

Corso di Fisica Matematica per Ingegneria Aerospaziale

Prof. G. Fiore

Parte 4: Dinamica di un solido tramite le ECD

con complementi di geometria delle masse ed algebra tensoriale

1 ECD di un solido con un punto o un asse fisso

Consideriamo prima le Equazioni Cardinali della Dinamica (ECD) per il solido con punto fisso O nella forma del teorema del moto del baricentro e del teorema del momento angolare:

$$\underline{R}^{(v)} + \underline{R}^{(a)} = \underline{R}^{(e)} = m\underline{a}_G, \quad (1)$$

$$\underline{M}_O^{(v)} + \underline{M}_O^{(a)} = \underline{M}_O^{(e)} = \underline{\dot{K}}_O. \quad (2)$$

$\underline{R}^{(e)}, \underline{M}_O^{(e)}$ sono la risultante ed il momento risultante delle forze esterne agenti sul solido. Abbiamo distinto tra queste le attive e le vincolari, e indicato con $\underline{R}^{(a)}, \underline{R}^{(v)}$ le loro rispettive risultanti, con $\underline{M}_O^{(a)}, \underline{M}_O^{(v)}$ i rispettivi momenti rispetto a O . Per il principio di azione e reazione, il solido eserciterá sul vincolo un sistema di forze, dette *cimenti dinamici*, avente risultante $-\underline{R}^{(v)} = \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(m)}$ e momento risultante $-\underline{M}_O^{(v)} = \underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(m)}$, ove $\underline{R}^{(m)} := -m\underline{a}_G$ e $\underline{M}_O^{(m)} := -\underline{\dot{K}}_O$ sono la risultante ed il momento risultante delle *forze d'inerzia*, quelle cioè che il solido esercita sul vincolo a causa del suo moto.

1.1 Momento angolare ed energia cinetica come funzione di $\underline{\omega}$

Per applicare la (2) dobbiamo esprimere \underline{K}_O in termini dell'atto di moto del solido. Consideriamo il solido come costituito da tante particelle di posizione P_j , rigidamente legate le une alle altre (gli stessi risultati si otterrebbero anche trattandolo come un continuo, e sostituendo le somme con gli integrali). Supponiamo dapprima che O sia fisso. Siccome ad ogni istante t in un moto rigido $\underline{v}_j = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times (P_j - O)$, e $\underline{v}_O = 0$ poiché O é fisso, troviamo

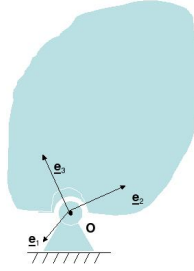
$$\begin{aligned} \underline{K}_O &:= \sum_j m_j (P_j - O) \times \underline{v}_j \\ &= \sum_j m_j (P_j - O) \times [\underline{\omega} \times (P_j - O)] \\ &= \sum_j m_j \{ (P_j - O)^2 \underline{\omega} - [(P_j - O) \cdot \underline{\omega}] (P_j - O) \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Calcoliamo ora l'energia cinetica del solido:

$$\begin{aligned} T &:= \frac{1}{2} \sum_j m_j \underline{v}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j \underline{v}_j \cdot [\underline{\omega} \times (P_j - O)] = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \sum_j m_j (P_j - O) \times \underline{v}_j \\ &= \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{K}_O. \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 Il tensore d'inerzia come esempio di tensore doppio euclideo

Per le definizioni astratte generali di tensore e spazio tensoriale si parte generalmente da quella di prodotto tensoriale, come accenneremo nella sezione 1.3. Preferiamo partire piuttosto da una definizione meno astratta ma sostanzialmente equivalente per un particolare tipo di tensori, i *tensori doppi euclidei su E_n* , identificandoli con gli *endomorfismi di uno spazio euclideo E_n* . Il calcolo di \underline{K}_O ci dá un esempio concreto e fisicamente significativo di questo tipo di tensori.



Definizione 1 Si chiama endomorfismo di uno spazio vettoriale E_n , o anche tensore (affine) su E_n di tipo $(1,1)$, un'applicazione lineare di E_n in sé. In formule:

$$\underline{Y} : \underline{\omega} \in E_n \rightarrow \underline{Y}(\underline{\omega}) \in E_n, \quad \underline{Y}(a_1\underline{\omega}_1 + a_2\underline{\omega}_2) = a_1\underline{Y}(\underline{\omega}_1) + a_2\underline{Y}(\underline{\omega}_2). \quad (5)$$

Se E_n è euclideo questo tensore si dice anche più semplicemente doppio (euclideo).

La formula (3) definisce evidentemente un endomorfismo dello spazio euclideo E_3 , o equivalentemente un tensore doppio euclideo su E_3 , che prende il nome di *tensore d'inerzia del solido rispetto al polo O*. Ad ogni vettore (velocità angolare) $\underline{\omega}$ esso associa il vettore $\underline{Y}(\underline{\omega}) = \underline{K}_O$ pari al corrispondente momento angolare del solido con punto fisso O .

Data la sua linearità, un endomorfismo \underline{Y} è completamente determinato dalle n immagini $\underline{Y}(\underline{e}_i)$ dei vettori di una base $\{\underline{e}_i\} \equiv \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ di E_n :

$$\underline{\omega} = \sum_{i=1}^n \underline{e}_i \omega^i = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y}(\underline{\omega}) = \sum_{i=1}^n \underline{Y}(\underline{e}_i) \omega^i. \quad (6)$$

Chiamiamo Y la matrice i cui elementi intervengono come coefficienti nella decomposizione dei vettori $\underline{Y}(\underline{e}_i)$ nella suddetta base: $\underline{Y}(\underline{e}_i) = \sum_j Y_i^j \underline{e}_j$. Riassumendo, la matrice Y determina gli $\underline{Y}(\underline{e}_i)$, e quindi \underline{Y} stesso:

$$\underline{Y}(\underline{\omega}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{e}_j Y_i^j \omega^i = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) Y \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Gli n^2 elementi di matrice Y_i^j sono dette componenti di \underline{Y} nella base $\{\underline{e}_i\}$. Al contrario di \underline{Y} , esse dipendono dalla scelta della base, come accade per la n -pla delle componenti di un vettore. Vediamo come. Se operiamo un cambiamento di base $\{\underline{e}_j\} \rightarrow \{\underline{e}'_j\}$, con

$$\underline{e}'_j = \sum_{h=1}^n \underline{e}_h A_j^h \quad \Leftrightarrow \quad (\underline{e}'_1 \dots \underline{e}'_n) = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n) A \quad (8)$$

le componenti di $\underline{\omega}, \underline{Y}$ devono cambiare secondo le leggi

$$\omega'^j = \sum_{k=1}^n A^{-1j}_k \omega^k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$Y'^j_i = \sum_{h,k=1}^n A^{-1j}_k Y^k_h A_i^h = \sum_{h,k=1}^n (A^{-1} Y A)_i^j \quad \Leftrightarrow \quad Y' = A^{-1} Y A \quad (10)$$

(il prodotto di matrici si intende riga per colonna) affinché il risultato della decomposizione nelle due basi sia lo stesso:

$$\sum_{j=1}^n \omega'^j \underline{e}'_j = \sum_{h=1}^n \omega^h \underline{e}_h = \underline{\omega}, \quad \sum_{i,j=1}^n Y'^j_i \underline{e}'_j \omega'^i = \sum_{h,k=1}^n Y^k_h \underline{e}_k \omega^h = \underline{Y}(\underline{\omega}).$$

Viceversa, una n -pla, (risp. una matrice) che dipende dalla base secondo questa legge determina tramite questa formula un vettore (risp. un endomorfismo) di E_n . La (10) è quindi un *criterio di tensorialità* per la matrice Y . Un altro criterio di tensorialità si ricava dalla (7) stessa: se per ogni $\underline{\omega} \in E_n$ le $w^j := \sum_{i=1}^n Y^j_i \omega^i$ sono le componenti di un vettore [e quindi trasformano secondo la (9)], allora Y è la matrice delle componenti di un endomorfismo (cioè di un tensore doppio euclideo, se E_n è euclideo).

Se E_n è euclideo ed entrambe le basi $\{\underline{e}_j\}, \{\underline{e}'_j\}$ sono ortonormali il calcolo di A^{-1} si semplifica, poiché la matrice A è *ortogonale*, cioè $A^{-1} = A^T$ (la trasposta di A)¹.

Si dota in modo naturale l'insieme $L(E_n)$ degli endomorfismi di E_n di struttura di spazio vettoriale definendo una combinazione lineare di endomorfismi attraverso la combinazione lineare dei loro risultati, o equivalentemente delle loro componenti:

$$\left[a_1 \underline{Y}_1 + a_2 \underline{Y}_2 \right] (\underline{\omega}) := a_1 \underline{Y}_1(\underline{\omega}) + a_2 \underline{Y}_2(\underline{\omega}) \quad \Leftrightarrow \quad \left[a_1 \underline{Y}_1 + a_2 \underline{Y}_2 \right]_j^i := a_1 Y_{1j}^i + a_2 Y_{2j}^i. \quad (11)$$

Nel caso del tensore d'inerzia il significato fisico di una combinazione vettoriale è il seguente. La moltiplicazione di \underline{Y} per lo scalare a corrisponde ad un cambiamento delle masse m_j (o della densità di massa $\mu(P)$) di uno stesso fattore a , come si ottiene per es. considerando due solidi omogenei di stessa geometria, ma materiali diversi; quanto alla somma, se il solido \mathcal{S} si ottiene per unione di due parti disgiunte $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ sarà $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$.

Una qualsiasi applicazione $\underline{X} : (\underline{u}, \underline{\omega}) \in E_n \times E_n \rightarrow \underline{X}(\underline{u}, \underline{\omega}) \in \mathbb{R}$ bilineare (cioè lineare sia in \underline{u} , sia in $\underline{\omega}$) si dice anche un tensore (affine) di tipo (0,2). È immediato verificare che è determinata dalla matrice X di elementi $X_{ji} := \underline{X}(\underline{e}_j, \underline{e}_i)$, tramite la formula $\underline{X}(\underline{u}, \underline{\omega}) =$

$$\sum_{i,j=1}^n X_{ji} u^j \omega^i. \text{ Se } E_n \text{ è euclideo, dato un endomorfismo } \underline{Y} \text{ posso associare a } (\underline{u}, \underline{\omega}) \in E_n \times E_n$$

il prodotto scalare $\underline{u} \cdot [\underline{Y}(\underline{\omega})] \in \mathbb{R}$; l'applicazione²

$$\underline{X} : (\underline{u}, \underline{\omega}) \in E_n \times E_n \rightarrow \underline{u} \cdot [\underline{Y}(\underline{\omega})] = \sum_{i,j=1}^n Y^j_i u_j \omega^i \in \mathbb{R} \quad (12)$$

è bilineare, cioè è un tensore di tipo (0,2), e la corrispondenza $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ è biunivoca. Quindi posso vedere un tensore doppio euclideo anche come un'applicazione bilineare $\underline{X} : E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$. Viceversa, considerando le leggi di trasformazione delle componenti u_i, ω^i di due vettori $\underline{u}, \underline{\omega}$, si dimostra il seguente altro *criterio di tensorialità*: se Y è una matrice tale che $\sum_{i,j=1}^n u_i Y^j_i \omega^j$ è uno scalare (cioè un numero reale indipendente dalla scelta della base) per

¹Applicando l'identità $\underline{x} = \sum_i (\underline{x} \cdot \underline{e}_i) \underline{e}_i$ a $\underline{x} = \underline{e}'_j$ si trova $\underline{e}'_j = \sum_i (\underline{e}'_j \cdot \underline{e}_i) \underline{e}_i$, da cui per confronto con (8), $A^j_i = \underline{e}'_j \cdot \underline{e}_i$. La matrice A^{-1} interviene nella trasformazione inversa $\{\underline{e}'_j\} \rightarrow \{\underline{e}_j\}$, in cui i ruoli delle due basi sono scambiati, e quindi $A^{-1j}_i = \underline{e}_j \cdot \underline{e}'_i = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j = A^j_i = A^{Tj}_i$ (nella seconda uguaglianza si è usata la simmetria del prodotto scalare), cioè $A^{-1} = A^T$.

