

39. Caratterizzazione delle funzioni monotone.

Caratterizzazione delle funzioni costanti in intervalli.



Derivata

Definizione derivata di una funzione in un punto (30)

Definizione derivata di una funzione (30)

Significato della derivata

Derivata in un punto (32)

Derivata di una funzione (32)

Regole di calcolo delle derivata

elementari (33)

somma, prodotto, ... (34)

funzioni composte (35)

funzioni inverse (35)

Derivata e continuita

derivata \Rightarrow continuita (31)

continuita NON \Rightarrow derivata (31)

funzioni non derivabili. Punti angolosi, cuspidi, ... (36)

Applicazioni delle derivata

Equazione della retta tangente in un punto al grafico di una funzione. (37)

Teorema di Fermat. Punti stazionari. (38)

Caratterizzazione delle funzioni monotone. (39)

Concavità e convessità. Criterio di convessità. (40)

Teorema di'Hopital. (41)



Definizione crescente/decrescente

Vediamo ora come il segno della derivata prima di una funzione caratterizzi la monotonia della funzione stessa.

A tale proposito, consideriamo una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile nei punti interni all'intervallo $[a, b]$ e siano dati due punti $x_0, x_1 \in (a, b)$.

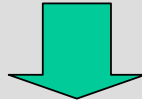
Già sappiamo che:

- f crescente se: $x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0)$

$$x_0 + h > x_0 \Rightarrow f(x_0 + h) \geq f(x_0)$$

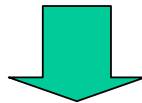
- f decrescente se: $x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_0)$

$$x_0 + h > x_0 \Rightarrow f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$



- f crescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \geq 0$

- f decrescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \leq 0$



Passando al limite per $x \rightarrow x_0$

- f crescente $\Leftrightarrow f'(x_0) \geq 0, \quad \forall x_0 \in (a, b)$

- f decrescente $\Leftrightarrow f'(x_0) \leq 0, \quad \forall x_0 \in (a, b)$

Quindi:

Criterio di monotonia

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora vale che:

- f crescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b)$
- f decrescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a, b)$

A partire dal criterio di monotonia, è possibile effettuare lo studio dei massimi e minimi relativi ed assoluti di una funzione

Sia $f : [a, b] \rightarrow R$ una funzione definita in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora, per ricercare gli estremi relativi ed assoluti (se esistono) della f si può procedere come segue:

1. si calcolano i valori $f(a)$ ed $f(b)$
2. si determina la funzione derivata $f'(x)$ e si risolve l'equazione $f'(x) = 0$. Le soluzioni di tale equazione sono i punti stazionari di f tra i quali vi sono anche gli eventuali punti di estremo locale interni ad (a, b)

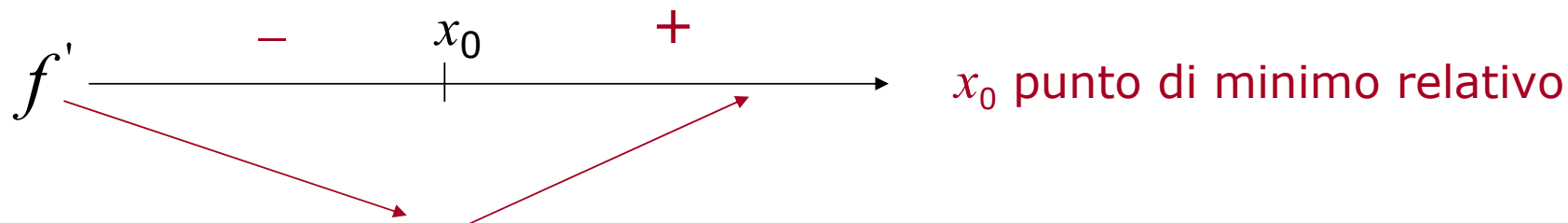
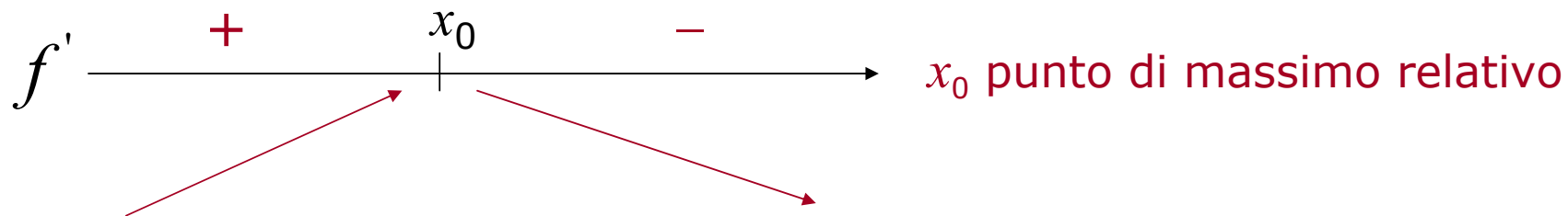
3a. Se l'equazione $f'(x) = 0$ non ammette soluzioni e cioè se non vi sono punti stazionari, allora $f(a)$ ed $f(b)$ (diversi tra loro) sono estremi assoluti.

