



Matematica

(Esercitazioni sui limiti)

dott. Francesco Giannino

dott. Valeria Monetti

Limiti dx e sx

Limiti di funzioni

Esercizio 5. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Soluzione. Nel punto $x=1$ la funzione al denominatore si annulla. Dobbiamo quindi calcolare due limiti: da destra e da sinistra.

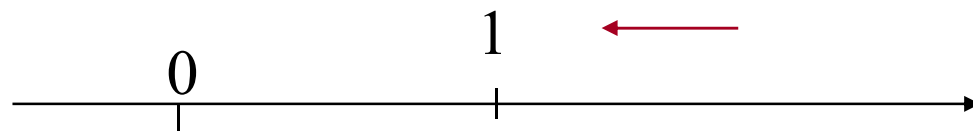
da sinistra

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \frac{1 + 3}{0^-} = -\infty$$

Limiti di funzioni

da destra

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \frac{1 + 3}{0^+} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Nel punto $x = 1$ non esiste il limite della funzione poiché limite destro e limite sinistro non coincidono.

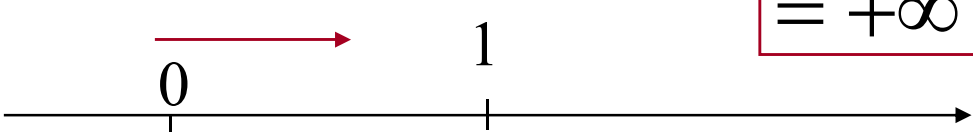
Limiti di funzioni

Esercizio 6. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1}$$

Soluzione. Nel punto $x=1$ la funzione al denominatore si annulla. Dobbiamo quindi calcolare due limiti: da destra e da sinistra.

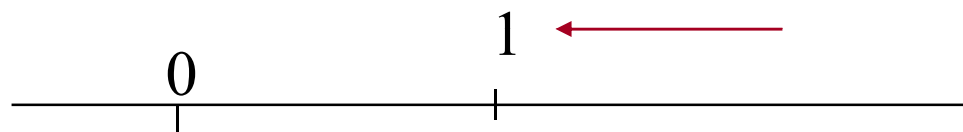
da sinistra

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{0^- \cdot 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$


Limiti di funzioni

da destra

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{0^+ \cdot 2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1}$$

Nel punto $x = 1$ non esiste il limite della funzione poiché limite destro e limite sinistro non coincidono.

Forme indeterminate

In questi casi si parla di
forme di indecisione o forme indeterminate.

Le forme di indecisione di cui ci occuperemo sono:

$$+\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Limiti di polinomi per $x \rightarrow \pm\infty$

Limiti di polinomi per $x \rightarrow \pm\infty$

Dunque:

Nel calcolare il limite di un polinomio per
 $x \rightarrow \pm\infty$
per sciogliere la forma indeterminata $[+\infty - \infty]$
basta calcolare
il limite del termine di grado massimo.

Cioè:

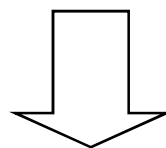
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n$$

Limiti di polinomi per $x \rightarrow \pm\infty$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - x^2 + 1) = +\infty - \infty + 1 =$$
$$= [+ \infty - \infty]$$

forma indeterminata



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$$

Limiti di funzioni razionali fratte per

$$x \rightarrow \pm\infty$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \rightarrow \pm\infty$

Cioè:

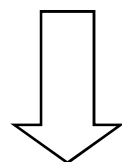
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \pm\infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \end{cases}$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \rightarrow \pm\infty$

Esempio: calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 1}{x^2 + 2} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right]$$

forma indeterminata



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

Limiti di funzioni

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{4x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{4x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4} = +\infty$$

Limiti di funzioni

Esercizio 7. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 - 3x^5}{x^8 + \sqrt{x^7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 - 3x^5}{x^8 + \sqrt{x^7}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 - 3x^5}{x^8 + \sqrt{x^7}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x^{\frac{7}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^{3 - \frac{7}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty \end{aligned}$$

Limiti di funzioni

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 1}{8x^3 + 3x^2 - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 1}{8x^3 + 3x^2 - 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 1}{8x^3 + 3x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{8x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Limiti di funzioni

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + x^4 + x^2 - x - 1}{5x^5 + 8x^3 + x^2 - 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + x^4 + x^2 - x - 1}{5x^5 + 8x^3 + x^2 - 8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + x^4 + x^2 - x - 1}{5x^5 + 8x^3 + x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6\cancel{x^5}}{5\cancel{x^5}} = \frac{6}{5}$$