²Le u_j sono le componenti covarianti di \underline{u} nella base $\{\underline{e}_j\}$. Se questa è ortonormale, $u_j = u^j$, $X_{ji} = Y^j_i$.

ogni coppia $(\underline{u}, \underline{\omega})$ allora Y_j^i sono le componenti di un tensore doppio. (Si noti che se \underline{Y} é il tensore d'inerzia su E_3 di un solido con O fisso, e scelgo $\underline{u} = \underline{\omega}/2$ lo scalare che ottengo é proprio la sua energia cinetica T). Come accenneremo piú avanti, un terzo modo equivalente di vedere un tensore doppio euclideo anche come un'applicazione lineare $\underline{Z} : \mathbb{R} \rightarrow E_n \times E_n$.

Il prodotto scalare $\underline{u} \cdot [\underline{Y}(\underline{\omega})]$, visto come una funzione di $\underline{\omega}$, é un esempio di *contrazione* di un tensore doppio euclideo ed un vettore \underline{u} , il cui risultato é a sua volta un vettore \underline{v} di componenti $v_j = \sum_i u_i Y_j^i$, che si indica generalmente con $\underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{Y}$, tale che $\underline{v} \cdot \underline{\omega} = \underline{u} \cdot \underline{Y}(\underline{\omega})$. Viceversa, considerando le leggi di trasformazione delle v_i, u_i si dimostra il seguente altro *criterio di tensorialitá*: se Y é una matrice tale che $v_j = \sum_i u_i Y_j^i$ sono le componenti di un vettore \underline{v} per ogni vettore \underline{u} allora Y_j^i sono le componenti di un tensore doppio.

1.3 (non é in programma) Spazio vettoriale duale. Cenni di algebra tensoriale

Dato uno spazio vettoriale E_n si chiama *covettore* (o *forma lineare*) un'applicazione lineare \overline{F} di E_n in \mathbb{R} . In formule:

$$\overline{F} : \underline{\omega} \in E_n \rightarrow \overline{F}(\underline{\omega}) \in \mathbb{R}, \quad \overline{F}(a_1 \underline{\omega}_1 + a_2 \underline{\omega}_2) = a_1 \overline{F}(\underline{\omega}_1) + a_2 \overline{F}(\underline{\omega}_2). \quad (13)$$

Per la linearitá, \overline{F} é completamente determinato dalla n -pla di immagini $F_i := \overline{F}(\underline{e}_i) \in \mathbb{R}$ dei vettori di una base $\{\underline{e}_i\}$ di E_n :

$$\underline{\omega} = \sum_{i=1}^n \omega^i \underline{e}_i \quad \Rightarrow \quad \overline{F}(\underline{\omega}) = \sum_{i=1}^n \omega^i F_i. \quad (14)$$

Si dota in modo naturale l'insieme \tilde{E}_n dei covettori di struttura di spazio vettoriale definendo una combinazione lineare di covettori attraverso la combinazione lineare dei loro risultati, o equivalentemente delle loro componenti:

$$[a_1 \overline{F}_1 + a_2 \overline{F}_2](\underline{\omega}) := a_1 \overline{F}_1(\underline{\omega}) + a_2 \overline{F}_2(\underline{\omega}) \quad \Leftrightarrow \quad [a_1 \overline{F}_1 + a_2 \overline{F}_2]_i := a_1 F_{1i} + a_2 F_{2i}. \quad (15)$$

\tilde{E}_n si dice *spazio vettoriale duale* di E_n . Si verifica facilmente che il sistema di n covettori $\{\overline{e}^j\} \equiv \{\overline{e}^1, \dots, \overline{e}^n\}$ definiti dalla condizione $\overline{e}^j(\underline{e}_i) = I_i^j$ (I é la matrice unitaria; l'elemento di matrice I_i^j si denota piú spesso col *simbolo di Kronecker* δ_i^j) é una base di \tilde{E}_n , detta *duale* della base $\{\underline{e}_i\}$. Quindi anche \tilde{E}_n ha dimensione n . A seguito del cambiamento di base (8) la base duale cambia secondo la legge

$$\overline{e}'^j = \sum_{k=1}^n A^{-1j}_k \overline{e}^k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \overline{e}'^1 \\ \vdots \\ \overline{e}'^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \overline{e}^1 \\ \vdots \\ \overline{e}^n \end{pmatrix}, \quad (16)$$

delle stessa forma della (9). Per la linearitá di \overline{F} , le F_i invece trasformano di nuovo come le \underline{e}_i in (8). Poiché $(A^{-1})^{-1} = A$, $\{\underline{e}_i\}$ e la base duale della duale si trasformano allo stesso modo; si possono quindi identificare gli spazi isomorfi \tilde{E}_n e E_n ($\tilde{E}_n \equiv E_n$) e queste basi.

Se E_n é euclideo, ogni $\underline{x} \in E_n$ determina un covettore \overline{F}_x tramite la definizione $\overline{F}_x(\underline{\omega}) = \underline{x} \cdot \underline{\omega}$. Se la base $\{\underline{e}_i\}$ di E_n é ortonormale, per i covettori della base duale vale evidentemente l'uguaglianza $\overline{e}^j = \overline{F}_{\underline{e}_j}$. Se inoltre entrambe le basi $\{\underline{e}_j\}, \{\underline{e}'_j\}$ sono ortonormali la (16) ha la stessa forma della (8), poiché $A^{-1} = A^T$. Si possono quindi identificare gli spazi isomorfi \tilde{E}_n e E_n , $\tilde{E}_n \equiv E_n$, e queste basi.

Definizione 2 Dati tre spazi vettoriali E_n, E_m, E_{nm} di dimensione risp. n, m, nm si chiama prodotto tensoriale un'applicazione

$$f_{\otimes} : (\underline{x}, \underline{y}) \in E_n \times E_m \rightarrow \underline{x} \otimes \underline{y} \in E_{nm} \quad (17)$$

bilineare (cioè lineare sia in \underline{x} , sia in \underline{y}) e tale che se $\{\underline{e}_i\} \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$, $\{\underline{u}_\alpha\} \equiv \{u_1, \dots, u_m\}$ sono basi di E_n, E_m allora $\{\underline{e}_i \otimes \underline{u}_\alpha\}$ è una base di E_{nm} [nel denotare $f_{\otimes}(\underline{x}, \underline{y})$ con $\underline{x} \otimes \underline{y}$ abbiamo adottato una notazione pressoché universale]. Allora si dice che E_{nm} è il prodotto tensoriale di E_n per E_m , $E_n \otimes E_m$ (si legge anche: E_n tensor E_m), e che gli elementi $\underline{T} \in E_{nm} = E_n \otimes E_m$ sono tensori.

Da $\underline{x} = \sum_{i=1}^n x^i \underline{e}_i$, $\underline{y} = \sum_{\alpha=1}^m u^\alpha \underline{u}_\alpha$ segue per la bilinearità $\underline{x} \otimes \underline{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m x^i y^\alpha (\underline{e}_i \otimes \underline{u}_\alpha)$. Quindi f_{\otimes} non è suriettiva; il codominio è costituito da tutte e sole le diadi (o elementi decomponibili) $\underline{x} \otimes \underline{y}$, cioè quegli elementi $\underline{T} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m T^{i\alpha} (\underline{e}_i \otimes \underline{u}_\alpha)$ di $E_{nm} \equiv E_n \otimes E_m$ aventi componenti della forma $T^{i\alpha} = x^i y^\alpha$, con $\underline{x} \in E_n$, $\underline{y} \in E_m$. Dalla bilinearità segue per i cambiamenti di base $\{\underline{e}_j\} \rightarrow \{\underline{e}'_j\}$, $\{\underline{u}_\beta\} \rightarrow \{\underline{u}'_\beta\}$, $\{\underline{e}_j \otimes \underline{u}_\beta\} \rightarrow \{\underline{e}'_j \otimes \underline{u}'_\beta\}$ l'implicazione

$$\underline{e}'_j = \sum_{h=1}^n A_j^h \underline{e}_h, \quad \underline{u}'_\beta = \sum_{\alpha=1}^m B_\beta^\alpha \underline{u}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{e}'_j \otimes \underline{u}'_\beta = \sum_{h=1}^n \sum_{\alpha=1}^m A_j^h B_\beta^\alpha (\underline{e}_h \otimes \underline{u}_\alpha), \quad (18)$$

e, dall'invarianza delle decomposizioni, che le $T^{j\beta}$ cambiano come i prodotti $x^j y^\beta$:

$$T'^{j\beta} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m A^{-1j}_i B^{-1\beta}_\alpha T^{i\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad T' = A^{-1} T B^{-1} T \quad (19)$$

Viceversa, una matrice $n \times m$ T che dipende dalle basi secondo questa legge determina tramite questa formula un tensore $\underline{T} \in E_n \otimes E_m$. La (19) è quindi un criterio di tensorialità per la matrice T (come detto, esso è automaticamente soddisfatto per una T della forma $T^{i\alpha} = x^i y^\alpha$, ove x^i, y^α sono componenti di vettori: T determina la diade $\underline{x} \otimes \underline{y}$).

L'iterazione del prodotto tensoriale è associativa. Dato un ulteriore spazio vettoriale E_p , il prodotto tensoriale $E_{nm} \otimes E_p$ si indica anche con $E_n \otimes E_m \otimes E_p$, e così via. Le leggi di trasformazione delle basi e delle componenti generalizzano le (18), (19). Viceversa, componenti che soddisfano le leggi generalizzate determinano tensori, e quindi le leggi generalizzate sono criteri di tensorialità. Criteri di tensorialità alternativi si formulano utilizzando contrazioni di questi tensori con potenze tensoriali di $\tilde{E}_n, \tilde{E}_m, \tilde{E}_p$ etc.

Proposizione-Definizione 1 Dato uno spazio vettoriale E_n , si dicono tensori (affini) su E_n r volte controvarianti ed s volte covarianti [più brevemente, di tipo (r, s)] gli elementi dello spazio tensoriale

$$E_n^{(r,s)} := \underbrace{E_n \otimes \dots \otimes E_n}_{r \text{ volte}} \otimes \underbrace{\tilde{E}_n \otimes \dots \otimes \tilde{E}_n}_{s \text{ volte}}. \quad (20)$$

Dalla definizione di \tilde{E}_n segue che un elemento di $\mathcal{T} \in E_n^{(r,s)}$ è un'applicazione

$$\mathcal{T} : \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_{s \text{ volte}} \rightarrow \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_{r \text{ volte}} \quad (21)$$

lineare in tutti i suoi s argomenti. I tensori di rango $(0,0)$ sono gli scalari. I tensori di tipo $(1,0)$ e $(0,1)$ sono risp. i vettori di E_n ed i corrispondenti covettori (elementi di \tilde{E}_n).

Verifichiamo l'affermazione (21) per $r = s = 1$ scegliendo per E_n, \tilde{E}_n basi duali. Applicando al vettore $\underline{\omega} = \omega^h \underline{e}_h$ i secondi fattori tensoriali (che sono covettori) nella decomposizione $\underline{T} = \sum_{i,j=1}^n T^{ij}(\underline{e}_i \otimes \bar{e}^j) \in E_n \otimes \tilde{E}_n$ trovo per la linearit  dei \bar{e}^j un altro vettore

$$\sum_{i,j,h=1}^n T^{ij} \omega^h \underline{e}_i \bar{e}^j(\underline{e}_h) = \sum_{i,j,h=1}^n T^{ij} \omega^h \underline{e}_i I_h^j = \sum_{i,j=1}^n T^{ij} \omega^j \underline{e}_i := \underline{T}(\underline{\omega});$$

l'applicazione \underline{T}   evidentemente lineare, cio  un endomorfismo. Per la dualit  delle basi   anche $B^{-1T} = A$, e la (19) si riduce alla (10), come doveva. Riassumendo, $L(E_n) = E_n \otimes \tilde{E}_n$: gli endomorfismi sono tensori di tipo (1,1).

