



# Matematica

(Esercitazioni)

dott. Francesco Giannino

dott. Valeria Monetti



# Indice lezione

- Asintoti orizzontali
- Asintoti verticali
- Asintoti obliqui



# Asintoti

In relazione al grafico di una funzione si possono presentare tre tipi di asintoti:

- asintoti orizzontali
- asintoti verticali
- asintoti obliqui



# Asintoti orizzontali

Assegnata una funzione  $f$  a valori reali definita in un intervallo illimitato  $I$ , se il limite all'infinito di risulta **finito**, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$

allora la retta  $y = l$  è detta

**asintoto orizzontale**

per il grafico della funzione  $f(x)$



# Asintoti orizzontali

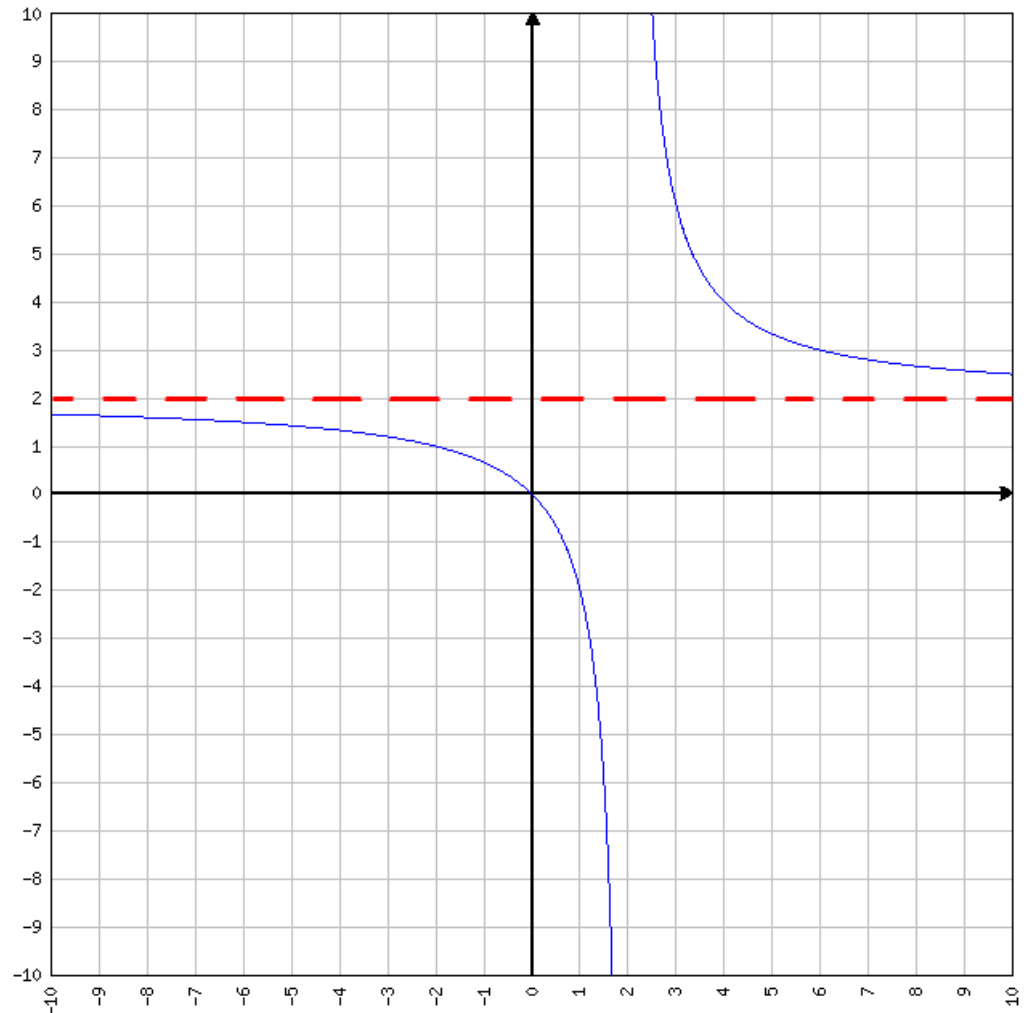
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$



$$y = 2$$

Asintoto orizzontale



# Asintoti orizzontali

Se in particolare succede che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2$$

allora il grafico di  $f(x)$  ammette due  
asintoti orizzontali:

$$y = l_1 \quad \text{a} \quad +\infty$$

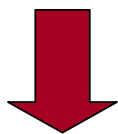
$$y = l_2 \quad \text{a} \quad -\infty$$



# Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

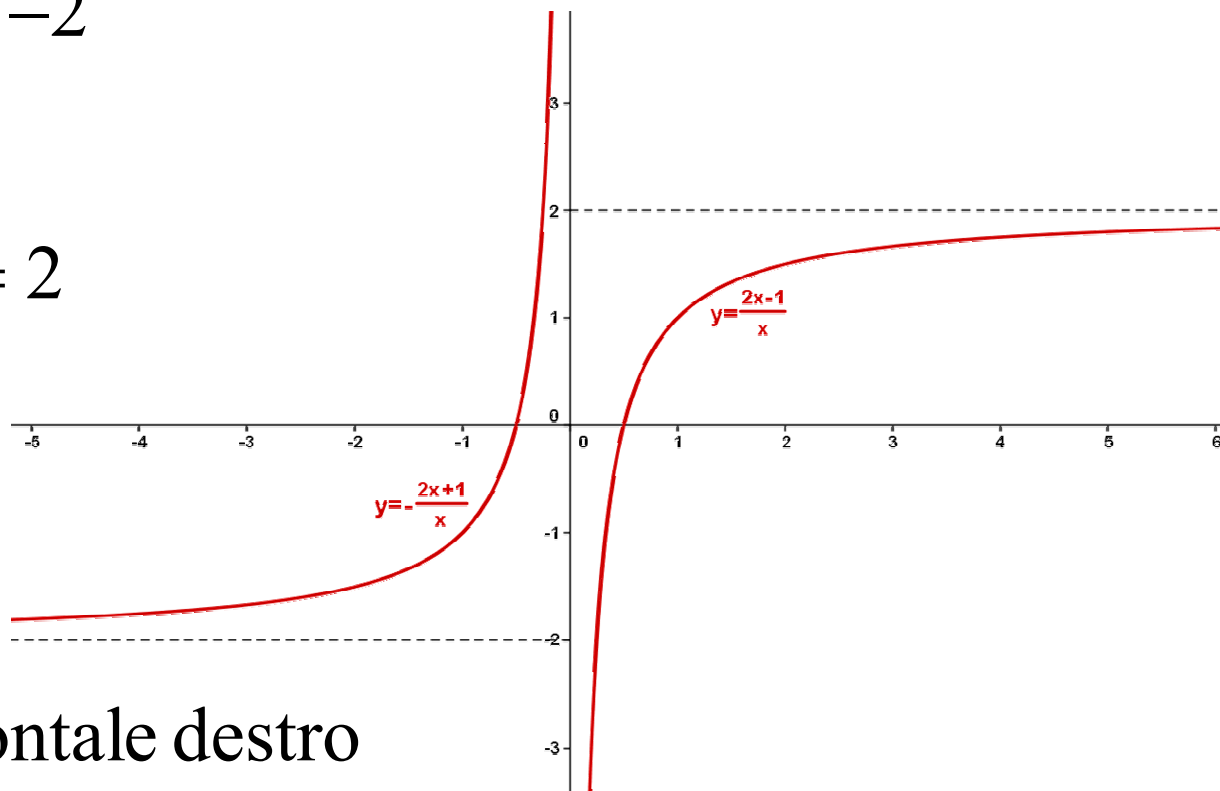


$$y = 2$$

Asintoto orizzontale destro

$$y = -2$$

Asintoto orizzontale sinistro



# Asintoti orizzontali

Se il limite all'infinito di una funzione  $f$  a valori reali definita in un intervallo illimitato

I risulta invece **infinito**, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

allora la funzione sicuramente NON  
ammette asintoto orizzontale



## Asintoti verticale

Assegnata una funzione  $f$ , a valori reali definita in un intervallo  $I$  privato al più di un punto  $x_0$ , se il limite al finito  $x_0$  risulta **infinito**, cioè se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

allora la retta  $x = x_0$  è detta

**asintoto verticale**

per il grafico della funzione  $f(x)$



# Asintoti verticale

Quindi, se il limite al finito di una funzione risulta **infinito**, allora la funzione ammette sicuramente asintoto verticale di equazione

