37. Equazione retta tangente in un punto al grafico di una funzione.

Derivata

Definizione derivata di una funzione in un punto (30)
Definizione derivata di una funzione (30)

Significato della derivata

Derivata in un punto (32)
Derivata di una funzione (32)

Regole di calcolo delle derivata

elementari (33)
somma, prodotto, … (34)
funzioni composte (35)
funzioni inverse (35)

Derivata e continuita

derivata => continuita (31)
continuita NON => derivata (31)
funzioni non derivabili. Punti angolosi, cuspidi, … (36)

Applicazioni delle derivata

Equazione della retta tangente in un punto al grafico di una funzione. (37)
Teorema di Fermat. Punti stazionari. (38)
Caratterizzazione delle funzioni monotone. (39)
Concavità e convessità. Criterio di convessità. (40)
Teorema di'Hopital. (41)

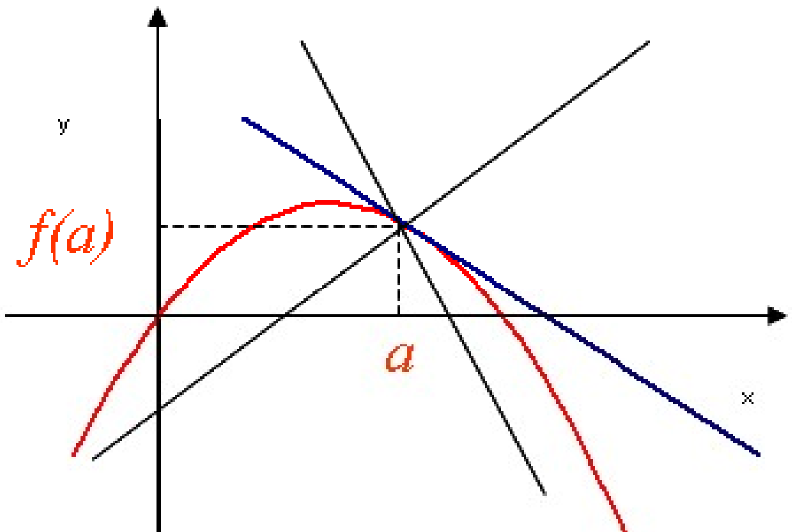
Applicazioni delle derivate

Uno degli studi più proficui del calcolo della derivata consiste nell'approssimare una funzione con una funzione lineare

Derivabilità ed approssimazione

Domanda: assegnata la funzione $y=f(x)$, trovare una funzione che approssima y.

In particolare fra i polinomi di primo grado della forma $y=r(x)=f(a)+m(x-a)$ qual è quello che approssima meglio la funzione?



Cosa significa??

Un'**approssimazione** è una rappresentazione di una qualche grandezza che sia sufficientemente precisa da poter essere di una qualche utilità pratica.

Risposta: la migliore approssimazione è data da $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ (equazione della retta tangente in (a, $f(a)$))

Osservazione: I grafici delle rette di equazione $y=r(x)=f(a)+m(x-a)$ passano tutti per (a,f(a)), e quindi r(a)=f(a).Tuttavia, solo per $y=f(a)+f'(a)(x-a)$, equazione della retta tangente in (a, f(a)), si verifica r'(a)=f'(a)

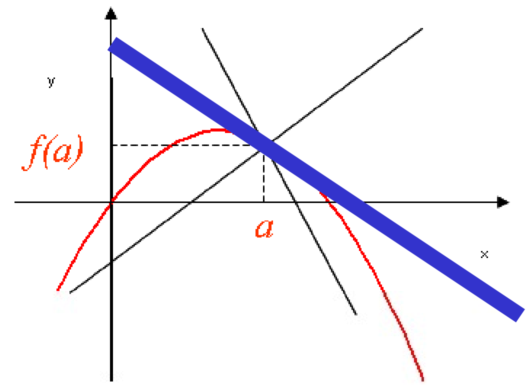
Derivabilità ed approssimazione

Funzione *approssimazione*

$y=f(x)$ $r(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$

1. Passa per lo stesso punto

$y(a)=f(a)$ $r(a)=f(a)$



2. Ha lo stesso valore della derivata in quel punto

$y'(a)=f'(a)$ $r'(a)=f'(a)$ (*)

Risposta: r(x) e' la migliore approssimazione di <u>f(x) in a</u>.