Un'applicazione bilineare $\underline{X} : E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$   invece un tensore di tipo (0,2), cio  un elemento di $\tilde{E}_n \otimes \tilde{E}_n$, mentre un'applicazione bilineare $\underline{Z} : \mathbb{R} \rightarrow E_n \times E_n$   un tensore di tipo (2,0), cio  un elemento di $E_n \otimes E_n$. $\underline{X}, \underline{Z}$ si dicono (*anti*)*simmetrici* se tali sono le matrici X, Z ; si noti che l'(*anti*)*simmetria*   preservata dalle leggi di trasformazione $X' = A^T X A$, $Z' = A^{-1} X A^{-1T}$, quindi basta verificarla in una base perch  sia garantita in ogni base. Se E_n   euclideo, l'isomorfismo $\tilde{E}_n \approx E_n$ permette di identificare non solo \tilde{E}_n, E_n (cio  vettori e covettori), ma anche questi tre spazi, e quindi i tre tipi di tensori, che chiamiamo semplicemente tensori doppi euclidei. Se inoltre la base $\{\underline{e}_i\}$   ortonormale trovo $X_{ij} = Y_j^i = Z^{ij}$ per le componenti delle tre corrispondenti matrici X, Y, Z : le componenti 2 volte covarianti, miste, 2 volte controvarianti del tensore doppio coincidono, cos  come nella corrispondenza $\underline{x} \leftrightarrow \bar{F}_{\underline{x}}$ le componenti $x^i, F_{\underline{x}i}$ di $\underline{x}, \bar{F}_{\underline{x}}$ risp. nelle basi $\{\underline{e}_i\}, \{\bar{e}^i\}$ coincidono. Considerazioni analoghe valgono per i tensori euclidei tripli, quadrupli, etc.

Infine un tensore che dipende dalla posizione P ed eventualmente dal tempo t si chiama *campo tensoriale*. Tra gli esempi di campi tensoriali doppi che si incontrano nei corsi di studio di ingegneria citiamo il tensore di deformazione, che descrive lo stato di deformazione di un corpo esteso nel punto P all'istante t , il tensore di Cauchy, che descrive il corrispondente stato di tensione in P a t , o anche il tensore (antisimmetrico, sullo spazio E_4 di Minkowski) elettromagnetico, che ha per componenti quelle dei campi elettrico e magnetico. Einstein   stato il primo a sottolineare l'importanza che tutte le leggi fondamentali della fisica siano scritte nella forma di equazioni in ciascuna delle quali tutti i termini sono tensori (o campi tensoriali) dello stesso tipo; gli esempi pi  semplici sono le equazioni scalari (es. l'equazione di stato dei gas perfetti $PV = nRT$) e quelle vettoriali (es. la $\underline{F} = m\underline{a}$ o le ECD). Questo garantisce che la formulazione delle equazioni non dipenda dal sistema di riferimento (covarianza delle equazioni), anche se i termini vi dipendono.

1.4 Autovettori ed autovalori di un endomorfismo

Un vettore $\underline{\omega} \neq \underline{0}$ si dice *autovettore* con *autovalore* y di un endomorfismo $\underline{Y} : E_n \mapsto E_n$ se

$$\underline{Y}(\underline{\omega}) = y \underline{\omega}; \quad (22)$$

La determinazione di autovalori ed autovettori consiste nel risolvere l'*equazione agli autovettori* (22) nelle incognite $y, \underline{\omega}$. Questa si esprime in una qualsiasi base $\{\underline{e}_i\}$ di E_n nella forma

$$(y \mathbf{1}_n - Y) \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

ove $\mathbf{1}_n$ é la matrice identica. La sua risoluzione equivale a trovare soluzioni non banali di questo sistema lineare omogeneo, che esistono se e solo se y soddisfa l'equazione agli autovalori

$$\det(y\mathbf{1}_n - Y) = y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_{n-1}y + a_n = 0. \quad (24)$$

La (24) é un'equazione algebrica in y di grado n perché solo gli n elementi diagonali di $y\mathbf{1}_n - Y$ sono di grado 1 in y (gli altri sono di grado 0). I coefficienti a_h sono di grado h nelle Y_j^i ed indipendenti dalla base: infatti, riferendoci alle (8-10), rispetto ad un'altra base $\{\underline{e}'_j\}$ risulta

$$\det(y\mathbf{1}_n - Y') = \det[A^{-1}(y\mathbf{1}_n - Y)A] = \det A^{-1} \det(y\mathbf{1}_n - Y) \det A = \det(y\mathbf{1}_n - Y).$$

In particolare risulta $-a_1 = y_1 + \dots + y_n =: \text{tr}(Y)$ (la *traccia* di Y), $a_n = (-1)^n \det Y$. In generale le soluzioni y_1, \dots, y_n di (24) sono complesse; quindi anche gli autovettori soluzioni di (50) con $y = y_i$ saranno complessi. La *molteplicitá algebrica* di un autovalore y_i é il numero di volte che esso si ripete nella sequenza y_1, \dots, y_n . Gli autovettori con uno stesso autovalore y formano un sottospazio $V_y \subseteq E_n$, l'*autospazio* relativo a y ; si dice *molteplicitá geometrica* di y la dimensione di V_y .

Un tensore doppio euclideo \underline{Y} si dice *simmetrico* se $\underline{v} \cdot \underline{Y}(\underline{\omega}) = \underline{Y}(\underline{v}) \cdot \underline{\omega}$ qualunque siano $\underline{v}, \underline{\omega} \in E_n$; per la (7), occorre e basta che la matrice Y delle sue componenti in una base ortonormale sia simmetrica, $Y^T = Y$. Ricordiamo la

Proposizione 1 *Dato un tensore doppio euclideo \underline{Y} simmetrico:*

1. *Tutti i suoi autovalori y_i sono reali.*
2. *Autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali.*
3. *Esiste una base $\{\underline{e}_i\}$ ortonormale di E_n costituita da autovettori di \underline{Y} ; la corrispondente*

$$\text{matrice d'inerzia é diagonale: } Y = \begin{pmatrix} y_1 & & \\ & \dots & \\ & & y_n \end{pmatrix}.$$

4. *Molteplicitá algebrica e geometrica di ogni autovalore coincidono.*

1.5 Calcolo della matrice d'inerzia di un solido con un punto fisso

Il momento d'inerzia di un sistema materiale (in particolare un solido) rispetto a una retta r é

$$I_r := \sum_j m_j \delta_j^2 \qquad I_r := \int_V dV \mu(P) [\delta(P)]^2, \quad (25)$$

ove $\delta_j, \delta(P)$ sono risp. le distanze da r di P_j e dell'elemento di volume dV con centro P rispettivamente se il sistema é discreto o continuo. Chiaramente $I_r \geq 0$, ed $I_r = 0$ se e solo se $P_j \in r \forall j$. Fissando una terna ortonormale $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ risulta $P_j - O = x_j \underline{e}_1 + y_j \underline{e}_2 + z_j \underline{e}_3$ e

$$\begin{aligned} K_O^x &= \sum_{j=1}^n m_j [(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)\omega^x - (x_j\omega^x + y_j\omega^y + z_j\omega^z)x_j] \\ &= \sum_{j=1}^n m_j [(y_j^2 + z_j^2)\omega^x - (y_j\omega^y + z_j\omega^z)x_j] \\ &= I_x\omega^x - J_{xy}\omega^y - J_{xz}\omega^z, \end{aligned}$$

ove abbiamo definito

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_j m_j (y_j^2 + z_j^2) & I_y &= \sum_j m_j (x_j^2 + z_j^2) & I_z &= \sum_j m_j (x_j^2 + y_j^2) \\ J_{xy} &= \sum_j m_j x_j y_j & J_{xz} &= \sum_j m_j x_j z_j & J_{yz} &= \sum_j m_j y_j z_j. \end{aligned} \quad (26)$$

È facile riconoscere che I_x, I_y, I_z sono i *momenti di inerzia* del solido rispetto agli assi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ (infatti, $x_j^2 + y_j^2$ è il quadrato δ_j^2 delle distanza di P_j dall'asse \vec{z} , etc), mentre J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} sono detti *prodotti d'inerzia* del solido rispetto agli stessi assi. Permutando gli assi si troverá

$$K_O^y = -J_{xy}\omega^x + I_y\omega^y - J_{yz}\omega^z \quad K_O^z = -J_{xz}\omega^x - J_{yz}\omega^y + I_z\omega^z.$$

Queste tre relazioni si possono scrivere piú sinteticamente nella forma

$$K_O^a = \sum_{b=1}^a Y^{ab}\omega_b, \quad a = 1, 2, 3, \quad (27)$$

ove abbiamo introdotto la *matrice d'inerzia* (evidentemente simmetrica)

$$Y(O) := \begin{pmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{pmatrix}; \quad (28)$$

i momenti e prodotti d'inerzia, e quindi anche anche la matrice d'inerzia, sono funzioni delle masse e posizioni delle particelle, cioè della distribuzione di materia, del solido. Quindi,

Proposizione 2 *In una qualsiasi terna ortonormale $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ risulta*

$$\underline{K}_O = \underline{Y}(\underline{\omega}) = \sum_{a,b=1}^3 \underline{e}_a Y^{ab} \omega_b, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^3 \omega_a Y^{ab} \omega_b, \quad (29)$$

o, in termini di vettori-riga o vettori-colonna delle componenti e prodotti riga per colonna,

$$\underline{K}_O = (\underline{e}_1 \underline{e}_2 \underline{e}_3) \begin{pmatrix} K_O^1 \\ K_O^2 \\ K_O^3 \end{pmatrix} = (\underline{e}_1 \underline{e}_2 \underline{e}_3) Y \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2} (\omega^1 \omega^2 \omega^3) Y \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

La (29) mostra che la matrice d'inerzia Y é la matrice delle componenti del tensore d'inerzia \underline{Y} nella terna ortonormale $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Essa gioca un ruolo analogo a quello della massa nella determinazione della quantità di moto ed energia cinetica di un punto materiale. Riassumendo, il momento angolare \underline{K}_O e l'energia cinetica T si esprimono come funzioni della velocità angolare e del tensore d'inerzia.

Se è fisso non solo O , ma un intero asse r passante per O , il moto del solido è rotatorio attorno ad $\mathcal{A}_t = r$; risulta $\underline{\omega} = \omega \underline{\alpha}$ con $\underline{\alpha}$ versore di r , $\omega^a = \omega \alpha^a$, da cui, sostituendo nella (29)₂, $T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab} \alpha_a \alpha_b$. In un capitolo precedente avevamo mostrato che l'energia cinetica di un solido che ruota attorno a r è anche pari a $T = I_r \omega^2 / 2$, da cui per confronto

$$I_r = \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) \alpha_a \alpha_b = I_x \alpha_1^2 + I_y \alpha_2^2 + I_z \alpha_3^2 - 2J_{xy} \alpha_1 \alpha_2 - 2J_{xz} \alpha_1 \alpha_3 - 2J_{yz} \alpha_2 \alpha_3, \quad (31)$$

che prende il nome di *legge di variazione di I_r per $r \in$ stella di centro (proprio) O* . Essa ci dice che I_r , per le infinite rette r , è sempre combinazione dei sei momenti e prodotti d'inerzia rispetto alla terna prescelta. Ad essa si può arrivare anche con un calcolo diretto dalla (25).

