

28. Teoremi sulle funzioni continue: teorema degli zeri, teorema di Weistrass, teorema dei valori intermedi.

28. Teoremi sulle funzioni continue_ teorema degli zeri, teorema di Weistrass, teorema dei valori intermedi.

Funzioni continue

Abbiamo già dato la definizione di funzione continua in un punto interno all'intervallo di definizione e di funzione continua in tutto il proprio intervallo di definizione

28. Teoremi sulle funzioni continue_ teorema degli zeri, teorema di Weistrass, teorema dei valori intermedi.

Definizione f continua nell'intervallo

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato).

Si dice che f è **continua** nel proprio intervallo di definizione I se è continua in ogni punto interno all'intervallo di definizione I :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in I$$

Funzioni continue

- somma o differenza di funzioni continue in un punto è ancora una funzione continua nello stesso punto
- prodotto di funzioni continue in un punto è ancora una funzione continua nello stesso punto
- rapporto di funzioni continue in un punto è ancora una funzione continua nello stesso punto
- la funzione composta di funzioni continue in un punto è ancora una funzione continua nello stesso punto



Studiamo altre proprietà delle funzioni continue

Teorema di Weierstrass

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato



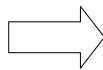
$f(x)$ è dotata di minimo e di massimo assoluti in $[a,b]$

Cioè, esistono due punti $x_1, x_2 \in [a,b]$:

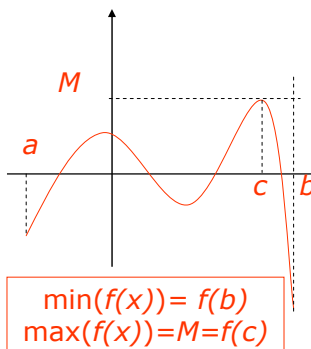
$$M = f(x_1) \geq f(x) \quad \text{e} \quad m = f(x_2) \leq f(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

Teorema di Weierstrass

$f: [a,b] \rightarrow B$ con
 $f(x)$ continua



La funzione $f(x)$ assume minimo e massimo assoluto in $[a,b]$



Questo teorema dice semplicemente che il grafico di una funzione continua in un intervallo chiuso ammette un valore minimo e un valore massimo per le ordinate (se faccio un cammino "senza salti", alla fine della giornata avrò registrato due punti di minima e massima altitudine raggiunti).

Massimo assoluto

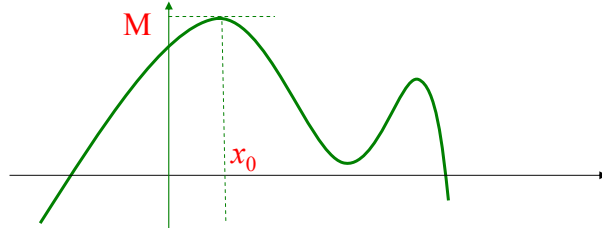
Def. Assegnata una funzione

$f: A \longrightarrow B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$

- si dice che il numero reale M è il **massimo assoluto** di f se M è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più grande valore

$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = M \\ \forall x \in A, f(x) \leq M \end{cases}$$

x_0 **punto di massimo assoluto**



28. Teoremi sulle funzioni continue_ teorema degli zeri, teorema di Weistrass, teorema dei valori intermedi.

Minimo assoluto

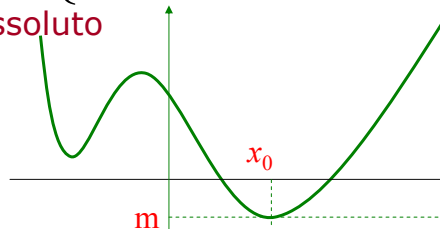
Def. Assegnata una funzione

$f: A \longrightarrow B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$

- si dice che il numero reale m è il **minimo assoluto** di f se m è un valore appartenente all'immagine di f e se è il più piccolo valore