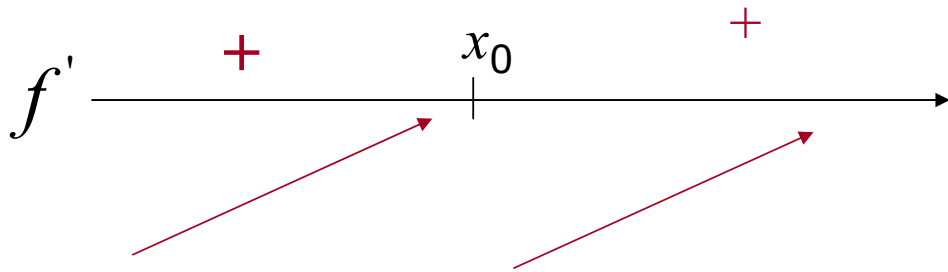
3b. Se invece l'equazione $f'(x) = 0$ ammette soluzioni e

ad esempio $x = x_0$ è un punto stazionario, allora per stabilire se x_0 è o meno un estremo relativo, bisogna studiare il segno della derivata prima in un intorno di x_0 e applicare quindi il criterio di monotonia

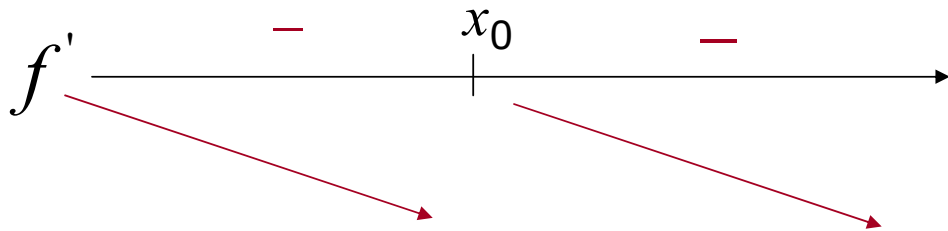


Più precisamente, se $f'(x_0) = 0$ si può verificare che:





x_0 punto di flesso



x_0 punto di flesso

4. Trovati gli eventuali punti di estremi locale, si calcola il valore di f in tali punti e lo si confronta con i valori $f(a)$ ed $f(b)$.

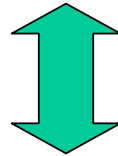
Osservazione

Relativamente al punto 1, bisogna osservare che se la funzione f considerata è definita in un intervallo limitato ma non chiuso oppure in un intervallo non limitato, allora la ricerca degli estremi della funzione è legato allo studio del comportamento della funzione agli estremi del dominio mediante l'operazione di limite

Come conseguenza del criterio di monotonia si ha:

Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo

Sia f una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ tale che $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$



f è costante nell'intervallo $[a, b]$