

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

Derivata

Definizione derivata di una funzione in un punto (30)

Definizione derivata di una funzione (30)

Significato della derivata

Derivata in un punto (32)

Derivata di una funzione (32)

Regole di calcolo delle derivata

elementari (33)

somma, prodotto, ... (34)

funzioni composte (35)

funzioni inverse (35)

Derivata e continuità

derivata \Rightarrow continuità (31)

continuità NON \Rightarrow derivata (31)

funzioni non derivabili. Punti angolosi, cuspidi, ... (36)

Applicazioni delle derivata

Equazione della retta tangente in un punto al grafico di una funzione. (37)

Teorema di Fermat. Punti stazionari. (38)

Caratterizzazione delle funzioni monotone. (39)

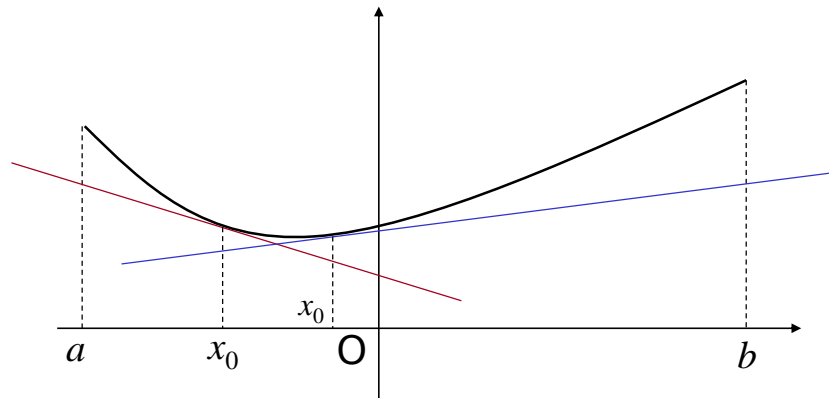
Concavità e convessità. Criterio di convessità. (40)

Teorema di'Hopital. (41)

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

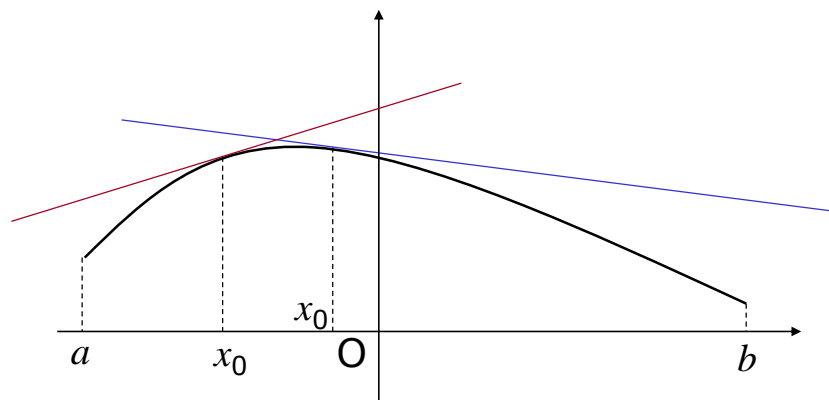
Funzioni convesse e funzioni concave

Def. Si dice che una funzione $f(x)$ è convessa in un intervallo $[a,b]$ se $\forall x_0 \in [a,b]$ il grafico di $f(x)$ è al di sopra della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$



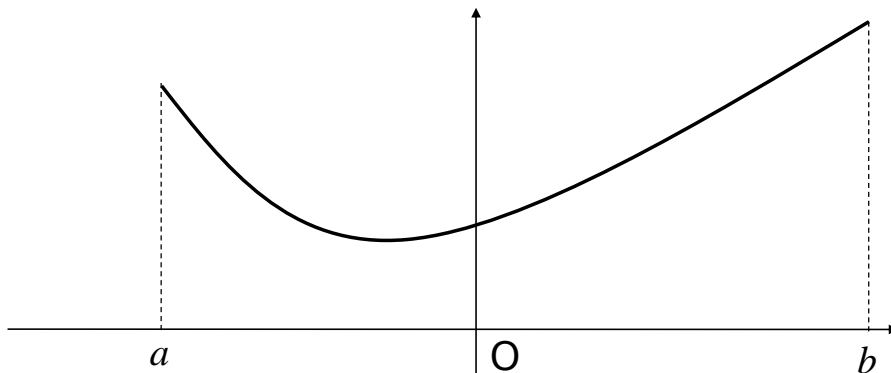
40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

Def. Si dice che una funzione $f(x)$ è concava in un intervallo $[a,b]$ se $\forall x_0 \in [a,b]$ il grafico di $f(x)$ è al di sotto della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$



40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

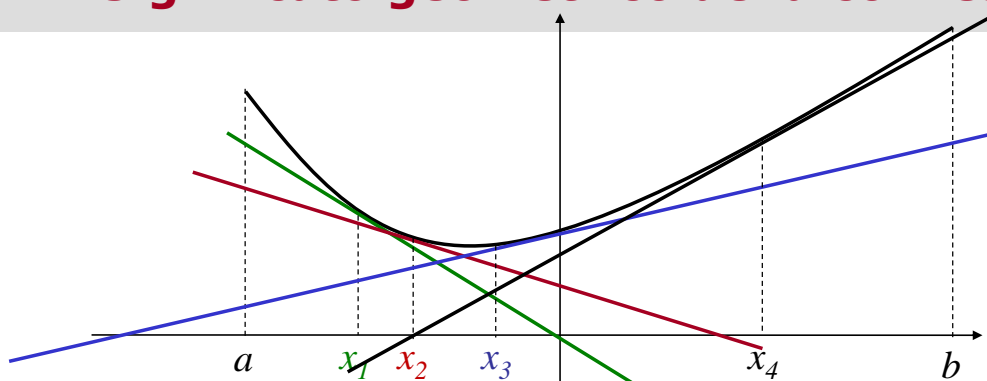
Significato geometrico della convessità



Al crescere di x_0 in $[a, b]$ da valori più piccoli fino a valori più grandi, la pendenza della retta tangente al grafico dei f nel punto $(x_0, f(x_0))$ cambia e in particolare, il coefficiente angolare di tale tangente cresce passando da valori più piccoli (anche negativi) a valori più grandi