**$x =$  valore finito del valore a cui tende la  $x$**



# Asintoti verticale

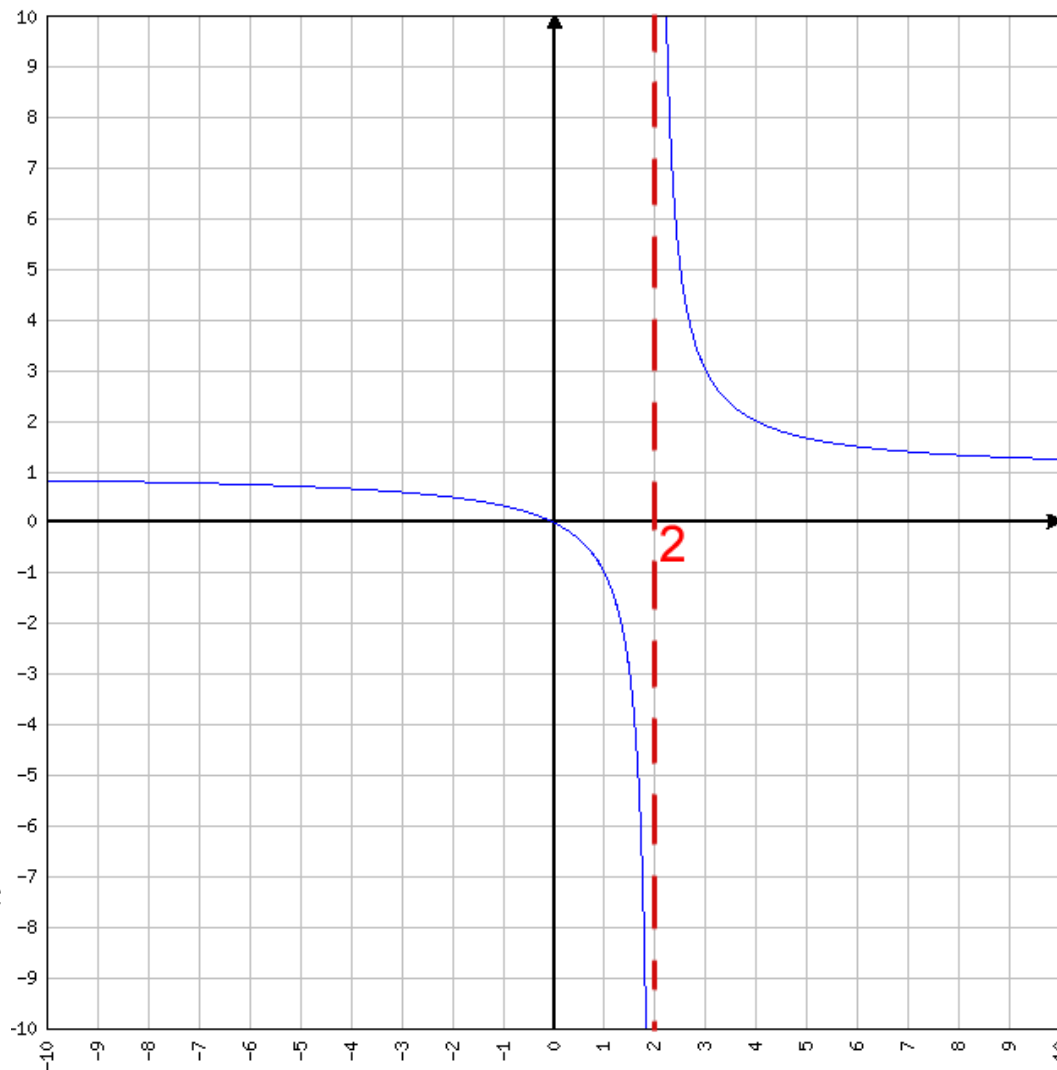
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$



