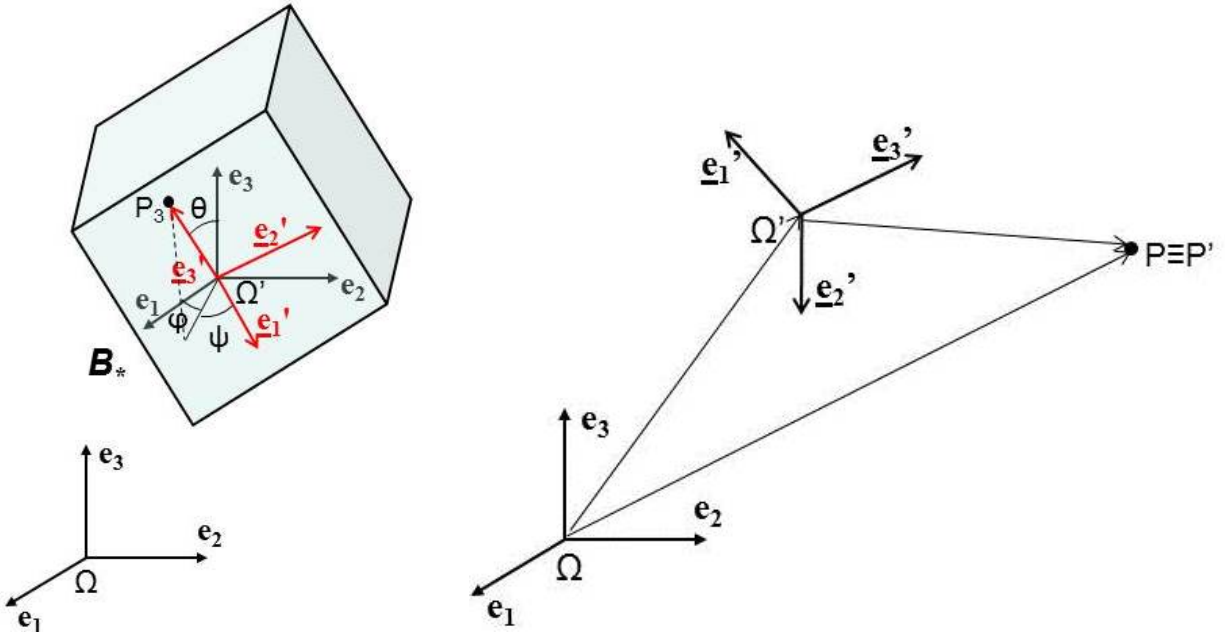


Figure 2:

Proprietá delle velocità dei moti rigidi

Siano $P(t), Q(t)$ le posizioni nello spazio fisso \mathcal{E}_3 all'istante t di due particelle del solido \mathcal{S} , o piú in generale due punti dello spazio \mathcal{E}'_3 solidale a \mathcal{S} . Le derivate rispetto a t $\underline{v}_P = \dot{P}$, $\underline{v}_Q = \dot{Q}$ saranno le loro velocità rispetto a \mathcal{E}_3 .

Proposizione 2 (*Formula fondamentale dei moti rigidi*)

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_Q(t) + \underline{\omega}(t) \times (P(t) - Q(t)) \quad (1.9)$$

Dim. Nel riferimento solidale $P(t) - Q(t) = \sum_{i=1}^3 (x_P^i - x_Q^i) \underline{e}_i'(t)$. Derivando rispetto a t e ricordando che le coordinate lagrangiane x_P^i, x_Q^i sono indipendenti da t si trova

$$\underline{v}_P - \underline{v}_Q = \sum_{i=1}^3 (x_P^i - x_Q^i) \dot{\underline{e}}_i' = \sum_{i=1}^3 (x_P^i - x_Q^i) \underline{\omega} \times \underline{e}_i' = \underline{\omega} \times (P - Q). \quad \square$$

Corollario 1 $(\underline{v}_P - \underline{v}_Q) \perp (P - Q), \underline{\omega}$.

(La prima ortogonalitá si puo' dimostrare anche derivando $\|P(t) - Q(t)\|^2 = const$).

Parentesi: cenni di cinematica relativa. Sia $P(t)$ la posizione in \mathcal{E}_3 all'istante t di un punto materiale \mathcal{P} , $x_P^i(t)$ le sue coordinate rispetto a \mathcal{T} . Derivando la definizione $P(t) - \Omega = \sum_{i=1}^3 x_P^i(t) \underline{e}_i$ rispetto a t troviamo che la sua velocità rispetto a \mathcal{E}_3 è data da $\underline{v}_P(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_P^i \underline{e}_i$. D'altro canto,

$$P(t) - \Omega = [P(t) - \Omega'(t)] + [\Omega'(t) - \Omega] = \sum_{i=1}^3 x_P^i(t) \underline{e}_i'(t) + [\Omega'(t) - \Omega]$$

(v. fig. 2 destra), ove $x_{\mathcal{P}}^i(t)$ sono le coordinate di \mathcal{P} rispetto a \mathcal{T}' . Se \mathcal{P} è solidale a \mathcal{T}' le $x_{\mathcal{P}}^i$ sono indipendenti da t e la formula si riduce alla (1.2). Derivando rispetto a t troviamo

$$\begin{aligned}\underline{v}_{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \dot{x}_{\mathcal{P}}^i = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{\mathcal{P}}^i(t) \underline{e}_i'(t) + \sum_{i=1}^3 x_{\mathcal{P}}^i(t) \dot{\underline{e}}_i'(t) + \underline{v}_{\Omega'} \\ \underline{a}_{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \ddot{x}_{\mathcal{P}}^i = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_{\mathcal{P}}^i(t) \underline{e}_i'(t) + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{\mathcal{P}}^i(t) \dot{\underline{e}}_i'(t) + \sum_{i=1}^3 x_{\mathcal{P}}^i(t) \ddot{\underline{e}}_i'(t) + \underline{a}_{\Omega'}\end{aligned}$$

cioé, usando le (1.4), la legge di trasformazione delle velocità e delle accelerazioni:

$$\underline{v}_{\mathcal{P}} = \underline{v}'_{\mathcal{P}} + \underline{v}_{\tau}, \quad \text{ove} \quad \underline{v}'_{\mathcal{P}} \equiv \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{\mathcal{P}}^i \underline{e}_i', \quad \underline{v}_{\tau} \equiv \underline{v}_{\Omega'} + \sum_{i=1}^3 x_{\mathcal{P}}^i \dot{\underline{e}}_i' = \underline{v}_{\Omega'} + \underline{\omega} \times (P - \Omega') \quad (1.10)$$

$$\underline{a}_{\mathcal{P}} = \underline{a}'_{\mathcal{P}} + \underline{a}_{\tau} + \underline{a}_c, \quad \underline{a}'_{\mathcal{P}} \equiv \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_{\mathcal{P}}^i \underline{e}_i', \quad \underline{a}_{\tau} \equiv \underline{a}_{\Omega'} + \sum_{i=1}^3 x_{\mathcal{P}}^i \ddot{\underline{e}}_i', \quad \underline{a}_c \equiv 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{\mathcal{P}}^i \dot{\underline{e}}_i' = 2\underline{\omega} \times \underline{v}'_{\mathcal{P}}. \quad (1.11)$$

$\underline{v}_{\mathcal{P}}, \underline{a}_{\mathcal{P}}$ sono la velocità e l'accelerazione di \mathcal{P} *absolute*, cioè rispetto a \mathcal{E}_3 ; $\underline{v}'_{\mathcal{P}}, \underline{a}'_{\mathcal{P}}$ sono la velocità e l'accelerazione di \mathcal{P} *relative*, cioè rispetto a \mathcal{E}'_3 . Per determinare il significato di $\underline{v}_{\tau}, \underline{a}_{\tau}$, che prendono il nome di velocità ed accelerazione *di trascinamento*, osserviamo che, se applichiamo queste formule al punto P' di \mathcal{E}'_3 per cui si trova a passare \mathcal{P} all'istante t (v. fig. 2 destra), risulta $\underline{v}'_{P'} = \underline{a}'_{P'} = \underline{a}_c = 0$, mentre $x_{\mathcal{P}}^i(t) = x_{P'}^i$, e quindi risulta $\underline{v}_{\tau} = \underline{v}_{P'}, \underline{a}_{\tau} = \underline{a}_{P'}$, cioè la velocità e l'accelerazione di *trascinamento* sono la velocità e l'accelerazione rispetto a \mathcal{E}_3 del punto P' di \mathcal{E}'_3 per cui si trova a passare \mathcal{P} all'istante t . Riassumendo: la velocità assoluta è pari alla somma della velocità relativa e della velocità di trascinamento; l'accelerazione assoluta è pari alla somma delle accelerazioni relativa, di trascinamento e di *Coriolis* \underline{a}_c .