$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = m \\ \forall x \in A, f(x) \geq m \end{cases}$$

x_0 **punto di minimo assoluto**



28. Teoremi sulle funzioni continue_ teorema degli zeri, teorema di Weistrass, teorema dei valori intermedi.

Teorema di Weierstrass: osservazioni

Le 3 ipotesi del teorema di Weierstrass sono:

1. $[a,b]$ Intervallo limitato
2. $[a,b]$ Intervallo chiuso
3. $f(x)$ continua nell'intervallo $[a,b]$

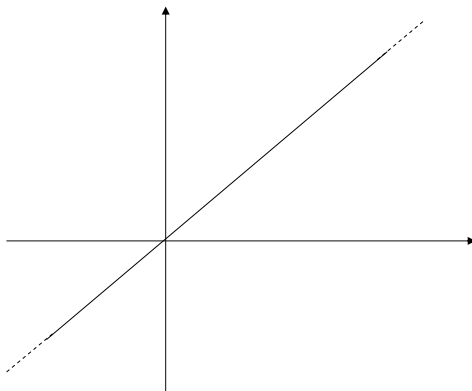


Tutte necessarie?

Weierstrass: NO ipotesi intervallo limitato

Esempio. La funzione

$$f(x) = x, \text{ in } \mathbb{R}$$

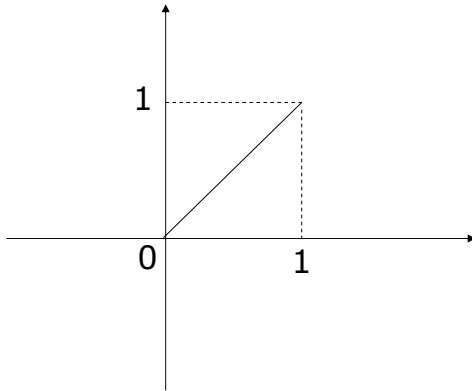


Non ammette né
minimo né massimo!

Weierstrass: NO ipotesi intervallo chiuso

Esempio. La funzione

$$f(x) = x, \text{ in } (0,1)$$

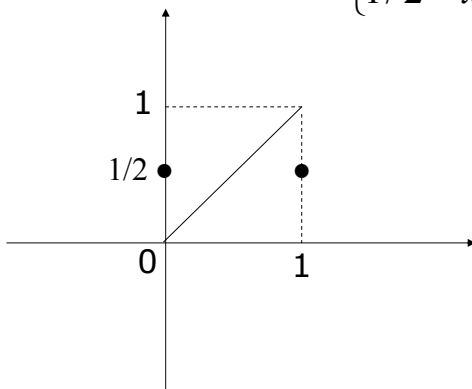


Non ammette né
minimo né massimo
poiché $0,1 \notin (0,1)$!

Weierstrass: NO ipotesi continuita'

Esempio. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ 1/2 & x = 0, x = 1 \end{cases}$$

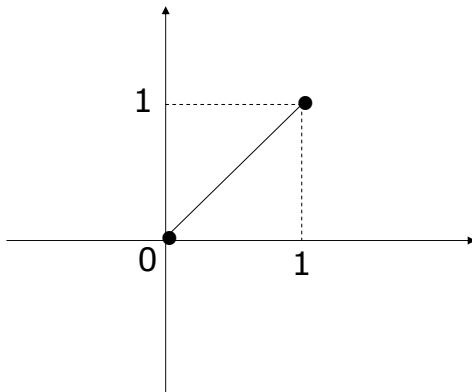


Non ammette né
minimo né massimo
poiché $0,1$ non sono
assunti dalla
funzione!