$$x = 2$$

Asintoto verticale



# Asintoti verticale

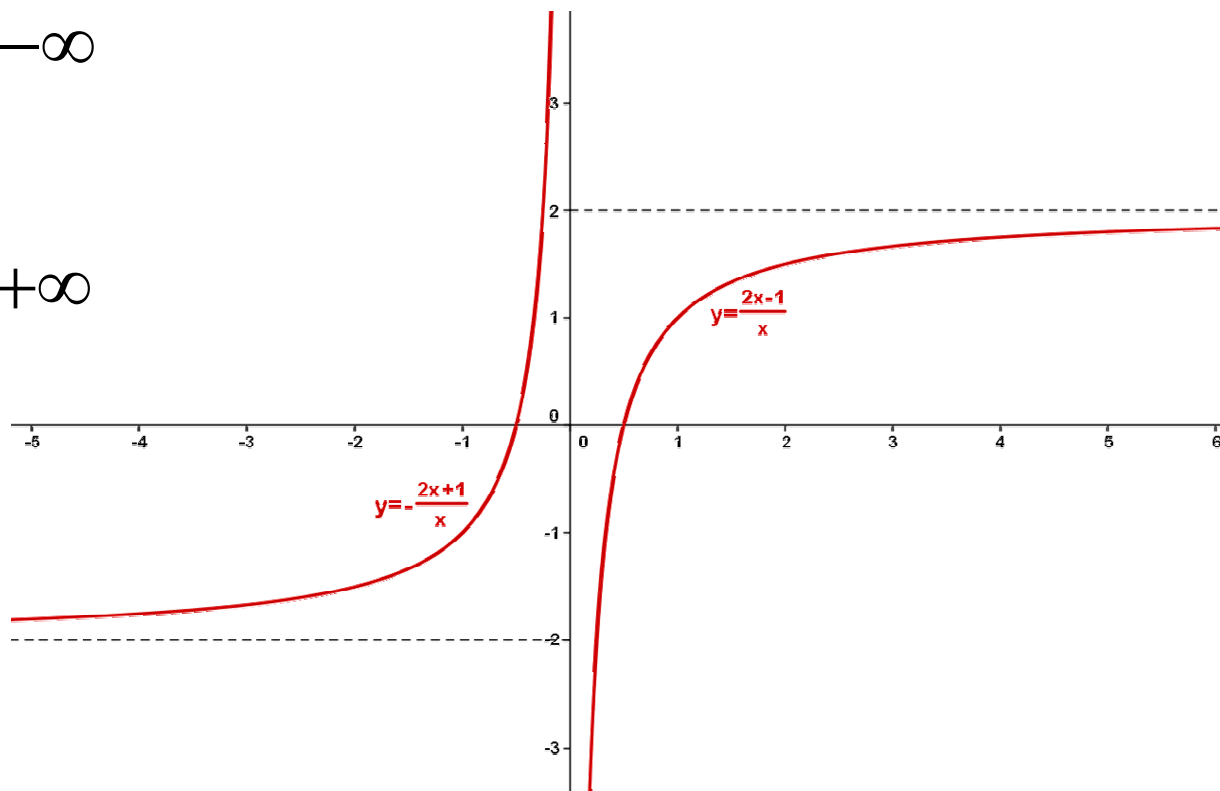
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$



$$x = 0$$

Asintoto verticale



## Asintoti verticale

Assegnata una funzione  $f$ , a valori reali definita in un intervallo  $I$  privato al più di un punto  $x_0$ , se risulta invece che

il limite al finito risulta **finito**,

allora la funzione

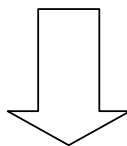
NON ammette asintoto verticale



# Asintoti obliqui

Assegnata una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $I$  non limitato, se si verifica che:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$



sicuramente possiamo affermare che il grafico della funzione considerata non ammette asintoto orizzontale.

In questo caso, è possibile verificare se il grafico della funzione considerata ammetta **asintoto obliquo**

# Asintoti obliqui

Più precisamente, se si verificano le seguenti condizioni:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \longrightarrow \text{(non esiste asintoto orizzontale)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = q \text{ finito}$$

Allora il grafico della funzione  $f(x)$  ammette  
asintoto obliquo di equazione