Infatti:

1. Passa per lo stesso punto (a,f(a))
2. In a ha lo stesso valore della derivata

Derivabilità ed approssimazione

$r(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$

Facciamo vedere che $r'(a)=f'(a)$

$r(x)=f(a) \quad +f'(a)*x \quad -f'(a)*a$

$r'(x)=0 \quad +f'(a)*1 \quad -0 \qquad = f'(a)$

Derivabilità ed approssimazione

la migliore approssimazione è data da $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ (equazione della retta tangente in $(a, f(a))$)

$$r(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$$

$$r(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Derivabilità ed approssimazione: esempio

Sia data la funzione $f(x)=-x^2+4x$. Qual è l'equazione della retta che meglio approssima la funzione in a=3?

$r(x) \quad = f(a)+f'(a)(x-a)$

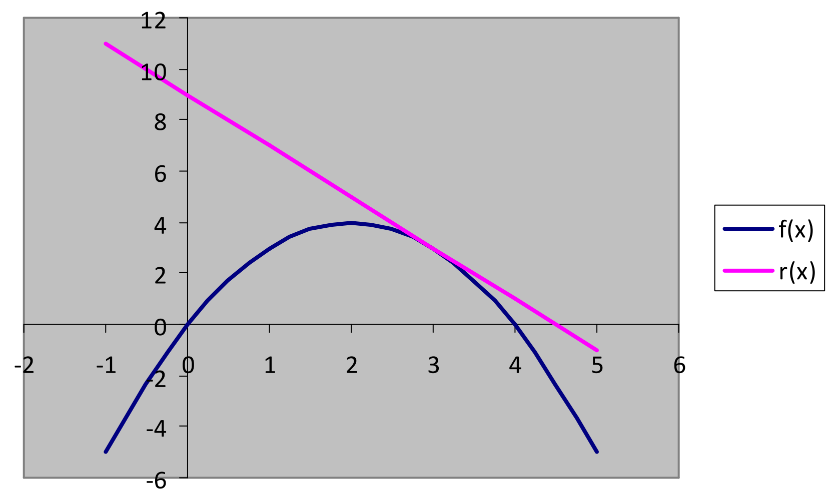
$f(x) \quad =-x^2+4x$

$f(3) \quad =-3^2+12=+3$

$f'(x) \quad = -2x+4$

$f'(3) \quad = -2$

$r(x) \quad = +3-2(x-3)=-2x+9$



Derivabilità ed approssimazione: esempio

Sia data la funzione $f(x)=\ln(x)-x^2$. Qual e' l'equazione della retta tangente al grafico nel punto A(1;-1)?

