33. Derivate delle funzioni elementari.

Concetto di derivata di ordine superiore.

Funzione derivata

Se f è derivabile in ogni punto dell'intervallo (a,b), allora è possibile considerare una nuova funzione che ad ogni punto $x \in (a,b)$ associa il valore della derivata $f'(x)$

$$x \in (a,b) \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$$

Tale funzione viene detta

Funzione derivata

e si indica col simbolo $f'(x)$

Funzione derivata

$$f': (a,b) \longrightarrow R$$

che ad x associa $f'(x)$

Derivata seconda

A questo punto, ha senso chiedersi se la funzione derivata $f'(x)$ è a sua volta derivabile in un punto oppure in tutto l'intervallo (a,b).

In caso affermativo, chiameremo

derivata seconda

la derivata di f` e la indicheremo con uno dei seguenti simboli

$$f''(x), D^2 f(x)$$

Derivata n-esima

In modo del tutto analogo si definiscono le funzioni derivata terza $f'''(x)$, derivata quarta $f^{IV}(x)$, e di ordine ancora superiore,…, in generale derivata n-esima

$$f^{n}(x)$$

Derivate delle funzioni elementari

Derivate della funzione costante

- Sia data la funzione costante $f(x) = k$

  Vediamo quanto vale la derivata di una funzione costante $\forall x \in R$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Dk = 0, \forall x \in R}$$

Derivate della funzione costante: interpretazione

Il risultato appena trovato ha un'interpretazione geometrica:

il grafico della funzione costante $f(x) = k$ è una retta parallela all'asse delle ascisse

$\Downarrow$

In ogni punto la retta tangente coincide con il grafico della funzione

$\Downarrow$

Il coefficiente angolare della retta tangente è

$$m_t = 0, \forall x \in R$$

(infatti: $\tan 0 = 0$)

Derivate della funzione lineare

- Sia data la funzione bisettrice $f(x) = x$

  Vediamo quanto vale la derivata della funzione bisettrice $\forall x \in R$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{Dx = 1, \forall x \in R}$$

Derivate della funzione lineare: interpretazione

Il risultato appena trovato ha un'interpretazione geometrica: il grafico della funzione costante $f(x) = x$ è la retta bisettrice del I e III quadrante

$\Downarrow$

In ogni punto la retta tangente coincide con il grafico della funzione

$\Downarrow$

Il coefficiente angolare della retta tangente è

$$m_t = 1, \forall x \in R$$

(infatti: $\tan\frac{\pi}{4} = 1$)

Derivate della funzione potenza

- Sia data la funzione $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in R$ e $x > 0$

Si può verificare che la derivata di tale funzione quando $x \in R^{+}$ è:

$$\boxed{Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}, \forall x > 0 \text{ ed } \forall \alpha \in R}$$

Esempio 1:

se $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

In particolare, posto x_0=2 $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 4 = 12$

Derivate della funzione potenza

se $f(x)=\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x \in R^{+}}$$

Derivate della funzione potenza

$$\text{se} \quad f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = x^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in R^+}$$

Regole di derivazione

- $$Da^x = a^x \log a$$

- $$De^x = e^x$$

- $$D \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}$$

- $$D \log x = \frac{1}{x}$$

Regole di derivazione

- $$\boxed{D \operatorname{sen} x = \cos x}$$

- $$\boxed{D \cos x = -\operatorname{sen} x}$$