

31. Derivabilità e continuità



Continuità' e derivabilità'

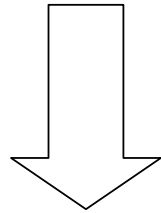
Che legame c'è tra la derivabilità e la continuità di una funzione in un punto x_0 ?



Teorema: Derivabile \Rightarrow continua

Teorema:

Se $f(x)$ e' derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$



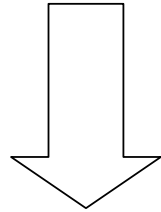
$f(x)$ e' continua in x_0

Quindi, la derivabilità in un punto implica
la continuità nello stesso punto

Teorema: Derivabile \Rightarrow continua

Teorema:

Se $f(x)$ e' derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$



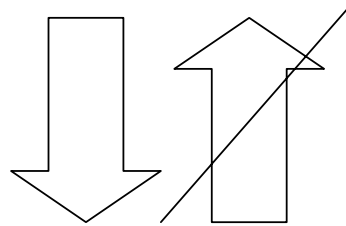
$f(x)$ e' continua in x_0

Dimostrazione: ad uno studente :)

Continuità' e derivabilità'

Abbiamo detto che:

$f(x)$ e' derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$



$f(x)$ e' continua in x_0

Ma NON vale il viceversa

Cioe': una funzione continua in un punto x_0 puo' non essere derivabile in x_0

Continua non implica derivabile: esempio

Sia data la funzione

$$f(x) = |x - 2|$$

Tale funzione è definita e continua in tutto \mathbb{R}

Quindi, in particolare, è definita e continua nel punto $x_0 = 2$

Verifichiamo ora se $f(x)$ è anche derivabile nel punto $x_0 = 2$

Continua non implica derivabile: esempio

A tale proposito, costruiamone il rapporto incrementale nel caso in cui $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \\ &= \frac{|2 + h - 2| - |2 - 2|}{h} = \frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

passando al limite per $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Continua non implica derivabile: esempio

La funzione $f(x) = |x - 2|$ ammette nel punto $x_0 = 2$ derivata destra e derivata sinistra finite ma diverse tra loro



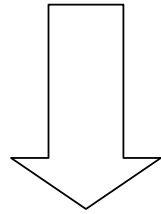
La funzione $f(x) = |x - 2|$ non è derivabile nel punto $x_0 = 2$ (pur essendo continua in tale punto)

Osservazioni

È importante osservare che dal teorema enunciato segue immediatamente che:
nei punti di discontinuità una funzione non può ammettere derivata

Cioè:

Se $f(x)$ non è continua in un punto $x_0 \in (a,b)$



$f(x)$ non è derivabile in x_0