Disegnarla

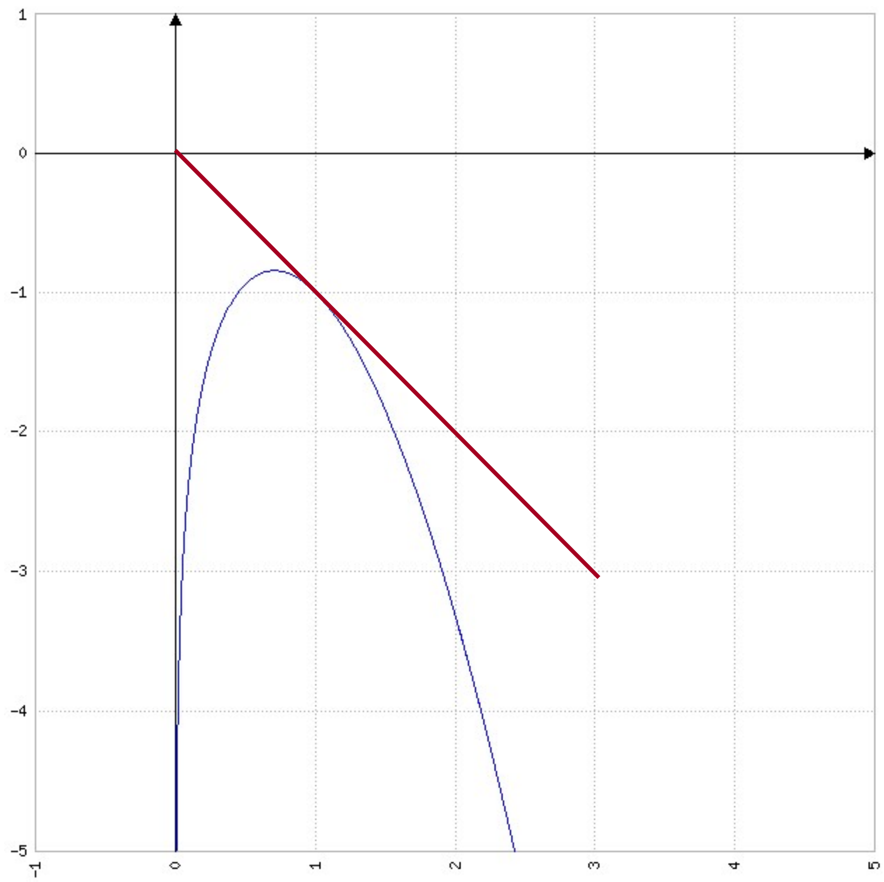
$r(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$

$r(x) = f(1)+f'(1)(x-1)$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$

$f'(1) = -1$

$r(x) = -1+(-1)(x-1)=-x+0$



Derivabilità ed approssimazione: esempio

Sia data la funzione f(x)=x+2. Qual è l'equazione della retta tangente al grafico nel punto A(1;3)?

E disegnarla sul grafico?