1.6 La decomposizione della IIECD in una terna solidale

Il solido ha tre gradi di libertà, cioè bastano 3 coordinate angolari (es. gli angoli di Eulero φ, ϑ, ψ) per individuare la disposizione del solido nello spazio; vogliamo mostrare che la IIECD (2) ne determina il moto, cioè la dipendenza dal tempo $\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t)$. Osserviamo innanzitutto che anche le $\omega_a(t)$ sono funzione solo degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime rispetto al tempo. Possiamo scrivere la IIECD in tanti riferimenti. Quale ci conviene scegliere? Uno solidale al solido, così che gli elementi della matrice di inerzia non dipendono da t . Allora, ricordando le formule di Poisson $\dot{e}_a = \underline{\omega} \times \underline{e}_a$, essa diventa

$$\begin{aligned} \underline{M}_O^{(e)} &= \underline{\dot{K}}_O \equiv \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) [\underline{\omega} \times \underline{e}_a \omega_b + \underline{e}_a \dot{\omega}_b] \\ &= \underline{\omega} \times \underline{K}_O + \sum_{a,b=1}^3 Y^{ab}(O) \underline{e}_a \dot{\omega}_b; \end{aligned} \quad (32)$$

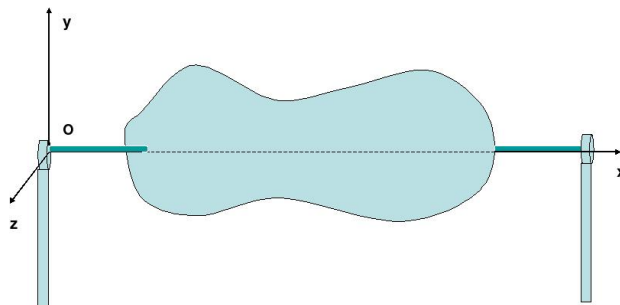
una volta espresse le $\omega_a(t)$ in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate, questa equazione vettoriale dá tre equazioni differenziali del secondo ordine nelle sole tre incognite $\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t)$, che ammettono una ed una sola soluzione una volta assegnate le condizioni iniziali, come affermato.

1.7 Applicazione delle ECD ad un solido con un asse fisso \mathcal{A}

Supponiamo ora che sia fisso non solo un punto del solido, ma un intero asse \mathcal{A} ; il solido ha quindi 1 solo grado di libertà, corrispondente alle rotazioni attorno ad \mathcal{A} . Come sistema di riferimento solidale scegliamo per semplicitá un sistema di riferimento con origine O su \mathcal{A} e asse $\vec{x} \equiv \mathcal{A}$. Cosí, da $\underline{\omega} \parallel \mathcal{A}$ segue $\underline{\omega} \equiv (\omega^x, 0, 0) \equiv (\dot{\theta}, 0, 0)$ (abbiamo indicato con θ l'angolo tra due piani per \mathcal{A} , uno fisso e uno solidale al corpo), e quindi dalla relazione precedente

$$\underline{K}_O = (I_x \underline{e}_1 - J_{xy} \underline{e}_2 - J_{xz} \underline{e}_3) \dot{\theta}, \quad (33)$$

$$\underline{\dot{K}}_O = (I_x \underline{e}_1 - J_{xy} \underline{e}_2 - J_{xz} \underline{e}_3) \ddot{\theta} + [J_{xz} \underline{e}_2 - J_{xy} \underline{e}_3] \dot{\theta}^2. \quad (34)$$



Scriviamo le tre componenti della IIECD (2):

$$\begin{aligned} M_O^{(v)x} + M_O^{(a)x} &= M_O^{(e)x} = I_x \ddot{\theta} \\ M_O^{(v)y} + M_O^{(a)y} &= M_O^{(e)y} = -J_{xy} \ddot{\theta} + J_{xz} \dot{\theta}^2 \\ M_O^{(v)z} + M_O^{(a)z} &= M_O^{(e)z} = -J_{xz} \ddot{\theta} - J_{xy} \dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Questo sistema ha 4 incognite: $\theta(t)$ e le 3 componenti di $\underline{M}_O^{(v)}$, dato che $\underline{M}_O^{(a)}$ è una funzione nota dell'incognita $\theta(t)$ e della sua derivata.

1.7.1 Caso del vincolo liscio

Se il vincolo di asse fisso (cerniera cilindrica) è liscio, risulta $M_O^{(v)x} = 0$, e quindi la prima equazione, non contenendo più le incognite reazioni vincolari, diventa

$$I_x \ddot{\theta} = M_O^{(a)x}, \quad (36)$$

e può essere senz'altro risolta. Essa ammette una ed una sola soluzione, una volta assegnate le condizioni iniziali. Il moto di rotazione attorno all'asse è determinato quindi dalla prima equazione. Questa è un'equazione simile alla $m\ddot{x} = F^x$: al posto della componente x della forza c'è la componente x del momento risultante delle forze agenti sul solido, al posto dell'accelerazione lineare lungo x c'è l'accelerazione angolare attorno a \vec{x} , al posto della massa (inerziale) c'è il momento d'inerzia rispetto a \vec{x} : tanto più esso è grande, tanto più il solido oppone resistenza alla variazione della velocità angolare. Osserviamo che la condizione di equilibrio per il solido è che $M_O^{(a)x} = 0$.

Pendolo composto

Scriviamo l'equazione nel caso particolare di un solido pesante ruotante attorno ad un asse orizzontale liscio (che scegliamo come asse \vec{x}). L'unica forza attiva è evidentemente la forza peso, (G, mg) . Indichiamo con θ l'angolo tra il piano π passante per \vec{x} e verticale (e quindi fisso) ed il piano π' passante per \vec{x} e G (e quindi solidale al solido), v. Fig. 1-sinistra. Detta d la distanza di G da \vec{x} (la supporremo > 0), il braccio di (G, mg) rispetto a \vec{x} risulta evidentemente $h = d \sin \theta$.

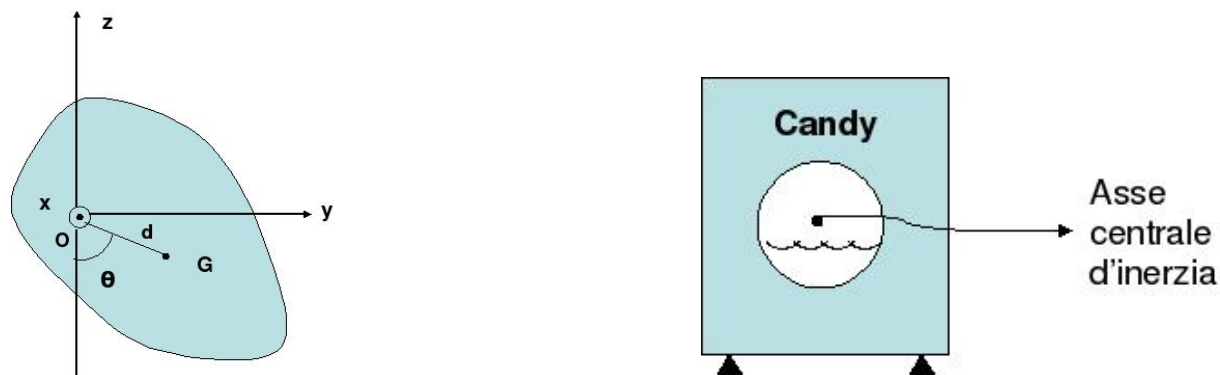


Figure 1:

Quindi l'equazione (36) diventa

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \sin \theta, \quad \text{ove } \Omega^2 := mg d / I_x. \quad (37)$$

Questa è la stessa equazione differenziale che regola il moto di un pendolo semplice, la pulsazione Ω di quest'ultimo essendo definita da $\Omega^2 = g/l$! In altri termini, il solido si muove

come un pendolo semplice di lunghezza $l = I_x/md!$ Per questo motivo suole chiamarsi "pendolo composto", ed l *lunghezza equivalente* del pendolo composto.

Se si vincola il solido pesante a ruotare non attorno a \vec{x} ma attorno ad un asse $r' \parallel \vec{x}$ posto a distanza l nel piano $G\vec{x}$, Ω^2 non cambia (*reversibilit  del pendolo composto*)! Per dimostrarlo basta usare il teorema di Steiner-Huygens. Ci  suggerisce un metodo per misurare g con grande precisione senza bisogno di misurare I_x , semplicemente da $g = \Omega^2 l$. Si osservi innanzitutto che le frequenze Ω si possono misurare con grande precisione pur di disporre di un tempo sufficiente per contare tanti periodi. Si pu  inoltre determinare con grande precisione l'asse $r' \parallel \vec{x}$ che d  lo stesso periodo per approssimazioni successive, spostandolo con metodi micrometrici.

Le restanti reazioni vincolari

Torniamo alla discussione generale. A che servono le IECD (2) e le altre due equazioni di (35)? La IECD ci serve a determinare $\underline{R}^{(v)}$:

$$\underline{R}^{(v)} = -\underline{R}^{(a)} + m\underline{a}_G$$

Entrambi i termini a secondo membro sono ora noti, perch  noto ormai il moto del solido (e quindi anche di G). Come detto, $-m\underline{a}_G$   la risultante delle forze d'inerzia, il sistema di forze che il corpo esercita sul vincolo per effetto del moto. Detti G^* la proiezione ortogonale di G sull'asse e $\delta_G = \|G - G^*\|$, il moto di G   circolare su una circonferenza di centro G^* e raggio δ_G ortogonale all'asse. Quindi $\underline{v}_G = \dot{\theta}\delta_G\underline{e}_t$, $\underline{a}_G = \delta_G(\ddot{\theta}\underline{e}_t - \dot{\theta}^2\underline{e}_G)$, ove $\underline{e}_G = (G - G^*)/\delta_G$, \underline{e}_t sono rispettivamente i versori normale esterno e tangente alla circonferenza. La componente centrifuga $m\dot{\theta}^2\delta_G\underline{e}_G = m\dot{\theta}^2(G - G^*)$ della risultante delle forze d'inerzia   proporzionale al quadrato della velocit  angolare, quindi molto grande se quest'ultima   grande; inoltre, mentre nella terna solidale ha direzione costante, nella terna fissa questa ruota con frequenza proporzionale a $\dot{\theta}$, quindi anch'essa molto alta. Il vincolo di asse fisso quindi viene sollecitato con una risultante intensa e rapidamente variabile, col rischio che venga danneggiato. Si pu  rendere la risultante $-m\underline{a}_G$ delle forze d'inerzia nulla senza fermare la rotazione? S , evidentemente deve essere $\delta_G = 0$, cio  $G \in \mathcal{A}$, cio  si deve scegliere come \mathcal{A} un asse baricentrale. Si effettua cos  il cosiddetto *bilanciamento statico* delle forze d'inerzia. Sostituendo invece la soluzione $\theta(t)$ nelle altre due equazioni di (35) troviamo ora le incognite $M_O^{(v)y}, M_O^{(v)z}$:

$$M_O^{(v)y} = -M_O^{(a)y} - J_{xy}\ddot{\theta} + J_{xz}\dot{\theta}^2, \quad (38)$$

$$M_O^{(v)z} = -M_O^{(a)z} - J_{xz}\ddot{\theta} - J_{xy}\dot{\theta}^2; \quad (39)$$

infatti, i secondi membri sono ora completamente noti. $J_{xy}\ddot{\theta} - J_{xz}\dot{\theta}^2$ e $J_{xz}\ddot{\theta} + J_{xy}\dot{\theta}^2$ sono le componenti y, z del *momento delle forze d'inerzia*. Anche esse nella terna fissa sono oscillanti rapidamente e con ampiezza molto grande se $\dot{\theta}$   grande. Il vincolo di asse fisso quindi viene sollecitato con un momento intenso e rapidamente variabile, col rischio che venga danneggiato. Si possono rendere nulle? S , condizione necessaria e sufficiente   che sia $J_{xy} = 0 = J_{xz}$; come ricorderemo sotto, ci  equivale a dire che \vec{x}   **asse principale d'inerzia**. Adottando la scelta $\mathcal{A} \equiv \vec{x}$ dell'asse di rotazione si effettua il cosiddetto *bilanciamento dinamico* delle forze d'inerzia, cio  le reazioni vincolari devono bilanciare solo le forze

attive, perché l'effetto del moto scompare:

$$M_O^{(v)y} = -M_O^{(a)y} \quad M_O^{(v)z} = -M_O^{(a)z}. \quad (40)$$

Il bilanciamento sia statico sia dinamico (in cui il vincolo esercita la - e quindi per reazione è soggetto alla - “minima” sollecitazione possibile), si ottiene ora evidentemente se e solo se \mathcal{A} è asse baricentrale e principale, cioè **centrale d'inerzia**! È il motivo per cui per esempio la centrifuga di una lavatrice (v. Fig. 1-destra) è costruita in modo da essere vincolata a ruotare attorno al suo asse di simmetria, che è asse centrale di inerzia.