La (1.9) lega le velocità rispetto allo spazio fisso \mathcal{E}_3 di due qualsiasi punti dello spazio \mathcal{E}'_3 solidale al corpo \mathcal{S} . Gli infiniti punti di questo spazio sono individuati (in modo indipendente dal tempo) dalle coordinate lagrangiane, cioè da P_* . In altri termini $\underline{v}_P(t)$ é la funzione $\underline{v}_P(t) = \underline{v}(P_*, t) \equiv \frac{\partial \Pi(P_*, t)}{\partial t}$. La formula (1.9) in notazione esplicitamente lagrangiana é

$$\underline{v}(P_*, t) = \underline{v}(Q_*, t) + \underline{\omega}(t) \times [\Pi(P_*, t) - \Pi(Q_*, t)], \quad (1.12)$$

Come già notato, possiamo individuare gli infiniti punti di \mathcal{E}'_3 (in modo dipendente dal tempo) anche tramite le coordinate euleriane, cioè le loro posizioni $P \in \mathcal{E}_3$ all'istante t . Indichiamo con $\underline{u}(P, t)$ la velocità euleriana, cioè la velocità all'istante t del punto dello spazio solidale che si trova a passare per il punto P dello spazio fisso all'istante t , cioè la velocità del punto dello spazio solidale vista come funzione della sua posizione attuale (cioè all'istante t stesso). Velocità euleriana e lagrangiana sono legate dalla relazione $\underline{u}(P, t) = \underline{v}(P_*, t)$, dove va posto $P_* = \Pi^{-1}(P, t)$ se si vuole esprimere la prima in funzione della seconda, $P = \Pi(P_*, t)$ se si vuole esprimere la seconda in funzione della prima. La (1.12) si riscrive così nella forma euleriana

$$\underline{u}(P, t) = \underline{u}(Q, t) + \underline{\omega}(t) \times (P - Q). \quad (1.13)$$

Prefissato un punto Q , essa dá la $\underline{u}(P, t)$ per un qualsiasi altro punto P in funzione di $\underline{u}(Q, t), \underline{\omega}(t)$, e della posizione di P stesso rispetto a Q . Il campo vettoriale $\underline{u} : P \rightarrow \underline{u}(P, t) \equiv \underline{v}_P(t)$ si dice *atto di moto rigido all'istante t* .¹ Quindi l'atto di moto rigido é parametrizzato da 6 scalari [le 3 componenti di $\underline{u}(Q, t)$ e le 3 componenti di $\underline{\omega}$], coerentemente con il fatto che un corpo rigido libero nello spazio ha 6 gradi di libertà.

¹Sostanzialmente si può anche vedere come l'insieme delle velocità dei punti dello spazio solidale al corpo, individuati dalle loro posizioni attuali (cioè all'istante t stesso) rispetto allo spazio fisso.

A seguito delle sostituzioni $\omega \leftrightarrow \underline{R}$, $\underline{u} \leftrightarrow \underline{M}$ la (1.13) diventa la legge di trasformazione del momento di un sistema di vettori applicati al variare del polo

$$\underline{M}_P = \underline{M}_Q + \underline{R} \times (P - Q).$$

Tutto quanto avevamo dimostrato per i sistemi di vettori utilizzando solamente questa formula risulterà vero anche in questo nuovo ambito, fatte le dovute sostituzioni. Innanzitutto, moltiplicando membro a membro la (1.13) per $\underline{\omega}$ troviamo

Corollario 2 $\underline{u}(P, t) \cdot \underline{\omega}(t) = \underline{u}(Q, t) \cdot \underline{\omega}(t)$, cioè il prodotto $I_c := \underline{u}(P, t) \cdot \underline{\omega}(t)$ non dipende da P . Perciò viene detto “invariante cinematico”.

In altri termini, nella decomposizione di $\underline{u}(P, t)$ in un componente $\underline{\tau}_P \parallel \underline{\omega}$ ed uno $\underline{u}_\perp(P, t) \perp \underline{\omega}$ il primo è indipendente da P , e lo indicheremo semplicemente con $\underline{\tau}$:

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\tau} + \underline{u}_\perp(P, t).$$

(diamo una forma piú esplicita a $\underline{u}_\perp(P, t)$ nella proposizione piú sotto).

Supponiamo $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ e consideriamo l'insieme di punti dello spazio (dipendente da t)

$$\mathcal{A}_t := \{A \in \mathcal{E}_3 \mid \underline{u}(A, t) = \underline{\tau}\} \quad (1.14)$$

Proposizione 3 \mathcal{A}_t è una retta $\parallel \underline{\omega}(t)$ detta asse di Mozzi. $\forall A \in \mathcal{A}_t$ risulta $\underline{u}(A, t) = \underline{\tau} = \frac{I_c}{\omega^2} \underline{\omega}$. Per ogni punto P

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\tau}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P - A) \quad A \in \mathcal{A}_t. \quad (1.15)$$

\mathcal{A}_t è anche il luogo dei punti $P \in \mathcal{E}_3$ in cui $\underline{u}(A, t) \parallel \underline{\omega}(t)$ oppure $\underline{u}(A, t) = \underline{0}$, ed il luogo dei punti $P \in \mathcal{E}_3$ in cui $\underline{u}(P, t)$ è minimo.

Si noti che la formula (1.15) si può considerare valida anche nel caso $\underline{\omega} = \underline{0}$ ponendo $\underline{\tau} = \underline{u}(P, t)$: sebbene \mathcal{A}_t non esista, e quindi la scelta di A sia completamente indeterminata, essa è ininfluente, perché il secondo termine a secondo membro risulta nullo, esattamente come nella (1.13). Nei prossimi paragrafi ne illustremo il significato geometrico.

Da (1.15) segue anche $I_c = \tau \omega$. Quindi $I_c = 0$ implica che o $\underline{\tau} = \underline{0}$ oppure $\underline{\omega} = \underline{0}$.

1.1 Moti rigidi particolari

Moto e atto di moto traslatorio.

In un moto traslatorio l'orientamento dei vettori \underline{e}'_i non varia con t . Quindi ad ogni t

$$\frac{d}{dt} \underline{e}'_i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}(t) = \underline{0}, \quad (1.16)$$

e tutti i punti hanno la stessa velocità,

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\tau}(t) \quad \forall P \in \mathcal{E}_3; \quad (1.17)$$

tuttavia $\underline{\tau}$ può dipendere da t . Si noti che le traiettorie dei singoli punti del solido non sono tenute ad essere rettilinee; potrebbero essere addirittura delle circonferenze, come per certe navicelle da luna-park vincolate tramite un “doppio pendolo” (v. Fig. 3).

Definizione 3 L'atto di moto all'istante t si dice traslatorio se a quest'istante $\underline{\omega}(t) = \underline{0}$, e quindi a questo istante vale anche la (1.17).

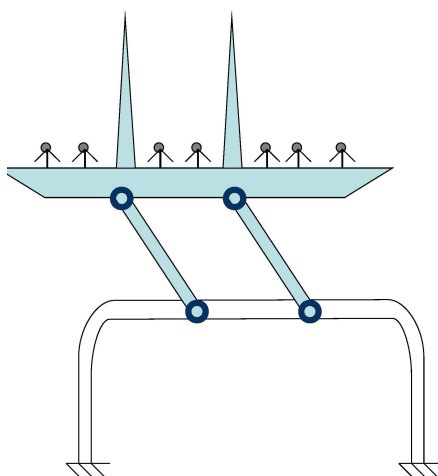


Figure 3:

Moto di rotazione attorno ad un asse fisso r . Atto di moto rotatorio.

I punti di r hanno velocità zero, e quindi $\underline{\tau} = \underline{0}$. In generale $\underline{\omega} \neq \underline{0}$, e l'asse di Mozzi coincide con quello di rotazione, $\mathcal{A}_t = r$.

