## ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI ( E NON) E LORO GRAFICI [(*)]

**a) la funzione costante k. Sia *k*** un numero reale e consideriamo la funzione che ad *ogni numero reale **x** associa **k**:*

$$x \in \mathbf{R} \rightarrow k$$

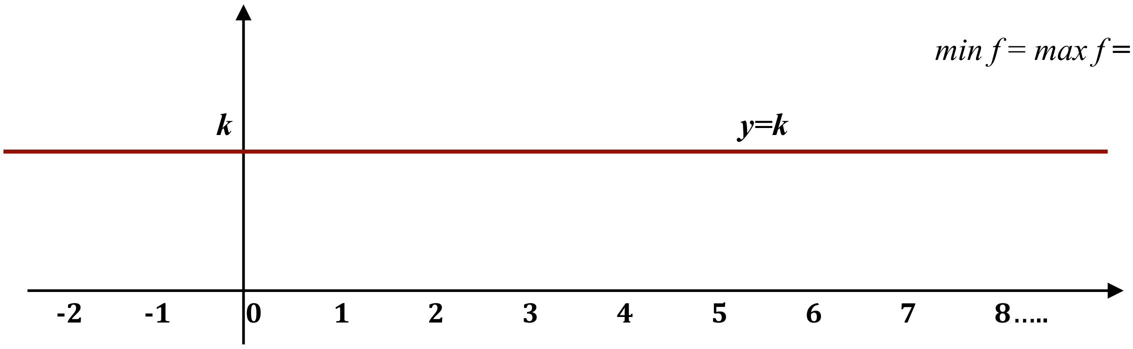
Tale funzione è detta **funzione costante k;** il suo codominio è $\{k\}$,il suo grafico è costituito da tutti i punti del piano di ordinata k

$$\{P(x, y) \in \Pi : x \in \mathbf{R} \text{ e } y=k\} = \{P(x, k)\}_{x \in X}$$

ed è quindi la retta orizzontale di equazione ***y=k.*** La funzione costante è **continua.**

$f(\mathrm{R}) = \{k\}$

$\min f = \max f = k$




Ovviamente la funzione non è invertibile
Se **k = 0** la funzione è la funzione $x \in \mathbf{R} \rightarrow 0$ che è detta ***funzione nulla*** e ha per grafico la retta di equazione ***y=0*** coincidente con l'asse delle ascisse

**b) . La funzione costante a tratti o funzione a scala:** è una funzione definita in un' unione di intervalli a due a due disgiunti ed è tale nei punti di uno stesso intervallo assume lo stesso valore

**b₁.** la funzione

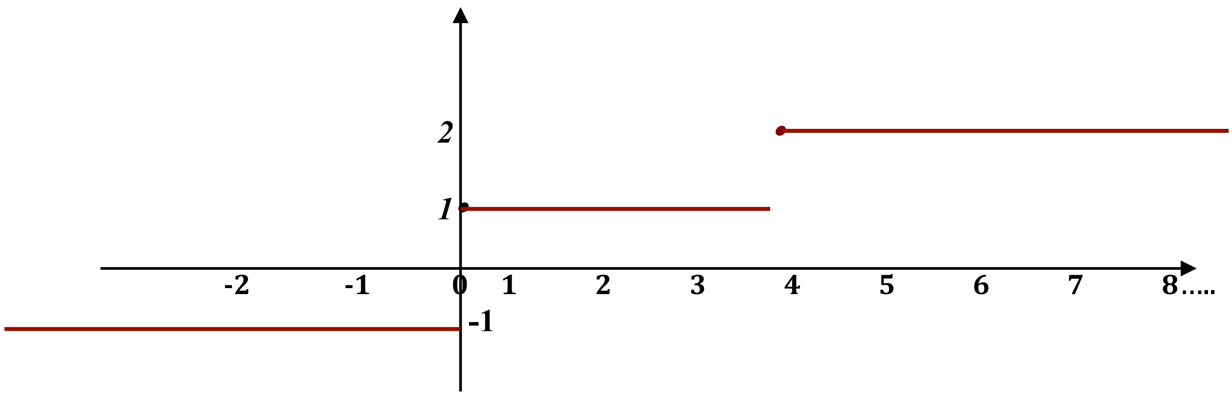
$$f : x \in R \rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & se \quad x \in ]-\infty, 0[ \\ 1 & se \quad x \in [0,4[ \\ 2 & se \quad x \in [4,+\infty[ \end{cases}$$