Teorema di Weierstrass: osservazioni

Esempio. La funzione

$$f(x) = x, \text{ in } [0,1]$$



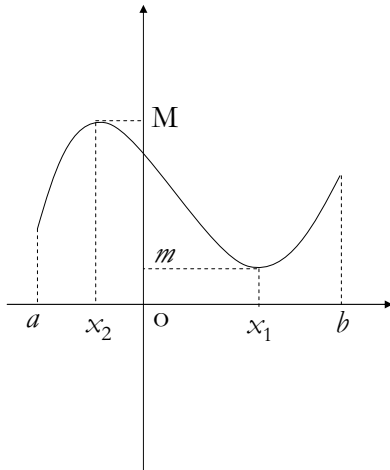
Ammette
minimo e massimo!

Teorema di Weierstrass: osservazioni

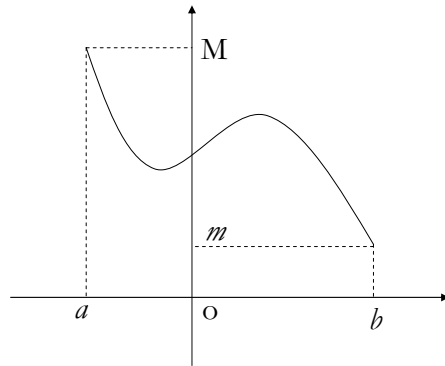
Il minimo ed il massimo assoluto di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato possono essere assunti sia in punti interni all'intervallo $[a,b]$ sia agli estremi dell'intervallo $[a,b]$



Teorema di Weierstrass: osservazioni



Massimo e minimo assoluti
vengono assunti in punti interni



Massimo e minimo vengono assunti
agli estremi dell'intervallo

28. Teoremi sulle funzioni continue_ teorema degli zeri, teorema di Weierstrass, teorema dei valori intermedi.

Teorema di Weierstrass: osservazioni

In particolare, se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato ed in tale intervallo è anche:

- strettamente crescente $\Rightarrow m = f(a)$ e $M = f(b)$
- strettamente decrescente $\Rightarrow m = f(b)$ e $M = f(a)$



28. Teoremi sulle funzioni continue_ teorema degli zeri, teorema di Weierstrass, teorema dei valori intermedi.

Funzione crescente

Def. Assegnata una funzione

$$f: A \longrightarrow B, \text{ con } A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \neq \emptyset$$

- si dice che f è **strettamente crescente** in A se

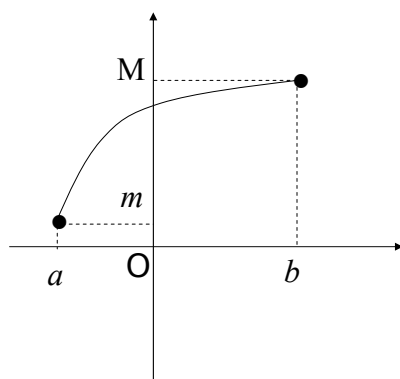
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- si dice che f è **strettamente decrescente** in A se

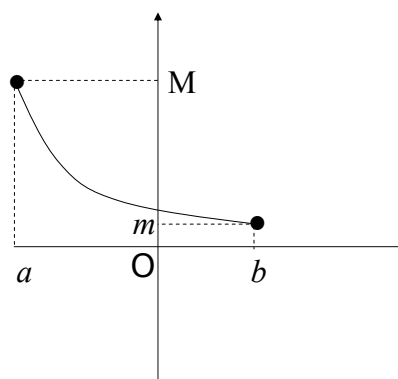
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

28. Teoremi sulle funzioni continue_ teorema degli zeri, teorema di Weierstrass, teorema dei valori intermedi.

Teorema di Weierstrass: osservazioni



La funzione è strettamente crescente e massimo e minimo vengono assunti agli estremi



La funzione è strettamente decrescente e massimo e minimo vengono assunti agli estremi