Limiti di funzioni

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^4 + 2}{-x^3 + 2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^4 + 2}{-x^3 + 2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^4 + 2}{-x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^4}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-8x) = -\infty$$

Gara a tempo

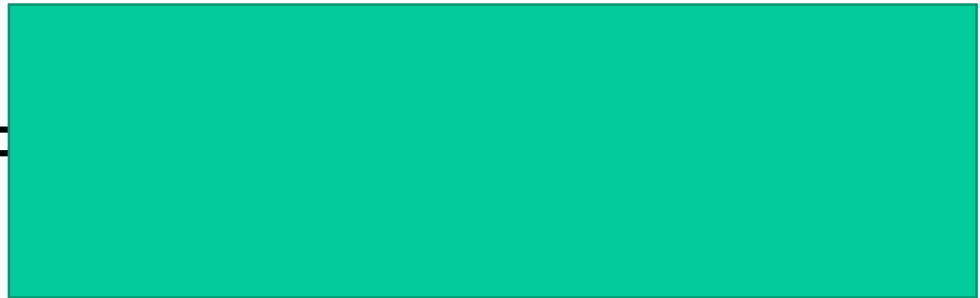


$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{4x^2 + 2}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^5 + x}{x^5 + 3x + 1}$$

$$Ax Bx C =$$

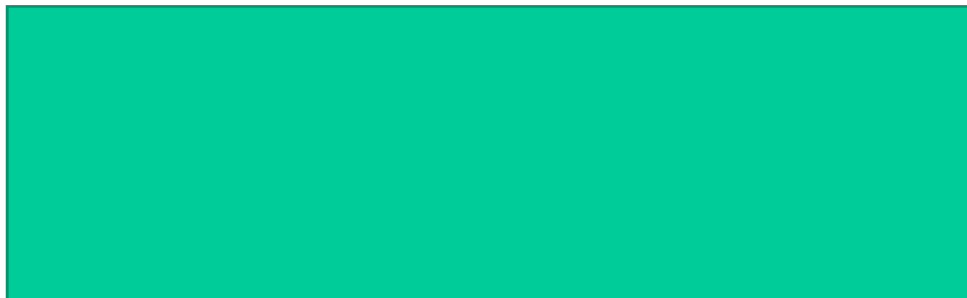


$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x}{x^4 + 2x}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x}{x + 2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1x + 1}$$

$$AxBxC=$$

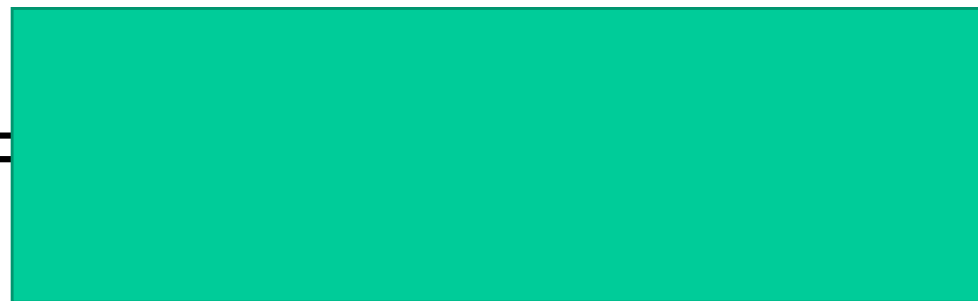


$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x}{2x^3}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{2x^3 + 2x + 7}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{3x + 1}$$

$$A + B + C =$$



$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 1}{x^3 - x}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 1}{5x^3 + 7}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{3x + 1}$$

$$D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x + 2}{6x + 1}$$

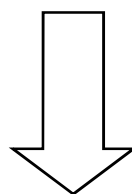
$$Ax Bx Cx D =$$

Limiti di funzioni razionali fratte per

$$x \rightarrow 0$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \rightarrow 0$

Una situazione analoga si presenta
nel calcolo del limite per $x \rightarrow 0$
di alcuni quozienti

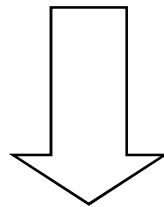


In questo caso, al limite per $x \rightarrow 0$
prevalgono i termini ad esponente
più basso

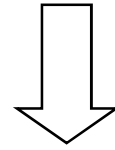
Tecniche di calcolo: razionali fratte per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^3 + 3x^2 + x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

forma indeterminata



Tecniche di calcolo: razionali fratte per $x \rightarrow 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^3 + 3x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x \underbrace{(x^2 + 3x + 1)}} =$$