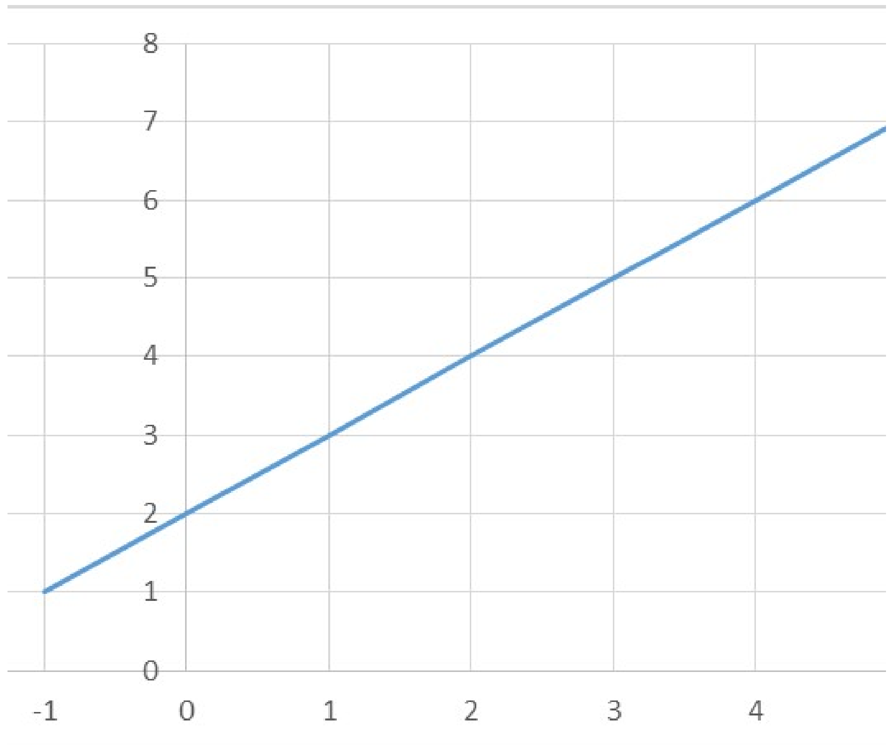
$$r(x) \quad = f(a)+f'(a)(x-a)$$

$$f(1) \quad =3$$

$$f'(x) \quad = 1$$

$$f'(1) \quad = 1$$

$$r(x) \quad = 3+1*(x-1)=x+2$$



Retta tangente: definizioni

Si possono dare varie definizioni intuitive di **retta tangente** a una curva nel piano.

La parola *tangente* viene da *tangere* cioè toccare.

1. una retta che "tocca" la curva senza "tagliarla" o "secarla" (una retta che attraversa la curva "tagliandola" è invece chiamata *secante*.)

2. la tangente in un punto P a una curva y, è la retta che *approssima* meglio y nei dintorni di P.

Posto che una curva sia il grafico di una funzione $y=f(x)$ e che siamo interessati al suo punto (x_0,y_0), dove $y_0=f(x_0)$, diremo che la curva ha una tangente non verticale nel punto (x_0,y_0) se e solo se la funzione è derivabile in x_0. In questo caso il coefficiente angolare della tangente è dato da $f'(x_0)$.

Da wikipedia https://it.wikipedia.org/wiki/Tangente_%28geometria%29

Derivabilità ed approssimazione: esempio

Sia data la funzione $f(x)=e^{2x}$. Qual è l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x_0=\ln 3$? Disegnarla

$$r(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$$

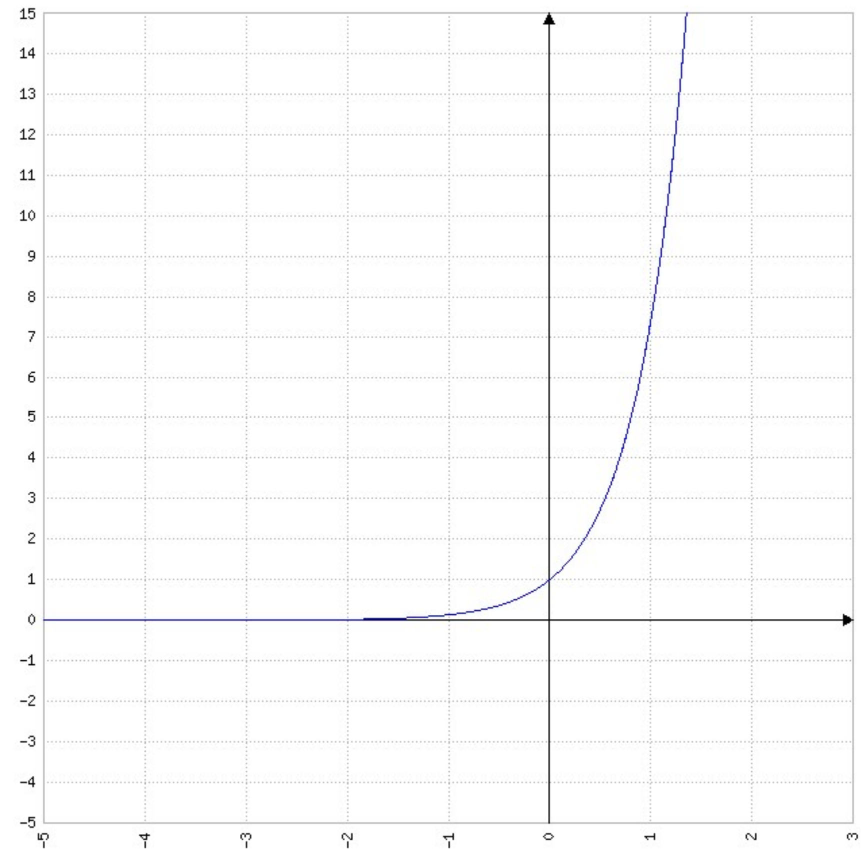
$$r(x) = f(\ln 3)+f'(\ln 3)(x-\ln 3)$$

$$f(\ln 3) = e^{2\ln 3} = (e^2)^{\ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$$

