31. Derivabilità e continuità

Continuita’ e derivabilita’

Che legame c’e’ tra la
derivabilità e la continuità di una funzione
in un punto x_0?

Teorema: Derivabile => continua

Teorema:

Se f(x) e' derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$

$$\Downarrow$$

f(x) e' continua in x_0

Quindi, la derivabilità in un punto implica
la continuità nello stesso punto

Teorema: Derivabile => continua

Teorema:

Se f(x) e' derivabile in un punto $x_0 \in$ (a,b)

$$\Downarrow$$

f(x) e' continua in x_0

Dimostrazione: ad uno studente :)

Continuita' e deriviabilita'

Abbiamo detto che:

f(x) e' derivabile in un punto $x_0 \in$ (a,b)

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$

f(x) e' continua in x_0

Ma NON vale il viceversa

Cioe': una funzione continua in un punto x_0 puo' non essere derivabile in x_0

Continua non implica derivabile: esempio

Sia data la funzione

$$f(x) = |x - 2|$$

Tale funzione è definita e continua in tutto R

Quindi, in particolare, è definita e continua nel punto $x_0 = 2$

Verifichiamo ora se $f(x)$ è anche derivabile nel punto $x_0 = 2$

Continua non implica derivabile: esempio

A tale proposito, costruiamone il rapporto incrementale nel caso in cui $x_0 = 2$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$$

$$= \frac{|2+h-2|-|2-2|}{h} = \frac{|h|}{h}$$ passando al limite per h->0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|h|}{h} = \lim_{x\to 0^+}\frac{h}{h} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{|h|}{h} =$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-h}{h} = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$$

Continua non implica derivabile: esempio

La funzione $f(x)=|x-2|$ ammette nel punto x_0=2 derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro

La funzione f(x)=|x-2| non è derivabile nel punto x_0=2 (pur essendo continua in tale punto)

Osservazioni

È importante osservare che dal teorema enunciato segue immediatamente che: nei punti di discontinuità una funzione non può ammettere derivata

Cioe':

Se f(x) non e' continua in un punto $x_0 \in$ (a,b)

$$\Downarrow$$

f(x) non e' derivabile in x_0