Termini che tendono a zero

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

Limiti di funzioni razionali fratte per $x \rightarrow 0$

Allo stesso modo, calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + 3\sqrt[3]{x} + x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

forma indeterminata

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3} = 0$$

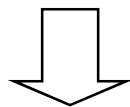
Limiti di funzioni composte



Limiti di funzioni

Un'altra operazione che conserva i limiti è la
composizione di funzioni:

assegnata la funzione composta $f \circ g = f(g(x))$
definita in un intervallo I (limitato o non limitato)
fatta eccezione al più per un punto $x_0 \in I$,
se per $x \rightarrow x_0$ si verifica che $g(x) \rightarrow l$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow l} f(t)$$

Limiti di funzioni

Esercizio 5. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_e \left(\frac{x^3 + 2}{x^3 - 2x + 5} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_e \left(\frac{x^3 + 2}{x^3 - 2x + 5} \right) = \log_e \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2x + 5} \right] = \log_e \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_e \left(\frac{x^3 + 2}{x^3 - 2x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_e \left(\frac{\cancel{x^3} + 2}{\cancel{x^3} - 2x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_e 1 = 0$$

Limiti di funzioni

Esercizio 6. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{4x^2 + 1}{x^2 - x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{4x^2 + 1}{x^2 - x} \right) = \log_2 \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{4x^2 + 1}{x^2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{4x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 4 =$$

$$= 2$$

Limiti di funzioni

Esercizio 8. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{5x^3 + 2x^2}{x^7 - x^2}}$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]}$$

Limiti di funzioni

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{5x^3 + 2x^2}{x^7 - x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{2x^2}{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-2} \\ &= 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Limiti di funzioni

Esercizio 10. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2^x}{2x^2 + 3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2^x}{2x^2 + 3^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2^x}{2x^2 + 3^x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^x} = 0$$

3^x è un infinito di ordine superiore

Limiti di funzioni

Esercizio 11. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + \log x}{2e^{3x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + \log x}{2e^{3x} + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + \log x}{2e^{3x} + 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^{3x}}}{2\cancel{e^{3x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Limiti di funzioni

Esercizio 12. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{\log x}{x^2 + x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{\log x}{x^2 + x}} = 2^{\left[\frac{\infty}{\infty} \right]}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{\log x}{x^2 + x}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{\log x}{x^2}} = 2^0 = 1$$

Limiti di funzioni

Esercizio 13. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot \infty]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

Limiti di funzioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

Ma exp è più veloce, quindi $= +\infty$

$\left(\frac{1}{x}\right)^2 \rightarrow +\infty$

Limiti di funzioni

Esercizio 14. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x^4 - e^{-x} + \frac{1}{x}}{3 \log x^3 + e^{-2x} + \frac{2}{x^2}}$$

Soluzione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x^4 - e^{-x} + \frac{1}{x}}{3 \log x^3 + e^{-2x} + \frac{2}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Limiti di funzioni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x^4 - \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0}}{3 \log x^3 + \underbrace{e^{-2x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\rightarrow 0}}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x^4}{3 \log x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{8} \log x}{\cancel{9} \log x} = \frac{8}{9}$$