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f'(\ln 3) = 2*9=18$$

$$r(x) = +9+(18)(x-\ln 3)=18x-18*\ln 3+9$$



Derivabilità ed approssimazione: esempio

Sia data la funzione $f(x)=-x^2+4x$. Qual è l'equazione della retta tangente al grafico nel punto A(2;4)?

E disegnarla sul grafico?

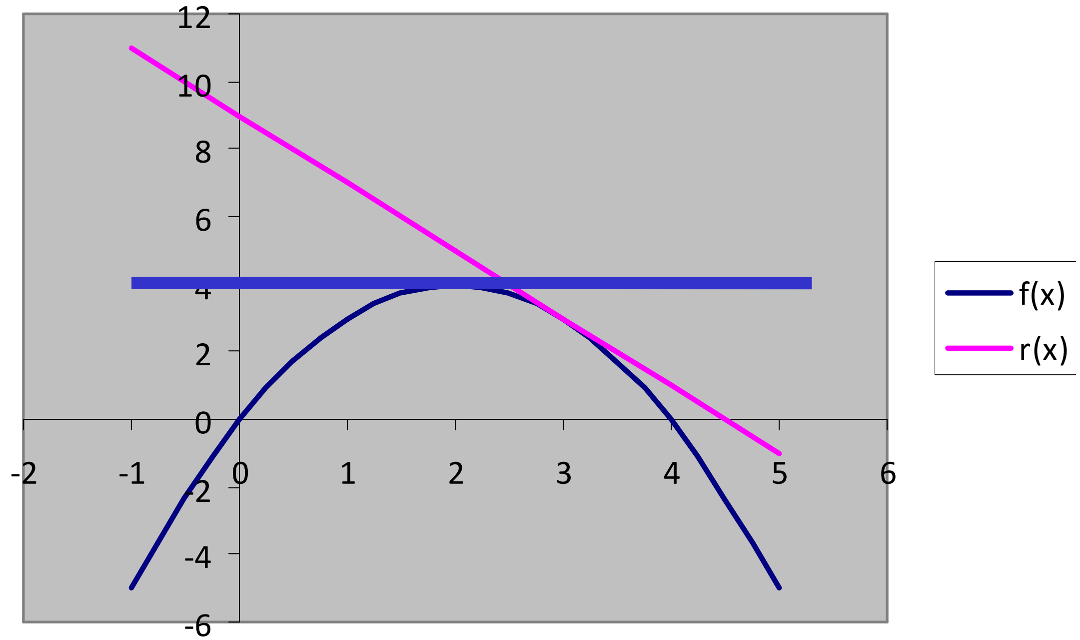
$r(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$

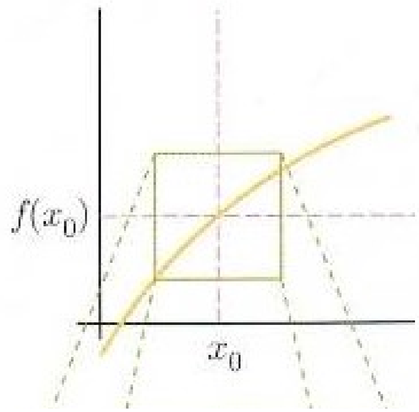
$f(2) =+4$

$f'(x) = -2x+4$

$f'(2) = 0$

$r(x) = +4-0(x-2)=4$





$f(x_0)$
x_0