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

Significato geometrico della convessità



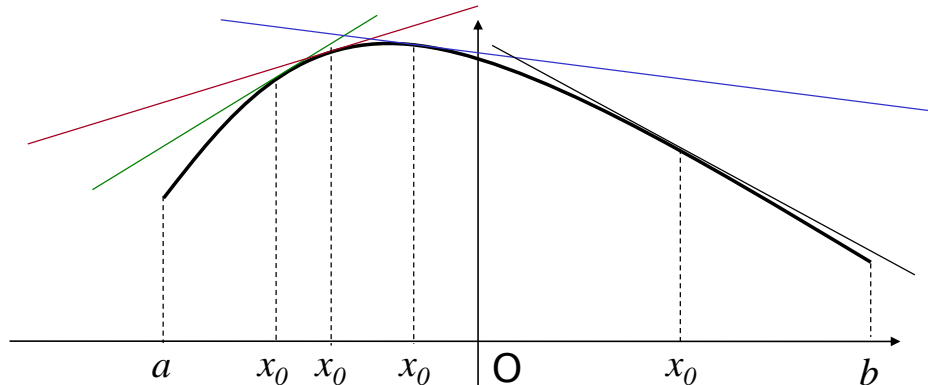
Valore x	Angolo	Tang(angolo)
----------	--------	--------------

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) \text{ crescente}$$

$$f \text{ convessa in } [a, b] \Leftrightarrow f' \text{ crescente in } [a, b] \Leftrightarrow (f')' \geq 0 \text{ in } [a, b] \Leftrightarrow f'' \geq 0 \text{ in } [a, b]$$

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

Significato geometrico della concavità



Al crescere di x_0 in $[a, b]$ da valori più piccoli fino a valori più grandi, la pendenza della retta tangente al grafico dei f nel punto $(x_0, f(x_0))$ cambia e in particolare, il coefficiente angolare di tale tangente decresce passando da valori più grandi a valori più piccoli (anche negativi)

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

Criterio di convessità

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b) . Allora vale che

- f convessa in $[a, b] \Leftrightarrow f'$ crescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'' \geq 0$ in $[a, b]$
- f concava in $[a, b] \Leftrightarrow f'$ decrescente in $[a, b] \Leftrightarrow f'' \leq 0$ in $[a, b]$

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

Quindi:

Se la derivata prima di una funzione ha come significato geometrico quello di pendenza del grafico della funzione stessa, la derivata seconda rappresenta la variazione di tale pendenza

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

Ovviamente, all'interno di uno stesso intervallo, il verso della concavità di una funzione può cambiare:

Sia f derivabile due volte in (a,b) e sia $x_0 \in [a,b]$, allora,

se f è convessa in $[a, x_0]$ e concava in $[x_0, b]$



il punto x_0 di transizione tra le due concavità è detto

punto di flesso

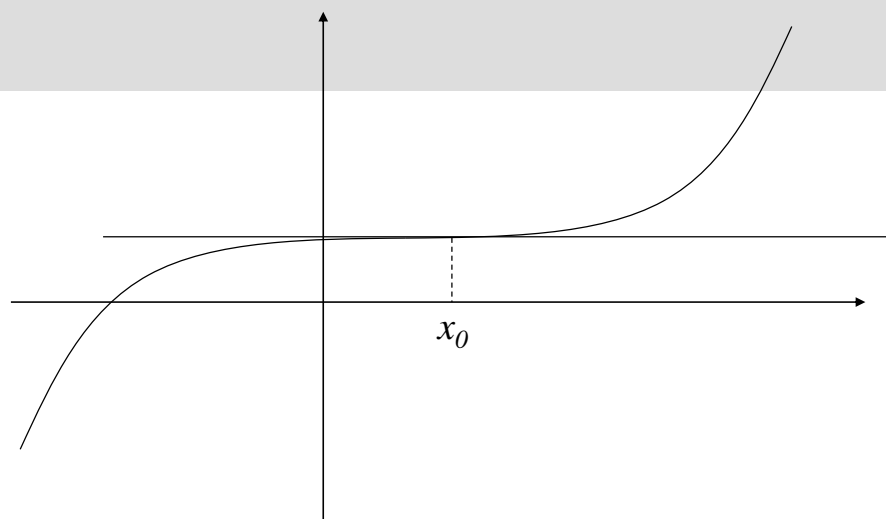
40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.

In particolare, poiché il verso della concavità è caratterizzato dal segno della derivata seconda f'' , dire che nel punto x_0 cambia il verso della concavità vuol dire che nel punto x_0 la derivata seconda f'' si annulla



$$x_0 \text{ punto di flesso} \Leftrightarrow f''(x_0) = 0$$

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.



x_0 punto di flesso

(in particolare, nell'esempio in figura si tratta di un flesso a tangente orizzontale)

40. Concavità e convessità. Criterio di convessità.