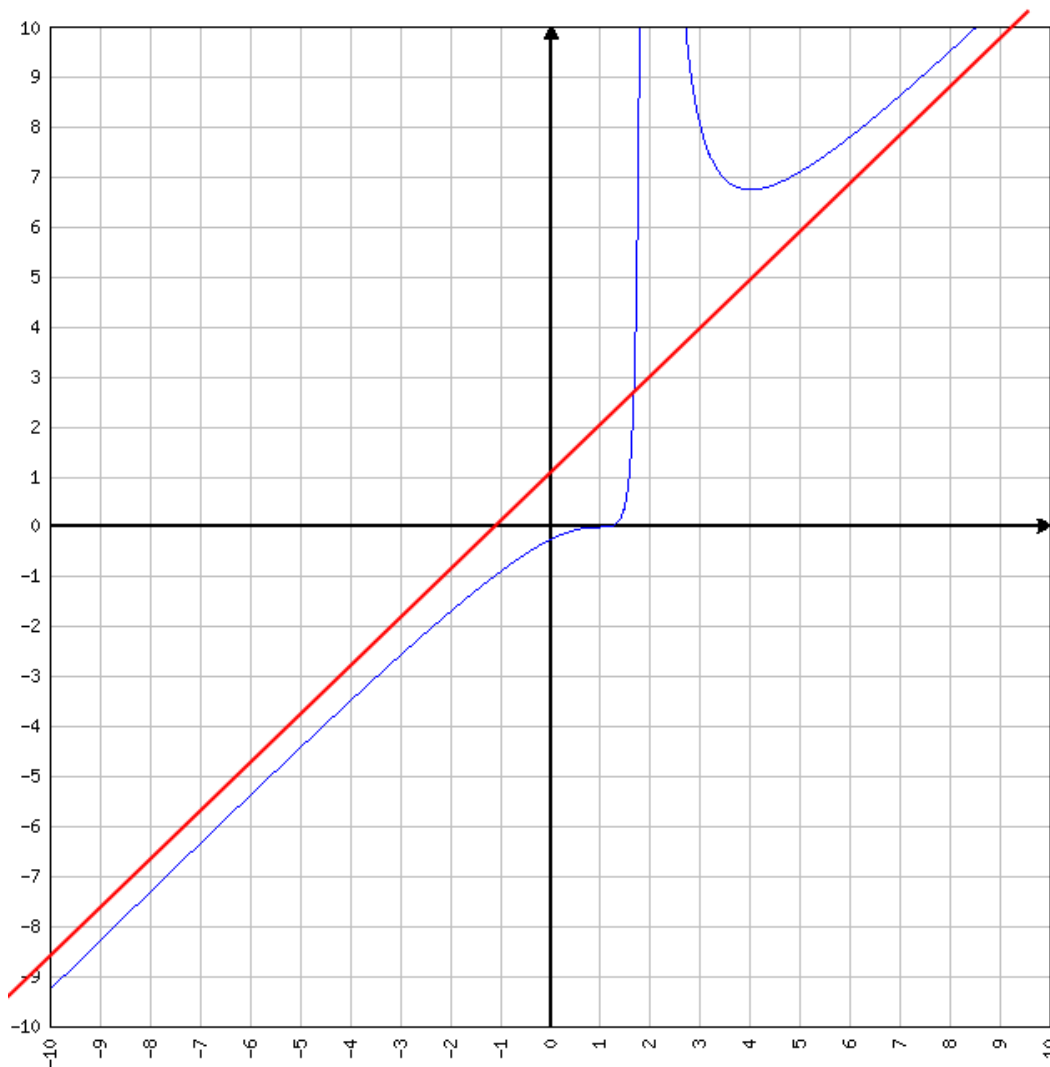
$$y = mx + q$$



# Asintoti obliqui

$$y = mx + q$$

Equazione  
dell'asintoto obliquo

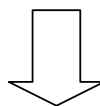


# Asintoti obliqui

Più precisamente, se:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = q \text{ finito}$$



Il grafico della funzione  $f(x)$  ammette  
asintoto obliquo di equazione

$$y = mx + q$$

# Esempio

La funzione ha asintoto obliquo?