Esempio: una porta che ruota attorno all'asse dei cardini, v. Fig. 4 sinistra. Fissiamo $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ in modo che $\Omega \equiv \Omega' \in r, \underline{e}_3 \equiv \underline{e}'_3 \parallel r$. La trasformazione tra le due basi é allora data

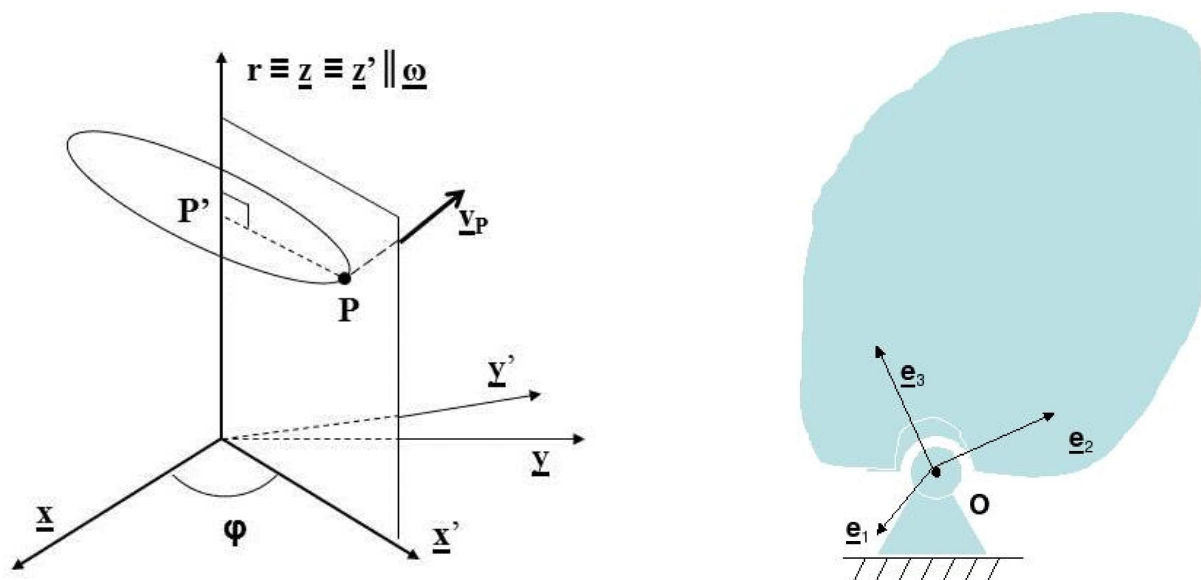


Figure 4:

da

$$\begin{aligned}
 \underline{e}'_1 &= \cos \varphi(t) \underline{e}_1 + \sin \varphi(t) \underline{e}_2 & \Rightarrow & \quad \dot{\underline{e}}'_1 = \dot{\varphi}(-\sin \varphi \underline{e}_1 + \cos \varphi \underline{e}_2) \\
 \underline{e}'_2 &= -\sin \varphi(t) \underline{e}_1 + \cos \varphi(t) \underline{e}_2 & & \quad \dot{\underline{e}}'_2 = \dot{\varphi}(-\cos \varphi \underline{e}_1 - \sin \varphi \underline{e}_2) \\
 \underline{e}'_3 &= \underline{e}_3 & & \quad \dot{\underline{e}}'_3 = \underline{0};
 \end{aligned}$$

applicando la formula (1.5) troviamo dopo un facile calcolo

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \underline{e}'_3 = \dot{\varphi} \underline{e}_3; \quad (1.18)$$

cioé $\underline{\omega} \parallel r$, asse di rotazione. La velocità nel generico punto P è data per ogni t dalla formula

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\omega}(t) \times (P - A), \quad A \in \mathcal{A}_t; \quad (1.19)$$

è tangente alla traiettoria, cioè alla circonferenza $\perp \mathcal{A}_t$ passante per P e con centro su \mathcal{A}_t (v. fig. 4 a sinistra).

Definizione 4 *L'atto di moto all'istante t si dice rotatorio se a quest'istante $\underline{\tau}(t) = \underline{0}$. In questo caso la (1.19) vale a questo istante.*

L'asse di Mozzi \mathcal{A}_t si dice in questo caso asse (istantaneo) di rotazione. Esso può variare nel tempo, come accade per es. nei moti di rotazione attorno ad un punto fisso o nei moti di puro rotolamento (v. paragrafi successivi). $\underline{u}(P, t)$ è tangente sia alla traiettoria, sia alla circonferenza $\perp \mathcal{A}_t$ passante per P e con centro su \mathcal{A}_t , che non necessariamente coincidono.

Moto di rotazione attorno ad un punto fisso O

Se un punto O del solido (o dello spazio solidale ad esso) è vincolato ad rimanere fisso, per esempio tramite una cerniera sferica di centro O (v. Fig. 4 destra), allora ad ogni t l'atto di moto sarà rotatorio con asse istantaneo di rotazione \mathcal{A}_t passante per O . Infatti, $\underline{u}(O, t) = \underline{0}$ implica che il minimo della velocità è $\tau = 0$, quindi l'atto di moto è rotatorio, e $O \in \mathcal{A}_t$. Tuttavia, la direzione di \mathcal{A}_t potrà variare con t .

Moto di puro rotolamento di un cilindro su un piano

Questo è anche un esempio di moto piano (v. più avanti). Puro rotolamento significa che i punti del cilindro istantaneamente a contatto con il piano non strisciano su di esso, e quindi hanno istantaneamente velocità zero. (v. Fig. 5 sinistra). Perciò questi punti di contatto (e non quelli sull'asse del cilindro!) formano l'asse di Mozzi \mathcal{A}_t (che è caratterizzato anche come luogo dei punti con velocità minima). $\underline{u}(P, t)$ è tangente sia alla traiettoria, che è una curva denominata "cicloide", sia alla circonferenza $\perp \mathcal{A}_t$ passante per P e con centro su \mathcal{A}_t . Tuttavia anche in questo caso \mathcal{A}_t varia evidentemente nel tempo (trasla).

Se come solido \mathcal{S} prendiamo non tutto il cilindro, ma una sua parte (v. Fig. 5 sinistra), lo spazio solidale e il suo moto non cambiano, e quindi non cambia nemmeno \mathcal{A}_t . In questa variante si vede che \mathcal{A}_t e la regione occupata da \mathcal{S} all'istante t non necessariamente hanno punti in comune.

Moto elicoidale. Atto di moto elicoidale.

Consideriamo il moto di un bullone che si avvita in un buco cilindrico filettato di asse r (v. fig. 6). Ragionando come nel caso del moto attorno ad un asse fisso, vediamo che $\underline{\omega} \parallel r$. I punti dell'asse del bullone sono sovrapposti con r e si muovono di una traslazione $\parallel r$, quindi $\mathcal{A}_t = r$, e la loro velocità è $\underline{\tau} \parallel r$. Per tutti gli altri punti P del bullone, o più in generale dello spazio solidale ad esso, il moto è composizione di un moto di traslazione $\parallel r$

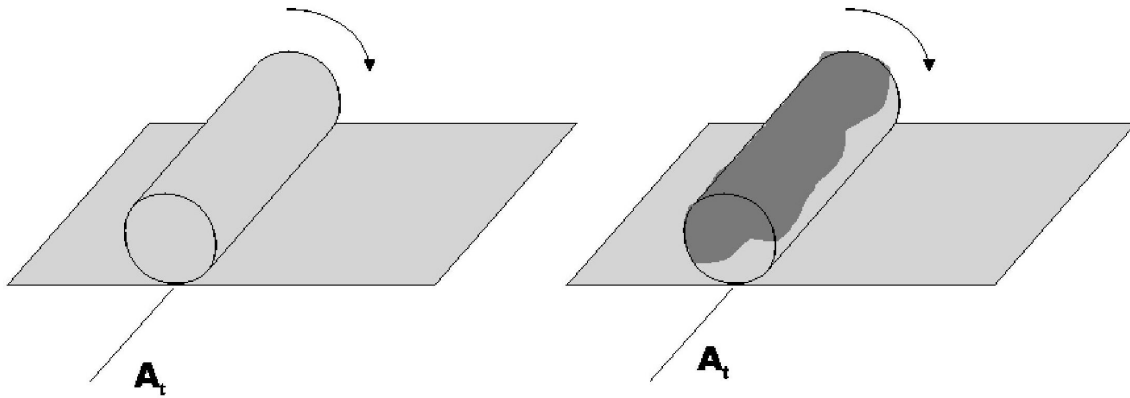


Figure 5:

con velocità $\underline{\tau}$ e di un moto di rotazione attorno a r con velocità angolare $\underline{\omega}$ e quindi con velocità di rotazione $\underline{\omega}(t) \times (P - A)$, secondo la formula (1.15). Le traiettorie delle particelle del bullone (o più in generale dei punti del suo spazio solidale) sono delle eliche, di cui una è la filettatura stessa. La velocità $\underline{u}(P, t)$ è quindi tangente all'elica passante per P . Un tale moto è un esempio di moto elicoidale, un moto in cui \mathcal{A}_t non varia nel tempo ed esiste una costante λ tale che $\underline{\tau}(t) = \lambda \underline{\omega}(t)$ (per il bullone $\lambda = \text{passo}/2\pi$).