Nelle Figure 2 riportiamo tre semplicissimi esempi di solido con bilanciamento risp. solo dinamico, solo statico, statico e dinamico.

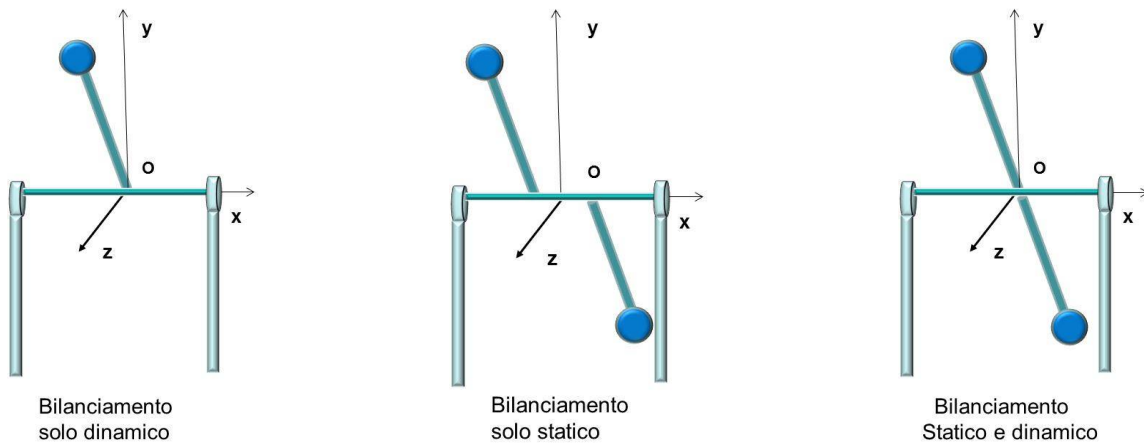


Figure 2:

1.8 Ulteriori elementi di geometria delle masse

Se $J_{xy} = 0 = J_{xz}$ allora da (29) segue immediatamente che $\underline{Y}(\underline{e}_1) = I_x \underline{e}_1$, cioè i vettori $\parallel \underline{x}$ sono autovettori di \underline{Y} , con autovalore I_x ! In generale

Definizione 3 Una retta r passante per O si dice un asse principale d'inerzia se un (qualunque) vettore $\underline{\omega} \parallel r$ è autovettore del tensore d'inerzia \underline{Y} con autovalore I_r ,

$$\underline{Y}(\underline{\omega}) = I_r \underline{\omega}; \quad (41)$$

I_r è il relativo momento principale d'inerzia. Se $O \equiv G$ anziché principale si dice centrale.

Quindi, gli assi e momenti principali (o centrali) d'inerzia si possono trovare risolvendo l'equazione agli autovettori del tensore d'inerzia. Per la proposizione 1 si possono presentare solo i seguenti casi:

1. Esiste un'unica *terna principale d'inerzia*, cioè terna ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ di assi principali d'inerzia (autovettori) con tre momenti principali (autovalori) distinti I_x, I_y, I_z .

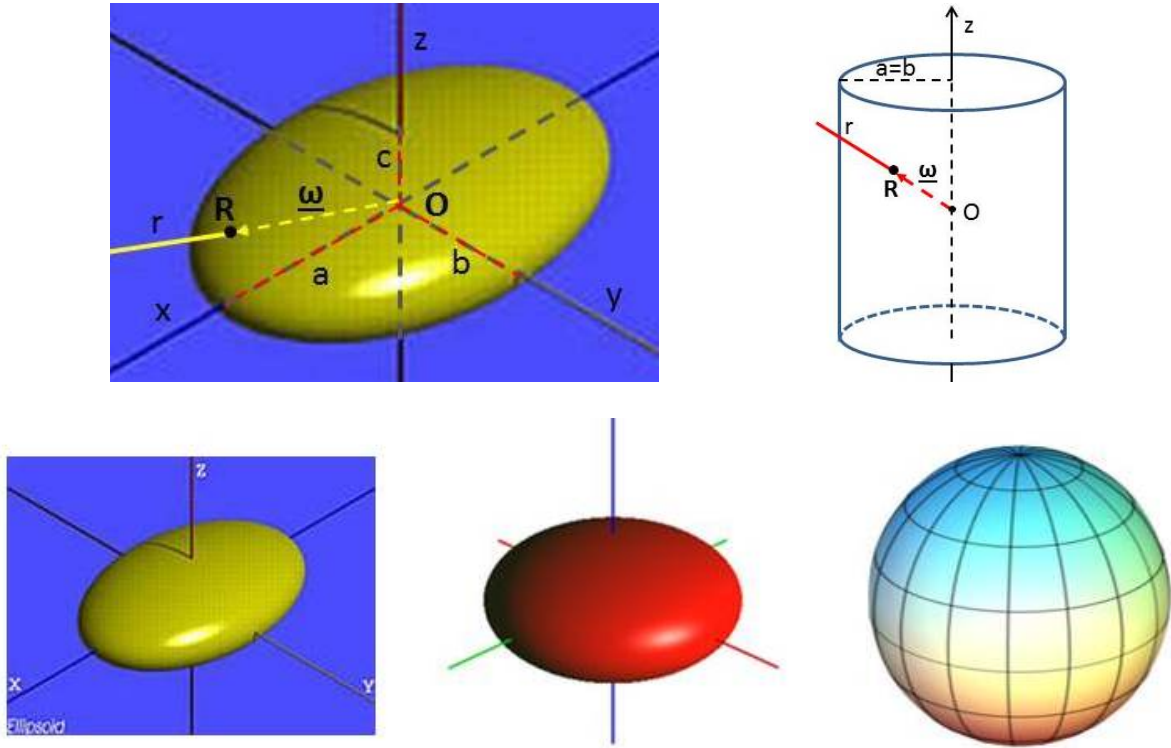


Figure 3:

2. Un momento principale (autovalore) ha molteplicitá 2 e l'altro molteplicitá 1, per cui esistono ∞^1 terne principali $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$; se per es. $I_x = I_y \neq I_z$, queste terne si ottengono l'una dall'altra tramite una rotazione di un angolo arbitrario attorno a \vec{z} .
3. Tutte le ∞^3 terne ortogonali $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ sono principali, $I_x = I_y = I_z$ (i tre momenti principali - o autovalori - coincidono, cioè I_x ha molteplicitá 3), e $Y = I_x \mathbf{1}_3$.

In ogni caso, in una terna $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ principale d'inerzia Y é diagonale: $Y = \begin{pmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{pmatrix}$.

Inoltre, per la (25) $I_x, I_y, I_z \geq 0$; uno dei momenti principali é nullo, per esempio $I_z = 0$, se e solo se tutte le particelle giacciono su esso, ed allora risulta anche $I_x = I_y$.

Sostituendo nella (29)₂, troviamo

$$T = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2). \quad (42)$$

che ci dá nella forma piú semplice, o *canonica*, l'energia cinetica T del solido come funzione delle ω_a . Viceversa, fissata $T > 0$ la (42) [o, se usiamo una terna generica, la (29)₂] é un'equazione che determina le velocità angolari $\underline{\omega}$ che danno il valore T dell'energia cinetica. Associando a $\underline{\omega}$ il punto R di coordinate $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \in \mathbb{R}^3$ (cioé l'estremo di $\underline{\omega}$ applicato a O), la superficie E_O dei punti soluzione di (42) é simmetrica rispetto ad O [perché contiene R ed il suo simmetrico $R'(-\omega_x, -\omega_y, -\omega_z)$], ed é: un ellissoide, detto *ellissoide d'inerzia* di centro O , se $I_x, I_y, I_z > 0$; un cilindro di asse z e raggio $a = \sqrt{2T/I_x}$ se $I_z = 0, I_x = I_y > 0$ (v. figure 3 in alto).³ I suoi piani di simmetria sono detti *principali di inerzia*; ciascun asse

³Escludiamo il caso $I_x = I_y = I_z = 0$: solido che si riduce ad una particella posta in O .

principale é intersezione di due piani principali ortogonali ed é normale ad un terzo piano principale. Questa proprietá caratterizza gli assi principali, e puó essere usata anche come loro definizione alternativa. Riscrivendo l'equazione canonica (42) dell'ellissoide E_O nella forma

$$\frac{\omega_x^2}{a^2} + \frac{\omega_y^2}{b^2} + \frac{\omega_z^2}{c^2} = 1, \quad a := \sqrt{\frac{2T}{I_x}}, \quad b := \sqrt{\frac{2T}{I_y}}, \quad c := \sqrt{\frac{2T}{I_z}}, \quad (43)$$

risulta evidente che i tre assi di E_O hanno lunghezze $2a, 2b, 2c$ (v. figura 3 sinistra). Nei casi 1,2,3 su elencati E_O é rispettivamente: 1. *triassico* (a, b, c distinti); 2. *rotondo* (cioé invariante per rotazione) attorno a \vec{z} , con $a=b \neq c$; 3. *sferico* ($a=b=c$). V. figure 3 in basso.

Fissando T , dalla formula $T = I_r \omega^2 / 2$ che dá l'energia cinetica del solido ruotante attorno ad una qualsiasi retta r passante per O (ricordiamo che $\underline{\omega} \parallel r$) ricaviamo

$$I_r = \frac{2T}{\omega^2}. \quad (44)$$

ω é anche la distanza da O del punto $R(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, intersezione di r con E_O (v. figura 3 in alto); misurandola e sostituendola nella formula possiamo quindi determinare geometricamente I_r , e vedere come varia al variare di r . In questo modo E_O dá una rappresentazione geometrica della legge (31) di variazione di I_r al ruotare di r attorno ad O . In particolare vediamo che: i) I_r é massimo, minimo rispettivamente quando r é l'asse principale di lunghezza minima, massima; ii) un asse é principale se e solo se é di stazionarietá per I_r , cioé se in corrispondenza di esso si annullano le derivate prime di I_r rispetto a due angoli (per es. θ, φ) che ne individuano la direzione. Aumentando T E_O si dilata, ma tutti questi risultati rimangono validi.

1.8.1 Proprietá di simmetria

Se il solido ha un piano di simmetria π , allora la retta n normale a π in ogni punto $O \in \pi$ é asse principale; se $O = G$, é centrale. Equivalentemente, π é di simmetria anche per E_O, E_G (v. figura 4 sinistra). Fissata infatti una terna ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ con $O\vec{x}\vec{y} \equiv \pi$, per ogni particella $P_j \notin \pi$, dette m_j e (x_j, y_j, z_j) le sue massa e coordinate, la sua simmetrica P'_j avrá massa $m'_j = m_j$ e coordinate $(x'_j, y'_j, z'_j) = (x_j, y_j, -z_j)$, e il contributo $m_j x_j (z_j - z'_j)$ di ognuna di queste coppie a J_{xz} sará nullo; il contributo di $P_j \in \pi$ sará anche nullo perché $z_j = 0$; quindi $J_{xz} = 0$. Analogamente, $J_{yz} = 0$. Quindi \vec{z} , cioé la normale in O , é principale d'inerzia, c.v.d.

Se il solido ha due piani di simmetria π_1, π_2 , allora le rette n_1, n_2 normali a π_1, π_2 in un punto $O \in p := \pi_1 \cap \pi_2$ sono entrambe asse principali, e quindi anche p . Se $\pi_1 \perp \pi_2$, allora la (o una) terna principale con origine in O sará $O\vec{n}_1\vec{n}_2\vec{p}$. Se π_1, π_2 non sono perpendicolari, allora non lo sono neanche n_1, n_2 ; ma E_O é rotondo attorno a p , ossia tutte le rette $\perp p$ per O sono principali, e una qualsiasi terna ortogonale avente \vec{p} come un asse sará principale.