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x} = +\infty \quad \Rightarrow \text{La funzione non ha asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2} = 3 \quad \Rightarrow m=3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{x} - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1 - 3x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 \quad \Rightarrow q=0$$

$\Rightarrow$  La retta  $y=3x$  e'  
asintoto obliquo



E' possibile, semplicemente osservando la forma di una funzione fratta, capire se la funzione ha un asintoto orizzontale, un asintoto obliquo oppure non ha asintoti di quel genere:

1. se nella funzione l'ordine del numeratore e' uguale a quello del denominatore
  - avremo un asintoto orizzontale del tipo  $y = \text{numero}$
2. se nella funzione l'ordine del numeratore e' inferiore a quello del denominatore
  - avremo un asintoto orizzontale del tipo  $y = 0$
3. se nella funzione l'ordine del numeratore e' superiore di uno a quello del denominatore
  - avremo un asintoto obliquo del tipo  $y = mx + q$   
infatti poiche' per calcolare  $m$  dobbiamo fare il limite di  $f(x)/x$  dobbiamo moltiplicare il denominatore per  $x$  cioe' aggiungere un grado al denominatore ed il limite sara' un numero se numeratore e denominatore arrivano allo stesso grado
4. se nella funzione l'ordine del numeratore e' superiore di due, tre,.... a quello del denominatore
  - non avremo un asintoto obliquo, ma la funzione andra' all'infinito accompagnando una parabola, una cubica,....



## Esercizi Asintoti dall'eserciziario

**Esercizio 6.9.** Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

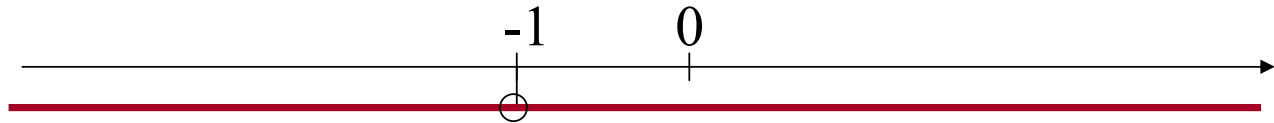
*Soluzione.* La prima cosa che bisogna fare nel determinare la presenza di eventuali asintoti è determinare il dominio della funzione:

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

## Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Il dominio della funzione assegnata è:

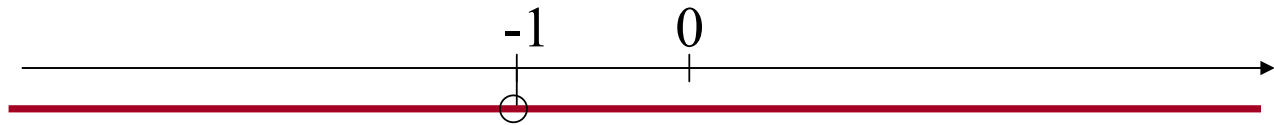
$$]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$



Poiché la funzione assegnata ammette un punto in cui non è definita, ha senso ricercare gli eventuali asintoti verticali:

# Esercizi Asintoti dall'eserciziario

$$]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{-3}{-1^- + 1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{-3}{-1^+ + 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

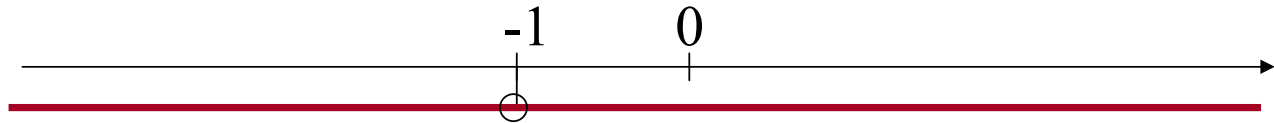


$x = -1$   
a. verticale

## Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Il dominio della funzione assegnata è:

$$]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$$



Poiché la funzione assegnata ammette un dominio non limitato, ha senso ricercare gli eventuali asintoti orizzontali:

## Esercizi Asintoti dall'eserciziario

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Non esiste a.  
orizzontale sinistro

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Non esiste a.  
orizzontale destro



# Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \pm\infty$$



Non esiste asintoto orizzontale



Possiamo verificare se esiste l'asintoto obliquo

## Esercizi Asintoti dall'eserciziario

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2} - x}{x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-4 - x}{x + 1} \right] = -1$$

# Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Quindi:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$



$y = x - 1$   
asintoto obliquo  
a sinistra

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = -1$$

## Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Allo stesso modo si verifica che:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-4 - x}{x + 1} \right] = -1$$



$$y = x - 1$$

asintoto obliquo

a destra

## Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Globalmente:

$$y = x - 1$$

asintoto obliquo

per la funzione

# Esercizi Asintoti dall'eserciziario

6.10

6.11

6.17

6.27