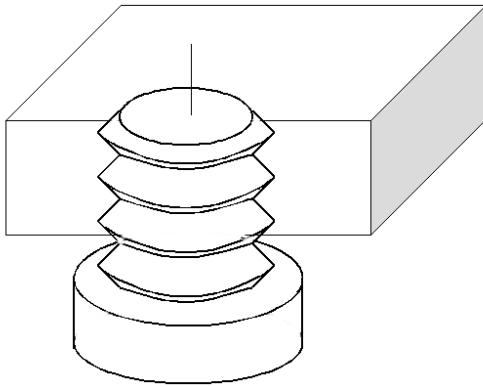


Figure 6:

Poichè la (1.15), che riscriviamo,

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\tau}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P - A) \quad A \in \mathcal{A}_t$$

vale per *ogni* atto di moto rigido, allora per qualsiasi moto rigido è ancora vero che ad ogni istante il campo delle velocità è somma di una velocità di traslazione $\underline{\tau}(t) \parallel \mathcal{A}_t$ e di una velocità di rotazione $\underline{\omega}(t) \times (P - A)$ attorno ad \mathcal{A}_t stesso, cioè che è lo stesso di quello di un opportuno moto elicoidale attorno ad un opportuno asse $r \equiv \mathcal{A}_t$; conseguentemente i vettori velocità $\underline{u}(P, t)$ all'istante t sono tangenti a delle eliche (le traiettorie in questo moto elicoidale corrispondente). Tali risultati si riassumono nella seguente formulazione:

Teorema 2 (di Mozzi) *Ogni atto di moto rigido è elicoidale.*

Tuttavia $\mathcal{A}_t, \underline{\tau}(t), \underline{\omega}(t)$ dipendono dal tempo, e le traiettorie delle particelle del corpo non sono in generale delle eliche.

Una classe particolarmente importante di moti rigidi è quella dei cosiddetti

Moti rigidi piani

Un moto rigido si dice piano se esiste un piano π' solidale che si muove rimanendo sovrapposto ad un piano π fisso. È chiaro che qualunque altro piano π^* solidale parallelo a π' si muoverà rimanendo parallelo ed equidistante da π al passar del tempo.

Dato un punto P_* dello spazio solidale, indichiamo con π^* il piano solidale $\parallel \pi$ passante per P_* , con $P'_* \in \pi'$ la sua proiezione su π' , e con $P(t), P'(t)$ le loro posizioni nello spazio fisso all'istante t . Risulta

$$P(t) - P'(t) = \underline{b} \equiv (\text{vettore costante}), \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(P(t) - P'(t)) = \underline{v}_P - \underline{v}_{P'} = \underline{0}.$$

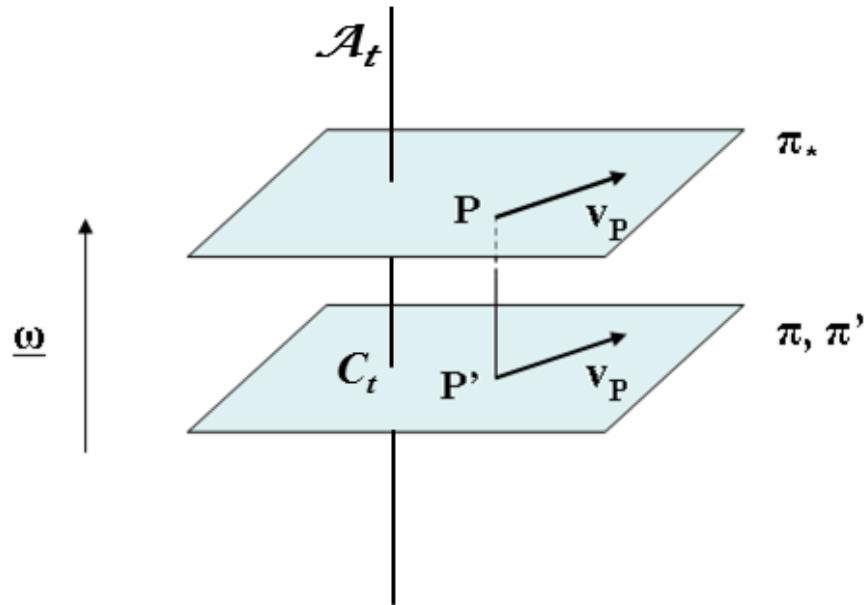


Figure 7:

Il moto di un qualunque punto P_* solidale si riconduce quindi al moto di un punto di π' , la sua proiezione P'_* . Dal confronto con la (1.9) (presa con $Q = P'$) segue

$$\underline{0} = \underline{\omega} \times (P - P') = \underline{\omega} \times \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega} \parallel \underline{b} \perp \pi.$$

D'altro canto, poiché $P'(t)$ si muove rimanendo su π , risulta $\underline{v}_{P'} \parallel \pi$, e quindi

$$I_c(t) \equiv \underline{u}(P', t) \cdot \underline{\omega}(t) = 0.$$

Come già visto, siccome è anche $I_c = \tau\omega$, deve essere o $\underline{\omega}(t) = 0$ o $\underline{\tau}(t) = 0$, cioè

Proposizione 4 *In un moto rigido piano ad ogni t l'atto di moto o è traslatorio o è rotatorio.*

Supponiamo che l'atto di moto sia rotatorio. $C_t := \mathcal{A}_t \cap \pi$ si chiama centro istantaneo di rotazione; chiaramente $\underline{u}(C_t, t) = \underline{0}$, per cui applicando la (1.15) con $Q = C_t$ e $P \in \pi$ troviamo

$$\underline{u}(P, t) = \underline{\omega} \times (P - C_t). \quad (1.20)$$

Questa formula ci dice che $\underline{u}(P, t), (P - C_t)$ sono tra di loro perpendicolari. Di qui il

Teorema 3 (di Chasles). *La normale alla velocità (e quindi alla traiettoria) di un qualsiasi punto nel piano solidale, condotta per il punto stesso, passa anche per il centro istantaneo di rotazione.*

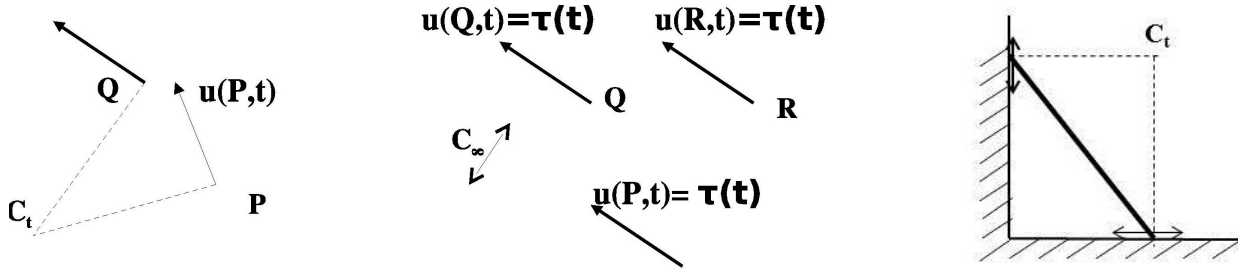


Figure 8:

(v. Fig. 8 sinistra). L'enunciato del teorema vale banalmente anche nel caso di atto di moto traslatorio, se *definiamo* in questo caso C_t come un *punto improprio*, piú precisamente la *direzione* del piano π perpendicolare a $\underline{\tau}$ (v. Fig. 8 destra). Un atto di moto piano traslatorio si può vedere anche come limite di un atto di moto rotatorio in cui facciamo tendere $C_t \rightarrow \infty$ secondo una direzione costante (e $\omega \rightarrow 0$, in modo da mantenere finita le velocità dei punti P).

Il teorema é utilissimo per trovare C_t : applicandolo a due punti diversi si determina C_t come intersezione delle rispettive normali, v. per esempio la scala appoggiata al pavimento ed al muro come in fig. 8 destra.

Altre proprietà di immediata dimostrazione sono le seguenti

Proposizione 5 *Se π', π hanno un punto A in comune, cioè se $A \in \pi \cap \pi' \forall t$, allora $C_t = A \forall t$.*

Proposizione 6 *Se all'istante t esistono due centri istantanei di rotazione C_t, C'_t differenti, allora l'atto di moto è nullo.*

1.2 Spostamenti rigidi elementari

Definizione 5 $dP := \underline{u}(P, t) dt$ si dice *spostamento elementare nell'intervallo di tempo $[t, t + dt]$ del punto dello spazio solidale che a t ha posizione P in \mathcal{E}_3 . Il campo vettoriale (infinitesimo) $S : P \rightarrow dP$ si dice *spostamento rigido elementare dello spazio solidale a S in $[t, t + dt]$* ².*

²Sostanzialmente lo spostamento rigido elementare si può anche vedere come l'insieme $\{dP\}_{P \in \mathcal{E}_3}$

Ricordiamo che, a meno di infinitesimi di ordine superiore a 1 in dt , dP risulta uguale allo spostamento effettuato nell'intervallo temporale $[t, t + dt]$ dal punto solidale che a t si trovava in P .