Le considerazioni precedenti si applicano in particolare a $O = G$, che appartiene ad ogni piano di simmetria del solido.

1.8.2 Variazione della matrice d'inerzia per traslazione di terna baricentrale

Per il teorema di Huygens-Steiner i momenti di inerzia $I_r, I_{r'}$ di un solido rispetto ad una retta r ed alla retta $r' \parallel r$ passante per il baricentro G (v. figura 4 centro) sono collegati da

$$I_r = I_{r'} + m\delta^2, \quad (45)$$

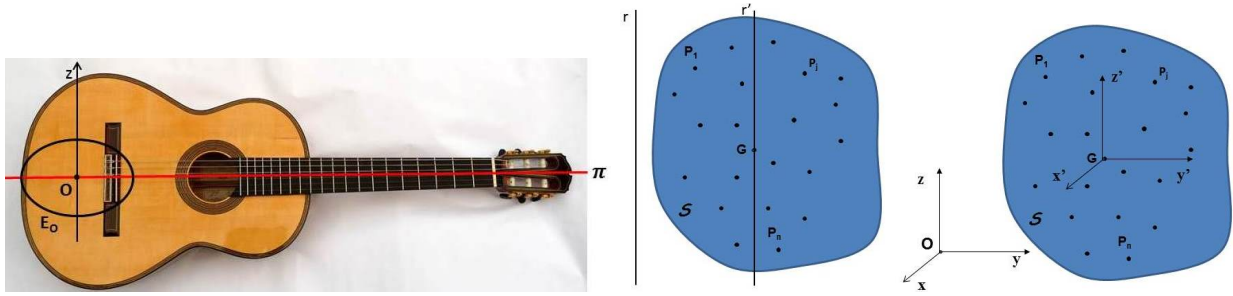


Figure 4:

dove m é la massa del solido e δ é la distanza di r' , o equivalentemente di G , da r . Data una qualsiasi terna ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$, sia $G\vec{x}'\vec{y}'\vec{z}'$ la terna con origine in G ed assi paralleli a quelli della prima terna (v. figura 4 destra); equivalentemente $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ si ottiene da una traslazione di $G\vec{x}'\vec{y}'\vec{z}'$. Applicando il teorema di Huygens-Steiner troviamo

$$I_x = I_{x'} + m(y_G^2 + z_G^2), \quad I_y = I_{y'} + m(x_G^2 + z_G^2), \quad I_z = I_{z'} + m(x_G^2 + y_G^2), \quad (46)$$

ove (x_G, y_G, z_G) sono le coordinate di G in $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$. Analogamente, per i prodotti d'inerzia

$$J_{xy} = J_{x'y'} + mx_G y_G, \quad J_{xz} = J_{x'z'} + mx_G z_G, \quad J_{yz} = J_{y'z'} + my_G z_G, \quad (47)$$

e quindi, sinteticamente, le matrici d'inerzia $Y(O)$, $Y(G)$ associate alle due terne soddisfano

$$Y(O) = Y(G) + Y_G(O), \quad Y_G(O) := m \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

L'ultimo termine a secondo membro di ciascuna delle (45-47) é il momento o prodotto d'inerzia rispetto agli stessi assi che avrebbe il solido se fosse concentrato tutto in G ; cosí $Y_G(O)$ é la matrice d'inerzia rispetto a $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ che avrebbe il solido concentrato in G . Possiamo dimostrare le (45-47) partendo dai teoremi di Koenig, o con il seguente calcolo diretto. Le coordinate della generica particella P_j rispetto alle due terne soddisfano le relazioni $x_j = x'_j + x_G$, $y_j = y'_j + y_G$, $z_j = z'_j + z_G$, che sostituite nelle definizioni di J_{xy} , $J_{x'y'}$ danno

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum_j m_j (x'_j + x_G)(y'_j + y_G) = \sum_j m_j x'_j y'_j + (\sum_j m_j) x_G y_G + (\sum_j m_j x'_j) y_G + (\sum_j m_j y'_j) x_G \\ &= J_{x'y'} + m x_G y_G + 0 + 0. \end{aligned}$$

Gli ultimi due termini sono nulli per le relazioni $\sum_j m_j x'_j = m x'_G = 0$, $\sum_j m_j y'_j = 0$, $\sum_j m_j z'_j = 0$, dette *regole dei momenti statici*. Analogamente si dimostrano le altre relazioni.

Osserviamo ora che i tre prodotti $x_G y_G$, $x_G z_G$, $y_G z_G$ sono nulli se e solo se due (almeno) delle x_G, y_G, z_G sono nulle, cioè se e solo se G appartiene ad un asse della terna $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$, o equivalentemente O appartiene ad un'asse della terna $G\vec{x}'\vec{y}'\vec{z}'$. Allora da (47) segue che

$$J_{xy} = J_{x'y'}, \quad J_{xz} = J_{x'z'}, \quad J_{yz} = J_{y'z'}. \quad (49)$$

In particolare, i primi membri sono nulli se e solo se lo sono i secondi. É cosí dimostrata la

Proposizione 3 *Se la terna $G\vec{x}'\vec{y}'\vec{z}'$ é centrale d'inerzia, allora la terna $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ con assi paralleli é principale d'inerzia se e solo se O appartiene ad un'asse centrale d'inerzia.*

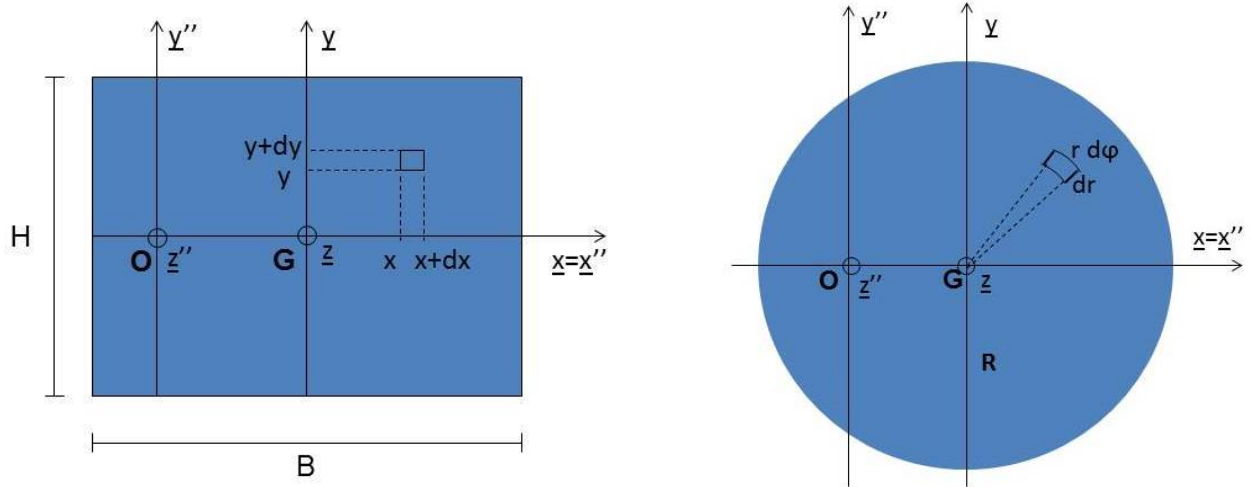


Figure 5:

1.8.3 Matrice d'inerzia per sistemi materiali piani

Il piano π che contiene tutte le particelle del sistema é anche di simmetria per esso. Scelta una terna ortogonale $O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ con $O\vec{x}\vec{y} \equiv \pi$, sará $z_j = 0$ per ogni particella P_j , quindi dalle definizioni (26) segue che $J_{xz} = J_{yz} = 0$, e \vec{z} é principale d'inerzia, con momento principale pari a $I_z = I_x + I_y$ qualunque siano gli assi \vec{x}, \vec{y} . Gli altri due assi \vec{x}', \vec{y}' di una terna principale sono $\perp \vec{z}$, e gli autovettori associati hanno $\omega^3 = 0$. Il problema agli autovettori rimanente é quindi

$$\begin{pmatrix} y - I_x & J_{xy} & 0 \\ J_{xy} & y - I_y & 0 \\ 0 & 0 & y - I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (50)$$

i momenti principali $I_{x'}, I_{y'}$ sono le soluzioni dell'equazione agli autovalori in 2 dimensioni $\det \begin{pmatrix} y - I_x & J_{xy} \\ J_{xy} & y - I_y \end{pmatrix} = 0$, ed il generico autovettore $\underline{\omega} \parallel \vec{x}'$ ha componenti soluzioni dell'eq. in 2 dimensioni $(I_{x'} - I_x)\omega^1 + J_{xy}\omega^2 = 0$: detto θ' l'angolo tra \vec{x}, \vec{x}' si trova facilmente

$$\left. \begin{matrix} I_{x'} \\ I_{y'} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[I_x + I_y \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right], \quad \theta' = \tan^{-1} \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{I_x - I_{x'}}{J_{xy}} \right]. \quad (51)$$

Con le formule trigonometriche di duplicazione si mostra che $(51)_2$ equivale a

$$2\theta' = \tan^{-1} \left[\frac{2J_{xy}}{I_y - I_x} \right]; \quad (52)$$

questa si trova piú rapidamente imponendo che \vec{x}' sia di stazionarietá per I_r , cioé $dI_r/d\theta = 0$: sostituendo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ in (31), con le formule di duplicazione troviamo

$$I_r = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - 2J_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dI_r}{d\theta} \right|_{\theta'} = (I_y - I_x) \sin 2\theta' - 2J_{xy} \cos 2\theta' = 0,$$

da cui segue la (52). Sostituendo $\theta = \theta'$, $\theta = \theta' + \pi/2$ nell'espressione per I_r ritroviamo (51)₁. In alternativa, se c'è un altro piano di simmetria passante per O allora sfruttando le proprietà 1.8.1 la determinazione di \vec{x}' , \vec{y}' è immediata.

In particolare, usando le proprietà di simmetria è facile mostrare che la terna centrale d'inerzia $G\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ di un rettangolo omogeneo e di un disco sono quelli disegnati in figura 5; quella del disco è determinata a meno di una rotazione attorno a \vec{z} , ed $I_x = I_y$. Nella figura riportiamo anche una terna principale $O\vec{x}''\vec{y}''\vec{z}''$ con assi paralleli a quella centrale (Prop. 3). Indichiamo con m, μ la loro massa e densità superficiale. Calcoliamo i momenti centrali tramite integrazione, con coordinate cartesiane $-B/2 \leq x \leq B/2$, $-H/2 \leq y \leq H/2$

$$I_x = \int_{-B/2}^{B/2} dx \int_{-H/2}^{H/2} dy \mu y^2 = \mu B \frac{y^3}{3} \Big|_{-H/2}^{H/2} = \mu B \frac{H^3}{12} = m \frac{H^2}{12}, \quad I_y = m \frac{B^2}{12}, \quad I_z = m \frac{B^2 + H^2}{12} \quad (53)$$

nel caso del rettangolo, e coordinate polari $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ nel caso del disco:

$$I_z = \int_0^R dr r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \mu = \frac{r^4}{4} \Big|_0^R 2\pi \mu = \mu \pi \frac{R^4}{2} = m \frac{R^2}{2}, \quad I_x = I_y = m \frac{R^2}{4}. \quad (54)$$