28. Teoremi sulle funzioni continue_ teorema degli zeri, teorema di Weierstrass, teorema dei valori intermedi.

Teorema dei valori intermedi

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato

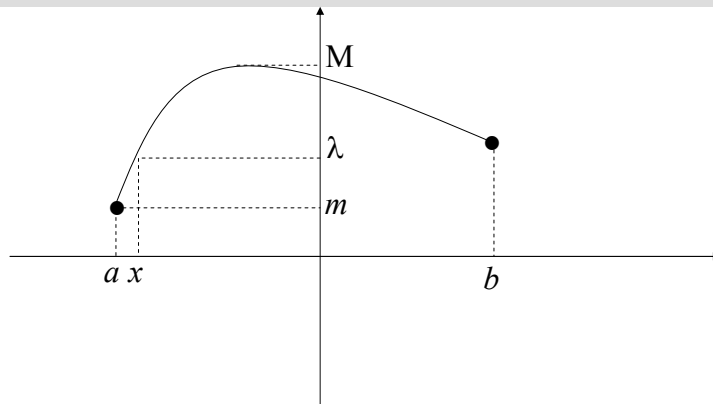


$f(x)$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo (che esistono per il T.di W.)

Cioè: $\forall \lambda : m < \lambda < M$

$\exists x \in [a,b] : f(x) = \lambda$

Teorema dei valori intermedi



$\forall \lambda : m < \lambda < M$

$\exists x \in [a,b] : f(x) = \lambda$

Teorema dei valori intermedi

$f : [a, b] \rightarrow B$ con
 $f(x)$ continua



$f(x)$ assume tutti i valori
compresi fra
min e Max

Questo teorema dice semplicemente che una funzione continua in un intervallo, se assume due valori, deve assumere tutti quelli compresi, (intermedi appunto)
(se faccio un cammino "senza salti", alla fine della giornata avrò registrato due punti di minima e massima altitudine raggiunti, e sarò necessariamente passato per tutte le altezze intermedie).

Teorema degli zeri

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato e se

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

(cioè agli estremi dell'intervallo $f(x)$ assume valori di segno opposto)



esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

Teorema degli zeri

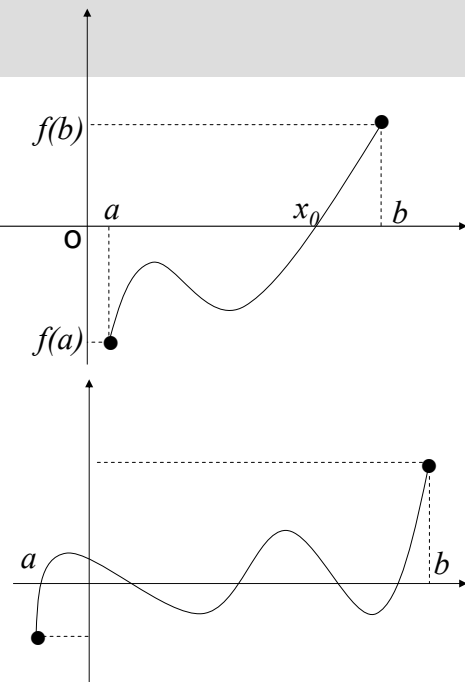
- Il punto x_0 è uno zero della funzione f
- geometricamente x_0 è l'ascissa del punto di intersezione del grafico della funzione f con l'asse delle ascisse

Teorema degli zeri

Interpretazione grafica:

Se $f(a)$ ed $f(b)$ hanno segno opposto e se $f(x)$ è una funzione continua, detti $P_1(a, f(a))$ e $P_2(b, f(b))$,

il grafico di f deve necessariamente collegare P_1 e P_2 con una linea continua e quindi deve necessariamente attraversare l'asse delle x almeno una volta



Teorema degli zeri: calcolo delle radici

La funzione $f(x) = e^x + x$

ammette radici (zeri) nell'intervallo $[-5, 0]$?

I punti $x_1 = -5, x_2 = 0$ appartengono al dominio

$$f(-5) = e^{-5} - 5 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

Per il teorema degli zeri

esiste almeno un punto $x_0 \in (-5, 0): f(x_0) = 0$