Come sono collegati gli spostamenti elementari dP, dQ di due punti P, Q ? Detto $d\underline{\psi} := \underline{\omega}dt$ il vettore angolo infinitesimo di rotazione, dalla (1.15) ricaviamo

$$dP = dQ + d\underline{\psi} \times (P - Q), \quad (1.21)$$

dove $Q \in \mathcal{E}_3$ è un punto prefissato. Di qui si vede che lo spostamento rigido elementare $\{dP\}_{P \in \mathcal{E}_3}$ è parametrizzato dai vettori $dQ, d\underline{\psi}$ cioè da 6 scalari (le loro componenti).

Dato che dt non compare piú in (1.21), questa relazione tra gli spostamenti dP, dQ è indipendente dalla particolare durata dell'intervallo di tempo dt ; essa continuerebbe a valere anche "rallentando" il moto fino a far compiere lo stesso spostamento rigido infinitesimo in un intervallo di tempo finito.

Se l'atto di moto all'istante t è traslatorio, anche lo spostamento rigido elementare sarà traslatorio:

$$dP = dQ. \quad (1.22)$$

Evidentemente esso è parametrizzato solo da dQ , cioè da 3 scalari. Se l'atto di moto all'istante t è rotatorio, anche lo spostamento rigido elementare sarà rotatorio:

$$dP = d\underline{\psi} \times (P - A) \quad A \in \mathcal{A}_t. \quad (1.23)$$

Evidentemente esso è parametrizzato solo da $d\underline{\psi}$, cioè da 3 scalari. Nel caso di moto rigido piano, prendendo $P \in \pi$ e $A \equiv C_t$, quest'ultima formula diventa

$$dP = d\underline{\psi} \times (P - C_t). \quad (1.24)$$

Lo spostamento rigido elementare è parametrizzato dall'unica componente $\neq 0$ di $d\underline{\psi}$, quella perpendicolare a π , cioè da 1 scalare. Fissiamo \mathcal{T} in modo che $\Omega \in \pi, \underline{e}_3 \perp \pi$. Dette $(x, y, 0)$ le coordinate di P , $(x_C, y_C, 0)$ quelle di C_t , $(0, 0, d\psi^z)$ le componenti di $d\underline{\psi}$, ed effettuando il prodotto vettoriale troviamo

$$dy = d\psi^z(x - x_c), \quad (1.25)$$

$$dx = -d\psi^z(y - y_c). \quad (1.26)$$

Vediamo che dy , cioè (a meno di infinitesimi di ordine superiore) la variazione dell'ordinata di P , è funzione solo dell'ascissa x di P , piú precisamente una funzione lineare! E che dx , cioè (a meno di infinitesimi di ordine superiore) la variazione dell'ascissa di P , è funzione solo dell'ordinata y di P , piú precisamente una funzione lineare! Rappresentiamo queste due funzioni tramite i cosiddetti diagrammi degli spostamenti (Fig. 9 sinistra):

Si noti che i due diagrammi sono tra loro perpendicolari.

Nel caso di moto rigido piano con atto di moto traslatorio, prendendo $P \in \pi$ e \mathcal{T} come prima, la (1.22) dá $dz = 0$ mentre

$$dy = dy_Q = \text{cost}, \quad (1.27)$$

$$dx = dx_Q = \text{cost}. \quad (1.28)$$

Come funzioni delle coordinate x, y le variabili dx, dy sono delle costanti, e quindi la loro rappresentazione grafica porta ai diagrammi degli spostamenti in Fig. 9 destra.

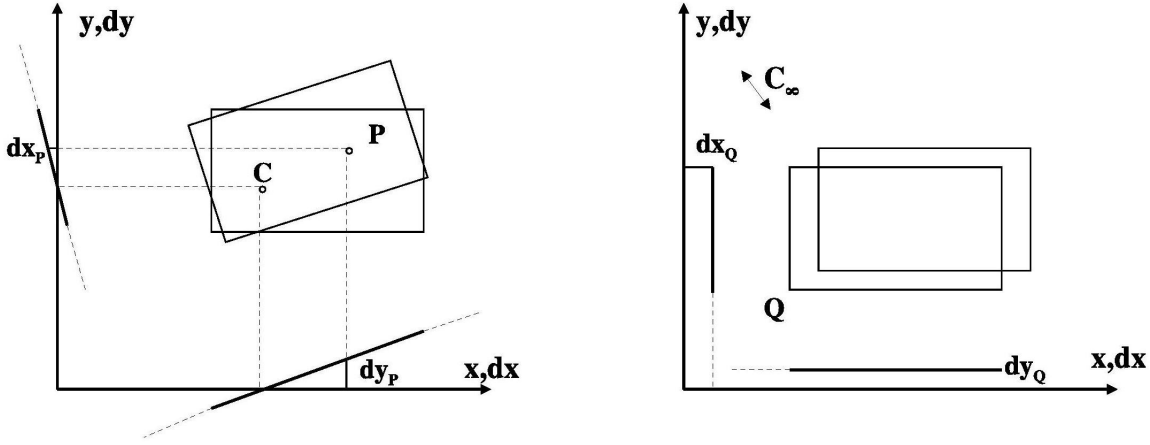


Figure 9:

1.3 Moti rigidi piani di piú corpi.

Consideriamo due solidi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, diciamo $\mathcal{E}_3^1, \mathcal{E}_3^2$ i loro spazi solidali, e supponiamo che essi si muovano di moto rigido piano rispetto ad uno stesso piano fisso π , cioè che esistano due piani $\pi_1 \subset \mathcal{E}_3^1, \pi_2 \subset \mathcal{E}_3^2$, che si muovano rimanendo sovrapposti a $\pi \subset \mathcal{E}_3$. Poiché π_1, π_2 rimangono tra loro sovrapposti, $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ si muovono di moto rigido piano anche l'uno rispetto all'altro.

Per ogni $P_1 \in \pi_1$ indichiamo con P_2 il punto di π_2 istantaneamente sovrapposto a P_1 , e viceversa. Indichiamo con $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ le velocità di P_1, P_2 rispetto a π , con $\underline{v}_{12}, \underline{v}_{21}$ la velocità di P_1 rispetto a π_2 e la velocità di P_2 rispetto a π_1 rispettivamente. Evidentemente Per la legge di composizione delle velocità (1.10)

$$\underline{v}_{12} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2; \quad (1.29)$$

$\underline{v}_1, \underline{v}_{12}, \underline{v}_2$ giocano rispettivamente i ruoli di velocità assoluta di P_1 , relativa di P_1 rispetto a π_2 e di trascinamento. Da (1.29) e dalla su analoga con 1,2 scambiati segue

$$\underline{v}_{21} = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 = -\underline{v}_{12}.$$

Chiamiamo C_{12}, C_{21} i centri istantanei di rotazione rispettivamente nel moto di π_1 rispetto a π_2 e π_2 rispetto a π_1 . Se C_{12} è un punto proprio, e scelgo P_1 sovrapposto istantaneamente a C_{12} , trovo $\underline{v}_{12} = 0$; per l'equazione precedente allora è anche $\underline{v}_{21} = 0$, e cioè P_2 ha velocità nulla rispetto a π_1 , e quindi C_{21} è sovrapposto a P_2 , e troviamo la

Proposizione 7 *Ad ogni istante t C_{12}, C_{21} sono sovrapposti.*

La proposizione é vera anche se C_{12} é un punto improprio. Infatti in questo caso \underline{v}_{12} é la stessa per tutti i punti $P_1 \in \pi_1$, e per l'equazione precedente anche \underline{v}_{21} é la stessa per tutti i punti $P_2 \in \pi_2$, e le direzioni perpendicolari a $\underline{v}_{12}, \underline{v}_{21}$, cioè C_{12}, C_{21} , coincidono.

Un'altra proprietà di immediata dimostrazione è la seguente

Proposizione 8 *Se π_1, π_2 hanno un punto A in comune, cioè $A \in \pi_1 \cap \pi_2 \forall t$, allora $C_{12} = A = C_{21}$.*

Infine, detti C_1, C_2 i centri istantanei di rotazione nel moto di π_1, π_2 rispetto a π , vale la

Proposizione 9 (*Regola di allineamento*) C_1, C_2, C_{12} sono allineati ad ogni istante t .