1.9 Dinamica di un solido con un punto fisso O

Prendendo come terna solidale $O\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$ una principale di inerzia diagonalizzo $Y(O)$ in (32):

$$Y(O) = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix} \quad (55)$$

Chiaramente \vec{e}'_i ruotano rispetto alla terna fissa, e valgono le formule di Poisson $\frac{d}{dt}\vec{e}'_i = \underline{\omega} \times \vec{e}'_i$. Indichiamo, come Eulero, con A, B, C i momenti principali corrispondenti e con p, q, r le componenti di $\underline{\omega}$ in $\{\vec{e}'_i\}$; sono quindi le componenti nel riferimento solidale della velocità angolare rispetto al riferimento fisso. Risulta di conseguenza

$$\underline{\omega} = p\vec{e}'_1 + q\vec{e}'_2 + r\vec{e}'_3 \quad (56)$$

$$\underline{K}_O = Ape'_1 + Bqe'_2 + Cre'_3 \quad (57)$$

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \quad (58)$$

$$\dot{\underline{K}}_O = A\dot{p}\vec{e}'_1 + B\dot{q}\vec{e}'_2 + C\dot{r}\vec{e}'_3 + \underline{\omega} \times \underline{K}_O \quad (59)$$

$$\begin{aligned} Ap - (B - C)qr &= M_O^{(e)'x} = M_O^{(v)'x} + M_O^{(a)'x} \\ Bq - (C - A)rp &= M_O^{(e)'y} = M_O^{(v)'y} + M_O^{(a)'y} \\ Cr - (A - B)pq &= M_O^{(e)'z} = M_O^{(v)'z} + M_O^{(a)'z}; \end{aligned} \quad (60)$$

sono tre equazioni del primo ordine nelle nove incognite $p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi$, ($\underline{M}_O^{(a)}$ può dipendere in generale da tutte e sei) e le 3 componenti di $\underline{M}_O^{(v)}$. Per pareggiare numero di equazioni e di incognite bisogna aggiungere tre relazioni che diano conto dell'effetto dell'attrito e le tre

relazioni, puramente cinematiche, che collegano p, q, r a $\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$. Le prime tre sono note (e semplicissime) solo nel caso di punto fisso liscio: $\underline{M}_O^{(v)} = 0$. Le seconde sono le

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= f(p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi) := (p \sin \psi + q \cos \psi) / \sin \theta \\ \dot{\vartheta} &= g(p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi) := p \cos \psi - q \sin \psi \\ \dot{\psi} &= h(p, q, r, \varphi, \vartheta, \psi) := r - \cot \theta (p \sin \psi + q \cos \psi)\end{aligned}\tag{61}$$

Esse si possono ricavare sostituendo $\underline{e}'_j = \sum_{h=1}^3 A_j^h(t) \underline{e}_h$, $\dot{\underline{e}}'_j = \sum_{h=1}^3 \dot{A}_j^h(t) \underline{e}_h$, ($\{\underline{e}_h\}$ é la terna fissa) con la matrice A espressa in termini di angoli di Eulero φ, ϑ, ψ , nella formula (del teorema di Poisson) $\underline{\omega} := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \underline{e}'_j \times \dot{\underline{e}}'_j$. Solo quando $\underline{M}_O^{(e)}$ non dipende da φ, ϑ, ψ (in particolare, quando é nullo) allora le (60) sono disaccoppiate e possono essere risolte separatamente.

1.9.1 Moti di Poinsot

Quando $\underline{M}_O^{(e)} = 0$ il moto di rotazione é libero (moto di “Poinsot”) e le equazioni possono essere integrate esattamente. Ciò accade per esempio se il punto fisso é liscio e non ci sono forze attive. Innanzitutto cerchiamo soluzioni delle equazioni di Eulero del tipo: $p, q, r = cost$,

$$p(t) = p_0, \quad q(t) = q_0, \quad r(t) = r_0.\tag{62}$$

Le equazioni di Eulero diventano

$$(B - C)q_0r_0 = 0, \quad (C - A)r_0p_0 = 0, \quad (A - B)p_0q_0 = 0.\tag{63}$$

Amnesso che ne esistano, esse corriponderanno a rotazioni uniformi attorno ad asse invariabili (*rotazioni permanenti*). Infatti per le formule di Poisson si avrà

$$\underline{\dot{\omega}} = p_0 \underline{e}'_1 + q_0 \underline{e}'_2 + r_0 \underline{e}'_3 = \underline{\omega} \times (p_0 \underline{e}'_1 + q_0 \underline{e}'_2 + r_0 \underline{e}'_3) = \underline{\omega} \times \underline{\omega} = \underline{0}$$

che implica che $\underline{\omega} = cost$, e quindi l’asse di rotazione $\mathcal{A}_t \parallel \underline{\omega}$ ha direzione costante, ma dovendo passare per O sarà invariante e la velocità angolare $\dot{\varphi} = cost$. Mostriamo ora effettivamente l’esistenza di questo tipo di soluzioni distinguendo i tre casi possibili.

1. Se A, B, C sono tutti differenti le (63) ammettono soluzioni costanti con due delle tre costanti p_0, q_0, r_0 uguali a zero. Queste tre soluzioni corrispondono a moti di rotazione uniforme attorno ai tre (soli) assi principali. Se $A < B < C$, si può mostrare che le rotazioni attorno al primo e al terzo asse sono stabili, quelle attorno al secondo sono instabili.
2. Supponiamo ora che l’ellissoide d’inerzia sia rotondo, e perciò due dei momenti principali di inerzia sono uguali, ad es. $A = B$. Le (63) saranno soddisfatte se

$$p_0 = q_0 = 0, \quad r_0 \text{ arbitrario}; \quad \text{oppure } r_0 = 0, \quad p_0, q_0 \text{ arbitrari.}$$

La prima darà la rotazione uniforme attorno all’asse principale di inerzia di direzione \underline{e}'_3 , la seconda darà la rotazione uniforme attorno a un asse giacente nel piano $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$, che anche sarà principale di inerzia, perché l’ellissoide d’inerzia è rotondo attorno a \underline{e}'_3 . Analoghi risultati si troveranno se $B = C$ oppure $A = C$.

3. Se $A=B=C$ (ellissoide E_O sferico) le (63) sono automaticamente soddisfatte qualunque siano p_0, q_0, r_0 . Anzi da (60) e $\underline{M}_O^{(e)} = 0$ segue che tutte le soluzioni delle equazioni di Eulero sono di questo tipo. È possibile quindi il moto di rotazione uniforme attorno ad un asse arbitrario (che ricordiamo in questo caso è sempre principale di inerzia).

Possiamo riassumere i tre casi dicendo che le rotazioni permanenti sono possibili solo attorno ad assi principali d'inerzia.

Restano da determinare le soluzioni differenti da queste nei casi 1,2. Si possono integrare esprimendo due tra le p, q, r in funzione delle costanti del moto

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \underline{K}_O^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 \quad (64)$$

e sostituendole nelle equazioni di Eulero. Rimarrá un'unica equazione del primo ordine in forma normale, che si potrà integrare per quadratura.

Se A, B, C sono tutti differenti la soluzione si esprime tramite funzioni ellittiche (ottenute invertendo integrali ellittici di prima specie). Essa andrà sostituita nelle (61), che andranno anch'esse integrate.

Se due momenti di inerzia sono uguali (giroscopio), la soluzione si esprime con funzioni trigonometriche. Se per fissare le idee $A = B$, la terza eq. ha soluzione $r(t) = r_0$. Sostituendola nelle prime due, e derivando la prima rispetto a t otteniamo

$$A\ddot{p} \stackrel{(60)_1}{=} (A - C)\dot{q}r_0 \stackrel{(60)_2}{=} r_0^2(C - A) \left(1 - \frac{C}{A}\right) p \quad \Rightarrow \ddot{p} + \mu^2 p = 0$$

avendo posto

$$\mu = \left(1 - \frac{C}{A}\right) r_0. \quad (65)$$

Le soluzioni sono del tipo $p(t) = c \sin(\mu t + \varphi)$, che implica $q = \mu^{-1}\dot{p} = c \cos(\mu t + \varphi)$: nel piano (p, q) il punto $(p(t), q(t))$ percorre una circonferenza di raggio c di moto uniforme, quindi rispetto alla terna solidale $\underline{\omega}$ spazza con velocità uniforme un cono con asse \underline{e}'_3 . Si potrebbe sostituire queste relazioni in (61) e risolverle. Diamo invece una descrizione qualitativa della soluzione. Da

$$\text{cost} = \underline{K}_O = A(p\underline{e}'_1 + q\underline{e}'_2) + Cr\underline{e}'_3 = A\underline{\omega} + (C - A)r_0\underline{e}'_3$$

segue

$$\underline{\omega} = \frac{\underline{K}_O}{A} + \mu\underline{e}'_3 \equiv \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2. \quad (66)$$

Il primo termine é costante nel riferimento fisso, e descrive quindi un moto di rotazione uniforme attorno alla direzione di \underline{K}_O , il secondo é costante nel rif. solidale e descrive quindi un moto di rotazione uniforme attorno alla direzione di \underline{e}'_3 . Il moto é loro composizione (*moto di precessione regolare*): il giroscopio ruota con velocità ω_2 attorno al suo *asse giroscopico* \underline{e}'_3 , il quale a sua volta descrive un cono attorno all'asse \underline{K}_O con velocità ω_1 (infatti dalle formule di Poisson $\underline{e}'_3 = \underline{\omega}_1 \times \underline{e}'_3$).

La relazione precedente implica che $\underline{K}_O, \underline{\omega}, \underline{e}'_3$ sono complanari e che perciò gli ultimi due, visti dallo spazio fisso ruotano attorno alla direzione (fissa) di \underline{K}_O con la stessa velocità angolare (di precessione) ω_1 .

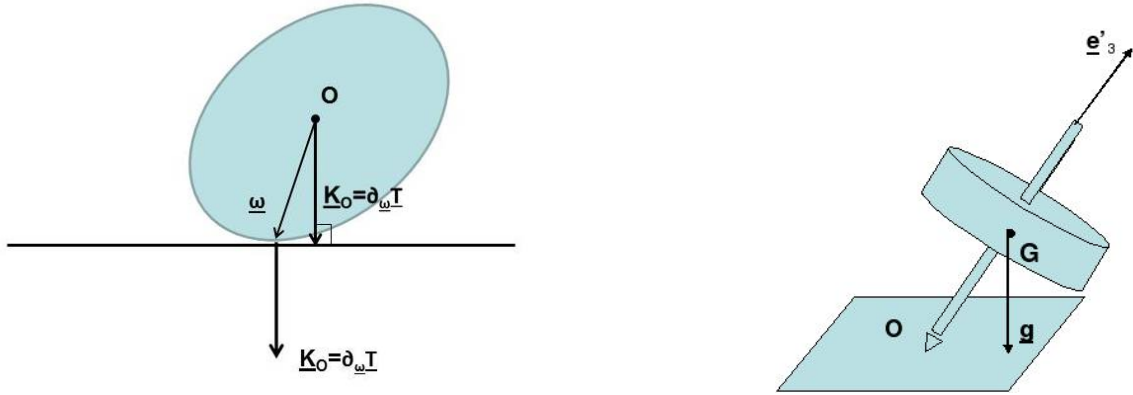


Figure 6:

Si può dare una descrizione qualitativa e visiva dei moti di Poinsot con la cosiddetta *costruzione di Poinsot*. La conservazione dell'energia cinetica fa sí che ad ogni istante $\underline{\omega}$ soddisfi l'equazione (42) dell'ellissoide E_O ; siccome E_O é solidale al solido, descrivere il suo moto equivale a descrivere il moto del solido stesso. Si verifica facilmente che $\underline{K}_O = \nabla_{\underline{\omega}} T$ ($\nabla_{\underline{\omega}}$ è il gradiente nello spazio delle $\underline{\omega}$). D'altro canto in ogni punto $\underline{\omega}$ soluzione dell'equazione (42) risulta $\nabla_{\underline{\omega}} T \perp E_O$. Quindi E_O è tangente al piano (fisso) $\pi \perp \underline{K}_O$ passante per $\underline{\omega}$, v. fig. 6-sinistra; la distanza di π da O é $\underline{\omega} \cdot \text{vers}(\underline{K}_O) = 2T/K_O$, che è una costante del moto. Il punto di contatto P_c appartiene a \mathcal{A}_t , poiché $OP_c \parallel \underline{\omega} \parallel \mathcal{A}_t$ e $O \in \mathcal{A}_t$; quindi P_c ha istantaneamente velocità zero, il che implica che E_O rotola su π senza strisciare. Quindi il moto del solido è quello determinato dal moto di puro rotolamento di E_O su π . La traiettoria di P_c su π si riduce ad un punto se $\underline{\omega}(0)$ è parallelo ad un asse principale d'inerzia; piú in generale è una circonferenza - ed il moto del solido è di precessione regolare - se E_O è rotondo, mentre è una curva trascendente (che in generale non si chiude), se A, B, C sono tutti differenti, cioè se E_O è triassico.