Limiti di funzioni

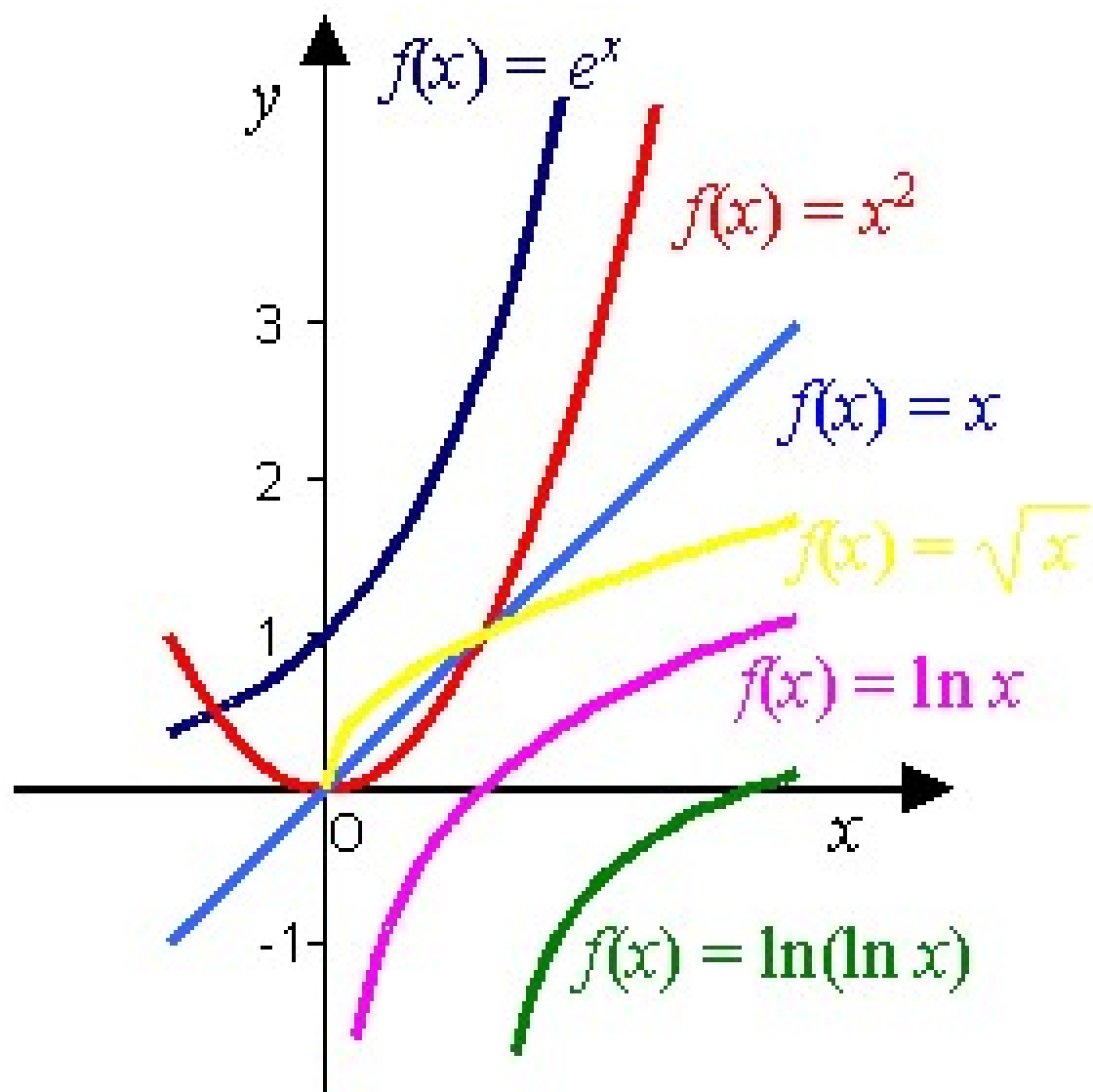
Esercizio 15-16-17. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1 + e^x} = \frac{-\infty}{1 + 1} \quad \boxed{= -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\log x} = \frac{0}{+\infty} \quad \boxed{= 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \log x \right) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty \quad \boxed{= +\infty}$$

Gerarchia di infiniti



Gerarchia di infiniti

Tutto ciò si traduce dicendo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = 0, \quad a > 1, b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0, \quad a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \log_a x = 0, \quad a > 1, b > 0$$

Altre forme indeterminate

Esistono altre forme indeterminate, ma che posso essere ricondotte a quelle studiate precedentemente

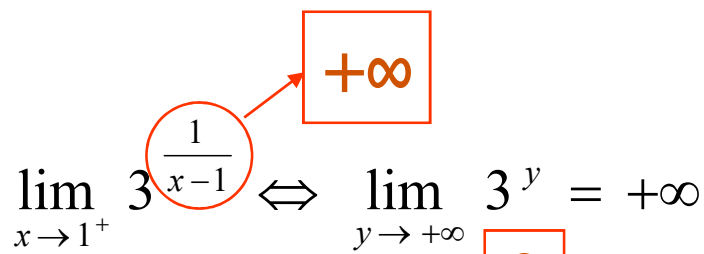
$$1^{\infty}$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

Calcolo dei limiti

In definitiva, l'ingrediente fondamentale per il calcolo dei limiti è la conoscenza delle proprietà delle funzioni elementari! La funzione di cui si calcola il limite deve essere scissa nelle sue funzioni componenti, e il limite viene calcolato mediante una sequenza di limiti di funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3^{\frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} 3^y = +\infty$$


Calcolo dei limiti

In definitiva, l'ingrediente fondamentale per il calcolo dei limiti è la conoscenza delle proprietà delle funzioni elementari! La funzione di cui si calcola il limite deve essere scissa nelle sue funzioni componenti, e il limite viene calcolato mediante una sequenza di limiti di funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x^3} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{x^3 + 2}{x^3 - 2x + 5}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x^4 - e^{-x} + \frac{1}{x}}{3 \log x^3 + e^{-2x} + \frac{2}{x^2}} = 8/9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \log x \right) = +\infty$$