Dim: Se C_1, C_2 sono sovrapposti, allora l'asserto è banale; addirittura in questo caso $C_{12} \equiv C_1$ anch'esso. Vediamo ora gli altri casi. Se C_1, C_2 non sono sovrapposti possono esser entrambi impropri, o no. Supponiamo prima che almeno un centro, diciamo C_1 , sia proprio. Denotiamo con r la retta che congiunge C_1, C_2 (v. Fig. 1.3). Per il teorema di Chasles, per un qualunque punto $P_1 \in \pi_1$ istantaneamente giacente su r risulta $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \perp r$. Se risulta $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$, allora $\underline{v}_{12} = 0$ e $C_{12} \equiv P_1 \in r$; se invece $\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$, allora per la (1.29) risulta $0 \neq \underline{v}_{12} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \perp r$, che per il teorema di Chasles implica che comunque $C_{12} \in r$, come volevasi dimostrare. Se infine C_1, C_2 sono entrambi impropri allora \underline{v}_1 e \underline{v}_2 , e quindi anche \underline{v}_{12} , sono indipendenti dal particolare punto $P_1 \in \pi_1$, quindi anche l'atto di moto di π_1 rispetto a π_2 è traslatorio, e C_{12} è anch'esso un punto improprio: C_1, C_2, C_{12} sono allineati sulla "retta all'infinito" (l'orizzonte). \square

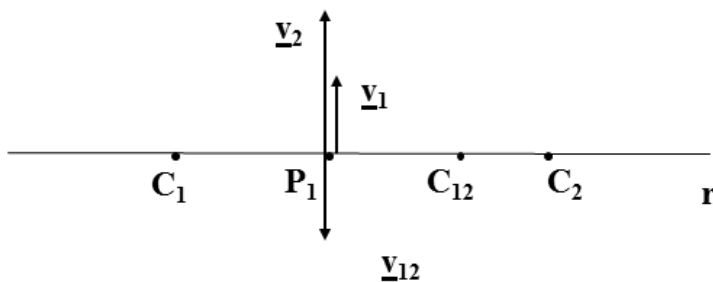


Figure 10:

I risultati precedenti si estendono immediatamente al caso di n solidi tutti in moto rigido piano rispetto allo stesso piano π . Basta sostituire 1, 2 con due qualsiasi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Facendo giocare a π_k , con $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, il ruolo del piano fisso π , dalla proposizione precedente si ricava anche come corollario la regola di allineamento

Proposizione 10 C_{ij}, C_{ik}, C_{jk} sono allineati.

Applichiamo le regole precedenti per determinare centri e diagrammi degli spostamenti del seguente sistema:

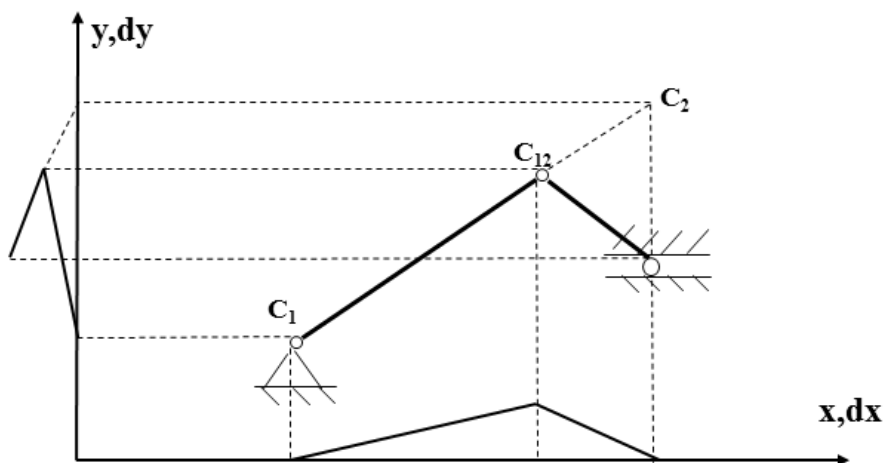


Figure 11:

2 Cinematica di sistemi materiali vincolati

La posizione P di un punto materiale libero di muoversi nello spazio é individuata da 3 coordinate, che diremo *normali*, che possiamo prendere per esempio come le sue coordinate cartesiane (x, y, z) rispetto ad una terna ortonormale $\mathcal{T} = (\Omega, \underline{e}_i)$ prefissata. La posizione di un solido libero di muoversi nello spazio é individuata da 6 coordinate, che diremo anch'esse *normali*, che possiamo prendere per esempio come $(x_{\Omega'}^1, x_{\Omega'}^2, x_{\Omega'}^3, \varphi, \vartheta, \psi)$, ove le prime 3 sono le coordinate cartesiane rispetto a \mathcal{T} dell'origine di una terna $\mathcal{T}' = (\Omega', \underline{e}'_i)$ solidale al solido e φ, ϑ, ψ sono gli angoli di Eulero, che individuano l'orientamento dei vettori di \mathcal{T}' rispetto a quelli di \mathcal{T} .

Diremo *coordinate normali* di un sistema \mathcal{S} di punti materiali e/o solidi liberi di muoversi nello spazio quelle che si ottengono mettendo assieme delle coordinate normali per ciascun costituente. Un sistema \mathcal{S} di N punti materiali ed M solidi liberi ha $m = 3N + 6M$ coordinate normali X^a , che formeranno una m -pla $\bar{X} := (X^1, \dots, X^m)$.

In realtà se \mathcal{S} é costituito da piú corpi queste X^a non possono assumere tutti i valori che potrebbero assumere nel caso che \mathcal{S} sia costituito da un unico corpo, a causa della mutua *impenetrabilitá* di corpi differenti, cioè del principio che questi non possono occupare contemporaneamente una stessa porzione di spazio. Per lo stesso motivo anche l'eventuale presenza di solidi esterni a \mathcal{S} , oltre ai corpi di \mathcal{S} , limita le posizioni occupabili e gli spostamenti possibili dei punti di \mathcal{S} . Chiameremo *vincolo olonomo* un qualsiasi oggetto che comporta una di queste limitazioni, e con una semplificazione consueta anche la limitazione stessa³. Chiameremo *configurazione* di \mathcal{S} una scelta delle posizioni dei corpi di \mathcal{S} compatibile con i vincoli, *spazio delle configurazioni* \mathcal{Q} l'insieme delle configurazioni.

Un vincolo si dirá *esterno* se realizzato tramite corpi esterni al sistema \mathcal{S} , *interno* altrimenti. Per esempio, l'impenetrabilitá di due solidi $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$, cioè che nello stesso punto non

³Un vincolo *anolonomo* limita anche le velocità dei punti del sistema, senza essere ricavabile tramite derivazione rispetto a t da alcun vincolo olonomo. Un esempio di vincolo anolonomo discende dalla condizione di puro rotolamento di un cilindro su un piano $\underline{u}(C, t) = \underline{0}$, ove C é il generico punto di contatto del cilindro sul piano all'istante t . Noi non tratteremo vincoli anolonomi.

possono essere presenti contemporaneamente una particella di \mathcal{S} e una di \mathcal{S}' , dá luogo ad un vincolo interno se entrambi fan parte di \mathcal{S} , esterno se uno dei due non fa parte di \mathcal{S} .

Per es., per una biglia all'interno di una stanza le pareti, il pavimento e il soffitto sono dei vincoli esterni, che diremo *d'appoggio*, per le posizioni che essa puó assumere. Fissato un sistema di coordinate che abbia origine sul pavimento e asse \bar{z} ad esso perpendicolare e detta $z_P(t)$ la corrispondente coordinata della biglia, la condizione che la biglia non possa andare sotto al pavimento (di equazione $z = 0$, v. fig. 12 sinistra) si scrive

$$\varphi[\bar{X}(t)] \equiv z_P(t) \geq 0 \quad \forall t.$$

Le posizioni con $z_P(t) = 0$ sono dette *di confine*. Un vincolo che, come il precedente, limita i

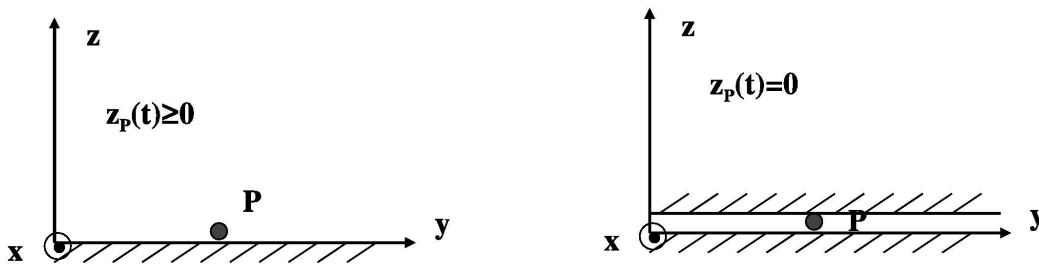


Figure 12:

valori che possono assumere le coordinate normali tramite una *disequazione* si dice *unilaterale*.