1.9.2 Effetto giroscopico

Se E_O è rotondo attorno a un asse r il solido si dice a struttura giroscopica attorno a r . Piú in generale si chiama giroscopio un qualsiasi solido con ellissoide centrale d'inerzia E_G rotondo attorno ad un asse r (asse giroscopico), v. Fig. 6-destra. Per la legge di trasformazione del tensore d'inerzia sotto traslazione di una terna baricentrale si trova che E_O é anch'esso rotondo attorno a r (e quindi il solido ha struttura giroscopica) $\forall O \in r$. Sceglieremo la terna solidale in modo che \underline{z}' coincida con r .

Sia $A = B$ (struttura giroscopica attorno a \underline{e}'_3). Supponiamo che a $t = 0$ il giroscopio ruoti attorno al suo asse con velocità angolare $r_0 \underline{e}'_3$, e applichiamo a partire da questo istante delle forze esterne con momento risultante $\underline{M}_O^{(e)}$ tale che

$$M'_O{}^3 = 0, \quad (67)$$

per esempio esercitando una forza direttamente sul suo asse. (Esempi: trottola con forza peso, volano ruotante su un asse ruotante a sua volta attorno ad un punto, v. libro).

Quando $r_0 = 0$, l'asse si riorienta in modo da assecondare la forza, p. es. la trottola cade. Per grandi r_0 si osserva invece

1. Tenacia dell'asse di rapida rotazione: Il giroscopio si oppone ad un riorientamento del suo asse in misura tanto maggiore quanto maggiore é r_0 . (Se l'applicazione delle forze esterne é di breve durata, come per esempio a causa di vibrazioni del vincolo, il riorientamento é impercettibile)
2. Tendenza al parallelismo con $\underline{M}_O^{(e)}$: l'asse giroscopico si riorienta (molto lentamente) tendendo al parallelismo con il momento della sollecitazione esterna, $\underline{K}_O \parallel \underline{e}'_3$, senza necessariamente raggiungerlo. Se per esempio applico una forza \underline{F} all'asse, il riorientamento avviene \perp a \underline{F} . La trottola pesante per esempio compie un moto di precessione.

Come si spiega? Per la (67), di nuovo (60)₃ implica

$$r(t) = r_0. \quad (68)$$

Se $p(0) = 0, q(0) = 0$, risulta $\underline{K}_O(0) = Cr_0\underline{e}'_3$. Ragioniamo ora prima in modo euristico. Per continuitá sará

$$\underline{K}_O(t) \approx Cr_0\underline{e}'_3 \quad \Rightarrow \quad \underline{M}_O^{(e)} = \dot{\underline{K}}_O \approx Cr_0 \frac{d\underline{e}'_3}{dt}. \quad (69)$$

almeno per piccoli t ; inoltre ci aspettiamo che al crescere di r_0 si allunghino i tempi t per cui (69) rimanga valida. Conseguentemente

$$\frac{d}{dt}\underline{e}'_3 \approx \frac{\varepsilon}{C}\underline{M}_O^{(e)}, \quad \varepsilon := \frac{1}{r_0}. \quad (70)$$

La derivata del versore dell'asse é quindi inversamente proporzionale a Cr_0 , che spiega la *tenacia* del giroscopio, ed ha la direzione di $\underline{M}_O^{(e)}$, che spiega la *tendenza al parallelismo*.

Mostriamo ora che se le forze attive sono conservative con energia potenziale $U(\tilde{q})$ limitata inferiormente (indico con \tilde{q} la terna degli angoli di Eulero, o un altro terna di coordinate lagrangiane), cioè $U(\tilde{q}) \geq U_m$, la (69) vale in un senso ben preciso *per t arbitrariamente grandi*. La conservazione dell'energia totale dá $T + U = T_0 + U_0$, da cui segue, in virtú della (68) e di $p(0) = 0, q(0) = 0$,

$$U_0 - U = T - T_0 = A(p^2 + q^2) \geq 0, \quad U_0 := U[q(0)].$$

Ma $U_0 - U(\tilde{q}) \leq \Delta := U_0 - U_m$ per ogni \tilde{q} , perciò per ogni $t > 0$

$$\|\underline{K}_O - Cr_0\underline{e}'_3\|^2 = \|A(p\underline{e}'_1 + q\underline{e}'_2)\|^2 = A^2(p^2 + q^2) \leq A\Delta \quad (71)$$

(se U è limitata anche superiormente, cioè $U(q) \leq U_M$, la disequazione vale anche con $\Delta := U_M - U_m$, che è indipendente da $\tilde{q}(0)$). Ne segue

$$\left\| \frac{\underline{K}_O - Cr_0\underline{e}'_3}{Cr_0} \right\| \leq \varepsilon \frac{\sqrt{A\Delta}}{C}, \quad (72)$$

cioè la differenza relativa tra \underline{K}_O e $Cr_0\underline{e}'_3$ é maggiorata da $\varepsilon \frac{\sqrt{A\Delta}}{C} \ll 1$ (se r_0 é grande), e la parte dominante di \underline{K}_O è $Cr_0\underline{e}'_3$. Applichiamo ora questi risultati al

Giroscopio pesante (trottola)

Consideriamo un giroscopio pesante con un punto O del suo asse vincolato senza attrito a rimanere fisso e cui sia stata impressa una forte rotazione iniziale attorno al suo asse (trottola pesante). La forza peso $\underline{F} = m\underline{g}$, che si può considerare applicata in G , non lo fa cadere anche se l'asse è inclinato, ma fa ruotare quest'ultimo attorno alla verticale. La (70) e le formule di Poisson implicano

$$\begin{aligned} \underline{M}_O^{(a)} &= (G - O) \times \underline{F} = z'_G m \underline{e}'_3 \times \underline{g} \approx Cr_0 \frac{d\underline{e}'_3}{dt} = -\underline{e}'_3 \times \underline{\omega} Cr_0 \\ \Rightarrow \quad \underline{e}'_3 \times [z'_G m \underline{g} + \underline{\omega} Cr_0] &= 0 \quad \Rightarrow \quad z'_G m \underline{g} + \underline{\omega} Cr_0 \approx \lambda \underline{e}'_3. \end{aligned}$$

Affinché la parte dominante del primo membro sia uguale al secondo membro deve essere $\lambda \approx Cr_0^2$; risolvendo rispetto ad $\underline{\omega}$ troviamo

$$\underline{\omega} \approx \underline{\omega}_2 + \underline{\omega}_1 + O(\varepsilon^2), \quad (73)$$

ove abbiamo posto

$$\underline{\omega}_1 := r_0 \underline{e}'_3 \quad \underline{\omega}_2 := -z'_G m \underline{e} g. \quad (74)$$

La $\underline{\omega}_2$ è costante nello spazio fisso, $\underline{\omega}_1$ nello spazio solidale. Quindi il moto della trottola è approssimativamente di precessione regolare, cioè di composizione dei due, con asse di precessione verticale ed asse giroscopico quello di figura. Inoltre si noti che ω_2 è inversamente proporzionale a ω_1 . ecco perché, quando ω_1 diminuisce (a causa degli attriti), ω_2 aumenta, finché cade.

Applicazioni

Bussola giroscopica. Stabilizzatore di volo su missili, aerei da combattimento, per indicare variazioni di inclinazione (anche con la nebbia). Per proiettili (ecco perché li mettono in rotazione), etc

2 Moti di un solido libero

Consideriamo le ECD per il solido, nella forma del teorema del moto del baricentro e del teorema del momento angolare con polo il baricentro G :

$$\underline{R}^{(e)} = m \underline{a}_G \quad (75)$$

$$\underline{M}_G^{(e)} = \underline{K}_G = A \dot{p} \underline{e}'_1 + B \dot{q} \underline{e}'_2 + C \dot{r} \underline{e}'_3 + \underline{\omega} \times \underline{K}_G. \quad (76)$$

La dipendenza delle forze esterne agenti sul solido dalle posizioni e dalle velocità dei punti di applicazione si può esprimere in termini di 6 coordinate corrispondenti ai 6 gradi di libertà del solido, e le loro derivate, per esempio $G, \dot{G}, \varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}$; quindi $\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(e)}(G, \dot{G}, \varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}; t)$, $\underline{M}_G^{(e)} = \underline{M}_G^{(e)}(G, \dot{G}, \varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}; t)$. Una volta espresse, tramite le (61), le componenti di $\underline{\omega}$ in termini di queste variabili le ECD diventano un sistema di 6 equazioni del secondo ordine in 6 incognite, che ammettono una ed una sola soluzione una volta assegnate le condizioni iniziali.

Se $\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(e)}(G, \dot{G}; t)$, allora il problema del moto di G si disaccoppia dal moto di rotazione attorno a G , piú precisamente è formalmente identico al problema del moto di un punto materiale in presenza di una forza esterna, e può essere determinato indipendentemente dal moto di rotazione. In particolare il moto di G sarà rettilineo uniforme se $\underline{R}^{(e)} = 0$, come accade per un solido (in particolare un satellite, o una navicella spaziale) così lontano da altri corpi massicci (terra, astri, etc) da poter trascurare la loro forza gravitazionale. Se piú in generale il campo gravitazionale esercitato da questi corpi massicci non è trascurabile, ma si può comunque considerare costante entro la regione occupata dal solido ad un certo istante (a questo scopo basta che le dimensioni del solido siano \ll delle distanze di G dai baricentri di questi corpi), allora $\underline{R}^{(e)}(G, \dot{G}; t)$ si può calcolare concentrando la massa del solido in G ed applicando la legge di gravitazione universale; se in particolare il moto del solido viene considerato solo entro una regione in prossimità della terra di dimensioni \ll del raggio terrestre, allora $\underline{R}^{(e)} = \underline{mg} = \text{cost}$ ed il moto di G entro questa regione sarà uniformemente accelerato.

Determinato $G(t)$, per sostituzione $\underline{M}_G^{(e)}$ diventa una funzione $\underline{M}_G^{(e)}(\varphi, \vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}; t)$ soltanto. Siccome $\underline{K}_G = \underline{K}' = \underline{K}'_G$, la (76) diventa $\underline{M}_G^{(a)} = \underline{K}'_G$, cioè l'equazione del moto del solido in un riferimento con origine in G ed assi ad orientamento fisso; ma in quest'ultimo G appare come un punto fisso, quindi l'equazione diventa quella di un solido con un punto fisso, e possiamo applicare i risultati trovati nella sezione 1.9.

Se, come prima, le forze esterne sono solo quelle gravitazionali esercitate da corpi grandi e massicci, e quindi si possono considerare costanti entro la regione occupata dal solido ad un certo istante, allora risulta $\underline{M}_G^{(a)} = 0$, e le soluzioni della IIECD saranno i moti alla Poinsot. Tra queste ci sono in particolare le già trovate *rotazioni permanenti* attorno agli assi principali di inerzia passanti per G , cioè *attorno agli assi centrali d'inerzia*.

Quindi per esempio per un sasso lanciato in aria il moto del suo baricentro G è uniformemente accelerato (traiettoria parabolica), mentre per un satellite in orbita attorno alla terra il moto di G è di tipo Kepleriano (orbita ellittica, etc). Il moto di rotazione del solido attorno a G è piú complicato, a meno che il solido non venga lanciato in modo che all'istante iniziale ruoti attorno ad un asse centrale d'inerzia: allora continuerà a ruotare uniformemente attorno a questo asse, che non cambierà di orientamento durante il moto. Nel caso che il solido abbia due momenti centrali di inerzia uguali (solido giroscopico), i restanti moti alla Poinsot saranno invece delle precessioni regolari. Questo spiega per es. il moto di precessione della terra che porta l'asse terrestre nord-sud a descrivere un cono in un cosiddetto *anno platonico* (quasi 26.000 anni).