Se come pavimento ci interessa considerare non quello di una stanza, ma quello di un ascensore in moto (di equazione $z - vt = 0$, per es.) il vincolo che la biglia non possa andarvi sotto si scriverá

$$\varphi[\bar{X}(t), t] \equiv z_P(t) - vt \geq 0 \quad \forall t$$

e sará un esempio di vincolo unilaterale *dipendente dal tempo o mobile*. Se vincolassimo la biglia a giacere sulla superficie di eq. $z = 0$ (risp. di eq. $z - vt = 0$) - per esempio tramite una sottile intercapedine come in figura 12 destra - avremmo invece realizzato un vincolo *d'appartenenza*. Esso si esprime tramite la condizione

$$\varphi[\bar{X}(t), t] \equiv z_P(t) = 0 \quad (\text{risp. } \varphi[\bar{X}(t), t] \equiv z_P(t) - vt = 0) \quad \forall t. \quad (2.1)$$

Un vincolo che, come (2.1), limita i valori che possono assumere le coordinate normali tramite una *equazione* si dice *bilaterale*.⁴ Dopo questi esempi siamo pronti per la definizione generale:

⁴Piú in generale, per un punto materiale \mathcal{P} vincolato a non oltrepassare (risp. rimanere su) la superficie di eq. $\varphi(\underline{x}, t) = 0$, la condizione sará $\varphi(\underline{x}_P(t), t) \geq 0$ (vincolo unilaterale o di appoggio) e $\varphi(\underline{x}_P(t), t) = 0$ (vincolo bilaterale o di appartenenza) rispettivamente. Il vincolo di appartenenza si puó realizzare come una sottile intercapedine come in figura 13 sinistra. Il vincolo che due punti materiali $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ si mantengano a distanza

$$[\underline{x}_P(t) - \underline{x}_{P'}(t)]^2 \begin{cases} \leq d^2 \\ = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(\underline{x}_P, \underline{x}_{P'}) \equiv d^2 - [\underline{x}_P(t) - \underline{x}_{P'}(t)]^2 \begin{cases} \geq 0 \\ = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

è un caso particolare del vincolo di appoggio/appartenenza, precisamente quello in cui la superficie è sferica di raggio d con centro in uno dei due punti. Oltre che con risp. una cavità e un intercapedine sferica, esso

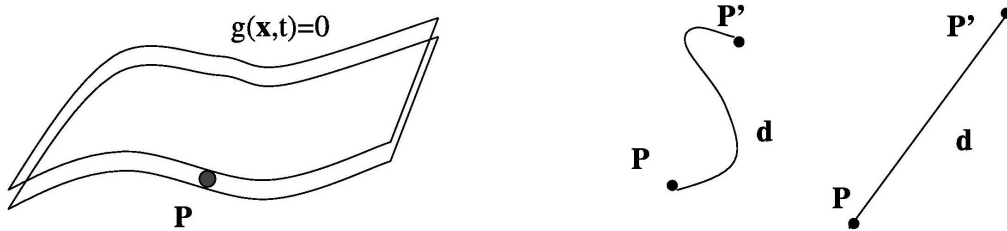


Figure 13:

diremo *vincoli olonomi bilaterali* (risp. *unilaterali*) delle condizioni sulle coordinate normali esprimibili tramite delle equazioni (risp. disequazioni) della forma⁵

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\bar{X}, t) &= 0, \\
 &\dots, \\
 \varphi_s(\bar{X}, t) &= 0, \\
 \varphi_{s+1}(\bar{X}, t) &\geq 0, \\
 &\dots, \\
 \varphi_{s+k}(\bar{X}, t) &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Piú vincoli unilaterali possono essere equivalenti ad uno bilaterale, ad esempio il sistema $\varphi(\bar{X}, t) \geq 0$, $-\varphi(\bar{X}, t) \geq 0$ é equivalente a $\varphi(\bar{X}, t) = 0$; nella (2.3) supporremo di aver già sostituito eventuali vincoli unilaterali con i bilaterali equivalenti. Una soluzione \bar{X}' di (2.3) individua una configurazione *di confine* se almeno una delle disequazioni è soddisfatta come uguaglianza, *ordinaria* altrimenti.

Nell'esempio (2.1) è chiaro che la coordinata $z_P(t)$, essendo prefissata a priori, diventa superflua per la determinazione della posizione della biglia; basterá conoscere le coordinate (x_P, y_P) . Delle coordinate che, come le (x_P, y_P) nell'esempio precedente, occorrono e bastano ad individuare univocamente le configurazioni di \mathcal{S} , si dicono *coordinate lagrangiane*. La scelta delle coordinate lagrangiane non è unica (nell'esempio precedente potremmo utilizzare anche la distanza r_P di P dall'origine e il suo azimuth θ_P , ad esempio), ma il loro numero n è univocamente determinato, e si dice *grado di libertà* del sistema; in alternativa, si dice anche che il sistema *ha n gradi di libertà*. Indicheremo un generico sistema di n coordinate lagrangiane con $q := (q^1, q^2, \dots, q^n)$. Nell'esempio (2.1) abbiamo quindi $n = 2$, e $q^1 = x_P, q^2 = y_P$, oppure $q^1 = r_P, q^2 = \theta_P$, etc. In generale non esiste sistema di coordinate lagrangiane che descriva tutto lo spazio delle configurazioni, ma una collezione (*atlante*) di sistemi locali di coordinate lagrangiane (*carte*) compatibili gli uni con gli altri.

Diremo *spostamento virtuale* di un punto materiale isolato di \mathcal{S} (o di una particella di un solido di \mathcal{S}) avente posizione P un suo spostamento elementare (cioè infinitesimo) dP

si può materialmente realizzare vincolando i due punti con risp. un filo inestensibile/un'asta di lunghezze d (e masse trascurabili) v. fig. 13 destra. (In generale, uno stesso vincolo può essere realizzato fisicamente in modi diversi). Il vincolo che \mathcal{P} rimanga su una curva di eq. $\varphi_1(\underline{x}) = 0$, $\varphi_2(\underline{x}) = 0$ è $\varphi_1(\underline{x}_P(t)) = 0$, $\varphi_2(\underline{x}_P(t)) = 0$. Il vincolo che \mathcal{P} rimanga fisso in P_0 è $\underline{x}_P(t) = \underline{x}_{P_0}$.

⁵Invece, i vincoli anolonomi saranno della forma $\varphi(\bar{X}, \dot{\bar{X}}, t) = 0$, senza essere ricavabili da vincoli olonomi per derivazione rispetto a t .

compatibile con i vincoli, considerati come se questi fossero fissi nella loro configurazione attuale se essi sono mobili, e lo indicheremo con il simbolo δP . Nel caso di vincoli fissi gli spostamenti virtuali sono quindi (tutti e soli) gli spostamenti elementari resi effettivamente possibili dai vincoli, nel caso di vincoli mobili non necessariamente. Nel caso della biglia appoggiata sul pavimento sono virtuali tutti quelli disegnati in figura con linea continua, non lo sono quelli tratteggiati, sia che la superficie sia fissa nella configurazione disegnata, sia che essa sia in moto e quella disegnata sia la sua configurazione all'istante t .

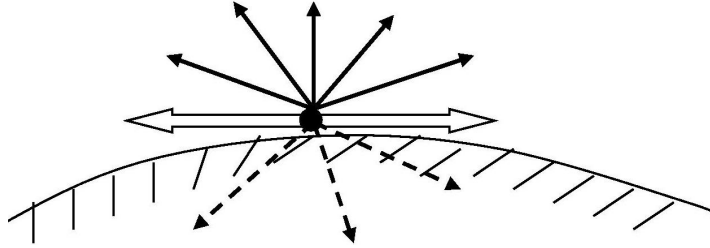


Figure 14:

Gli spostamenti virtuali si dividono in *reversibili* ed *irreversibili* (disegnati in figura 14 con linea continua risp. doppia o semplice; a linea tratteggiata sono disegnati invece gli spostamenti elementari non virtuali): δP si dice *reversibile* se anche $-\delta P$ è virtuale, *irreversibile* altrimenti. Evidentemente, se P è soggetto solo a vincoli bilaterali tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili, mentre, se P è soggetto anche a vincoli unilaterali ci sono spostamenti virtuali irreversibili a partire dalle posizioni di confine. Si dice spostamento virtuale di un sistema di punti materiali $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots$ nella configurazione $\mathcal{S} = \{P_1, P_2, \dots\}$ (e lo indicheremo con $\delta\mathcal{S}$) un insieme di spostamenti virtuali per tutti i suoi punti: $\delta\mathcal{S} = \{\delta P_1, \delta P_2, \dots\}$. $\delta\mathcal{S}$ si dice *reversibile* se anche $-\delta\mathcal{S} := \{-\delta P_1, -\delta P_2, \dots\}$ è virtuale. In particolare lo spostamento virtuale di un solido è l'insieme di spostamenti virtuali per tutti i suoi punti. Anche se questi sono infiniti, i loro spostamenti elementari, e quindi anche quelli virtuali, non sono indipendenti gli uni dagli altri, ma sono vincolati dalla condizione (1.21), che prenderá ora la forma

$$\delta P = \delta Q + \delta\underline{\psi} \times (P - Q), \quad (2.4)$$

valida per ogni coppia di punti P, Q ; qui abbiamo indicato con $\delta\underline{\psi}$ quelle determinazioni del vettore angolo infinitesimo di rotazione $d\underline{\psi}$ compatibili con i vincoli bloccati nella configurazione assunta all'istante t . Perciò lo spostamento virtuale del solido puó essere completamente parametrizzato tramite la coppia di vettori $\{\delta Q, \delta\underline{\psi}\}$ (Q é un punto prefissato a piacere dello spazio solidale al solido), che per questo motivo (con abuso di linguaggio) viene chiamata anch'essa spostamento virtuale del solido. Uno spostamento virtuale $\{\delta Q, \delta\underline{\psi}\}$ sará *reversibile* se anche $\{-\delta Q, -\delta\underline{\psi}\}$ è virtuale, *irreversibile* altrimenti.

Vediamo ora come si possono determinare il grado di libertá, un sistema di coordinate lagrangiane e gli spostamenti virtuali una volta assegnato il sistema dei vincoli (2.3). Supponiamo dapprima per semplicitá che i vincoli formino un sistema di equazioni lineari nelle

1. $l=0, i=0$, il sistema é detto *isostatico*;
2. $l=0, i>0$, il sistema é detto *i -volte iperstatico*;
3. $l>0, i\geq 0$, il sistema é detto *l -volte labile*, con i vincoli dipendenti.

Nei casi 1.,2. la (2.6) ammette solo la soluzione $\delta\bar{X} = \bar{0}$, quindi non esistono spostamenti virtuali e la soluzione \bar{X} di (2.3) é isolata, cioè \mathcal{S} é bloccato nella configurazione \bar{X} ; nel caso 2. (un numero pari a) i vincoli dipendono dagli altri e quindi sono superflui dal punto di vista cinematico.

Nel caso 3. (2.6) ammette ∞^l soluzioni: r incognite δX^a si possono infatti ricavare come combinazioni lineari delle l restanti δX^a . Se per es. le prime r colonne di $J(\bar{X})$ sono indipendenti (questo si può sempre ottenere con una permutazione degli indici) posso esprimere $\delta X^1, \dots, \delta X^r$ in funzione di $\delta X^{r+1}, \dots, \delta X^m$.

Il teorema del Dini assicura che, cosí facendo, in un intorno di \bar{X} è possibile ricavare X'^1, \dots, X'^r , e quindi le configurazioni compatibili con i vincoli, come funzioni di classe C^1 di $\delta X^{r+1}, \dots, \delta X^m$, in modo che $X'^1 - X^1 = \delta X^1 + o(\delta\bar{X}), \dots, X'^r - X^r = \delta X^r + o(\delta\bar{X})$.

Posso adottare queste ultime come coordinate lagrangiane (locali) se in un intorno di \bar{X} non posso trovare sistemi di $n' < m - r$ coordinate lagrangiane; condizione sufficiente é che il rango r' di $J(\bar{X}')$ sia pari ad r per ogni \bar{X}' in un intorno di \bar{X} , di modo che nessun vantaggio possa derivare dallo scegliere un altro \bar{X}' come centro dello sviluppo di Taylor. In questo caso allora \mathcal{S} ha $n = l = m - r$ gradi di libertá (vincoli *ben disposti*), e posso adottare $q^1 := \delta X^{r+1}, \dots, q^n := \delta X^m$ come coordinate lagrangiane locali; n rappresenta il numero delle equazioni (2.3) funzionalmente indipendenti.

Puó però capitare anche il caso delicato che in ogni intorno di \bar{X} esista un sottinsieme denso D tale che il rango di $J(\bar{X}')$ sia una costante $r' > r$ per ogni $\bar{X}' \in D$ (diremo allora che in \bar{X} i vincoli sono *mal disposti*). Applicando il teorema del Dini a \bar{X}' , in un suo intorno potremo ricavare r' delle X^a , e quindi le configurazioni compatibili con i vincoli, come funzioni delle $l' = m - r' < l$ restanti δX^a ; siccome questo si può fare per *ogni* $\bar{X}' \in D$, con un'estensione continua potremo adottare queste ultime come coordinate lagrangiane in tutto un'intorno di \bar{X} (quindi anche in \bar{X}), e \mathcal{S} avrà $n = l' < l$ gradi di libertá. Tuttavia, mentre gli spostamenti virtuali a partire da tutti i $\bar{X}' \in D$ saranno $\infty^{l'} = \infty^n$, quelli a partire da \bar{X} saranno "piú numerosi", ∞^l .

Vedremo piú avanti l'importanza di questi concetti per il calcolo delle reazioni vincolari statiche: queste sono determinate univocamente in funzione delle altre forze nel caso 1; a meno di i parametri nel caso 2; mentre il sistema può non essere in equilibrio nel caso 3. In fig. 15 anticipiamo esempi risp. di un sistema 1-volta iperstatico, isostatico, con gradi $n=0$ di libertá e $l=1$ di labilitá; calcoleremo $J(\bar{X})$ ed il suo rango piú avanti, quando tratteremo la statica di questi sistemi soggetti a date forze attive.

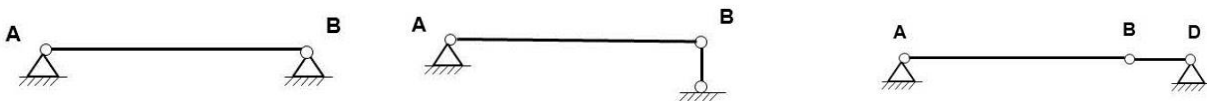


Figure 15: Sistema 1-volta iperstatico (sinistra), isostatico (centro), con $n=0$ e $l=1$ (destra).

Se tutte le φ_i bilaterali sono indipendenti; allora $r = s$ e $n := m - s$. Quindi ogni nuovo vincolo bilaterale indipendente dagli altri abbassa n di 1 (mentre i vincoli unilaterali non abbassano n , a meno che non cooperino a formare qualche nuovo vincolo bilaterale). Per esempio, un punto materiale libero di muoversi nello spazio ha 3 gradi di libertà, vincolato a muoversi su una superficie (risp. curva) ne ha 2 (risp. 1), etc; un solido libero di muoversi nello spazio ha 6 gradi di libertà, etc. (Esercizio: scrivere $J(\overline{X})$ per gli esempi precedenti).

Dato un sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi ed avente n gradi di libertà, ed introdotto un sistema di coordinate lagrangiane q , la posizione P_i dell' i -esima particella sarà (per ogni i) una funzione nota della n -pla q : $P_i = P_i(q, t)$. La dipendenza dal tempo qui indicata sarà banale nel caso di vincoli fissi. Il moto della generica particella, e quindi dell'intero sistema, sarà quindi completamente determinato dalla conoscenza delle coordinate lagrangiane come funzioni del tempo, $q = q(t)$: $P_i(t) = P_i(q(t), t)$.

La velocità dell' i -esima particella e il suo spostamento elementare nell'intervallo temporale $[t, t + dt]$ saranno quindi rispettivamente dati da

$$\underline{v}_i = \dot{P}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$dP_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} dq^h + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt. \quad (2.8)$$

Un suo spostamento virtuale δP_i a partire da una configurazione non singolare si esprimerà in termini di coordinate lagrangiane invece nella forma

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \delta q^h, \quad (2.9)$$

ove con δq^h abbiamo indicato una variazione infinitesima dq^h di q^h compatibile con gli eventuali vincoli unilaterali. Il termine $\frac{\partial P_i}{\partial t} dt$, che rappresenterebbe la parte di dP_i dovuta all'eventuale moto dei vincoli, è assente per la definizione di spostamento virtuale, secondo la quale i vincoli vanno considerati come se fossero fissi nella posizione attuale.