$f(\mathbf{R}) = \{-1, 1, 2\}$

$\min f = -1$ ***ogni x < 0 è punto di minimo***

$\max f = 2$ ***ogni x ≥ 4 è punto di massimo***

è costante a tratti: il dominio **R** è unione degli intervalli a due a due disgiunti $]-\infty,0[$ , $[0,4[$ e $[4,+\infty[$ su ogni dei quali f è costante: La funzione non è continua

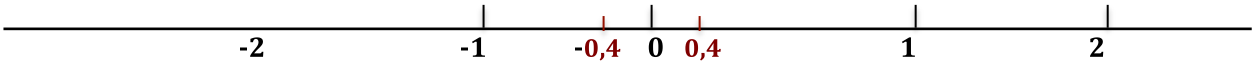



[(*)]**----** tali appunti saranno integrati a lezione con l'aggiunta dei limiti negli estremi del dominio che non appartengono al dominio e nei punti di discontinuità

**$b_2$.** Ricordiamo che se $x$ è un numero reale, con **[*x*]** è indicata la ***parte intera di x,*** cioè il più grande intero che risulta $\leq x$:

$$[x] = \max\{z \in \mathbf{Z} : z \leq x\}$$

Esempio: $[2/5] = [0{,}4] = 0$ $\quad\quad$ $[-2/5] = [-0{,}4] = -1$




La **funzione parte intera** è **la funzione** $f: x \in \mathbf{R} \rightarrow [x]$

Consideriamo R come unione di intervalli superiormente semiaperti, del tipo $[z, z+1[$ , con z intero relativo:

$$\mathrm{R} = \bigcup_{z \in Z} [z, z+1[$$

Ogni numero reale $x$ appartiene ad un solo intervallo $[z, z+1[$ e risulta $\quad [x] = z \quad \forall x \in [z, z+1[$

Allora la **funzione parte intera** $f: x \in \mathbf{R} \rightarrow [x]$ è una funzione costante a tratti perché è costante su ogni intervallino $[z, z+1[$ ; essa non è continua

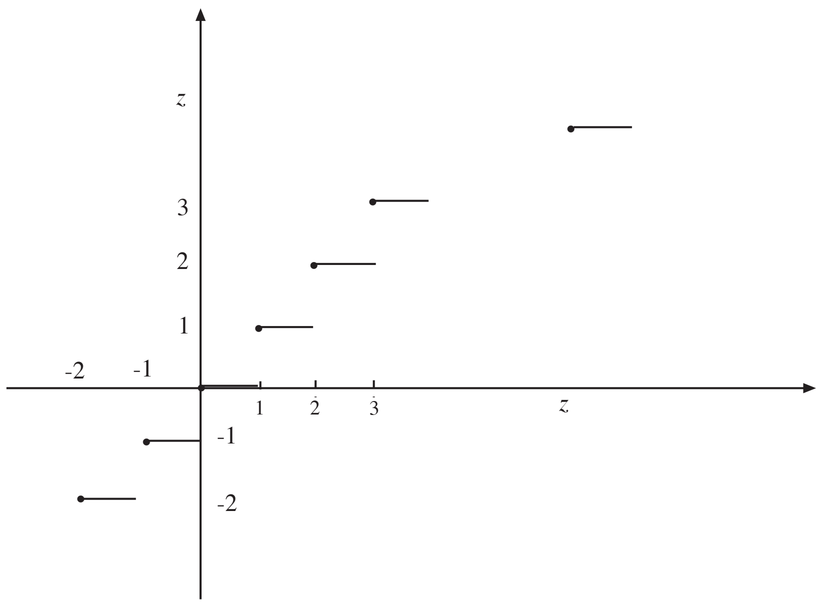
$$f : x \in R \Longrightarrow f(x) = [x] = \begin{cases} \ldots \\ -n \quad se\ x \in [-n, -n+1[, \quad n \in N \\ \ldots \\ -2 \quad se\ x \in [-2, -1[ \\ -1 \quad se\ x \in [-1, 0[ \\ 0 \quad se\ x \in [0, 1[ \\ 1 \quad se\ x \in [1, 2[ \\ 2 \quad se\ x \in [2, 3[ \\ \ldots \\ n \quad se\ x \in [n, n+1[, \quad (n \in N) \\ \ldots \end{cases}$$

***f***(R) è l'insieme **Z** degli interi relativi

*inf* ***f*** = *inf* Z = -∞
*sup* ***f*** = *sup f* Z = +∞

*ogni intero è punto di massimo relativo*

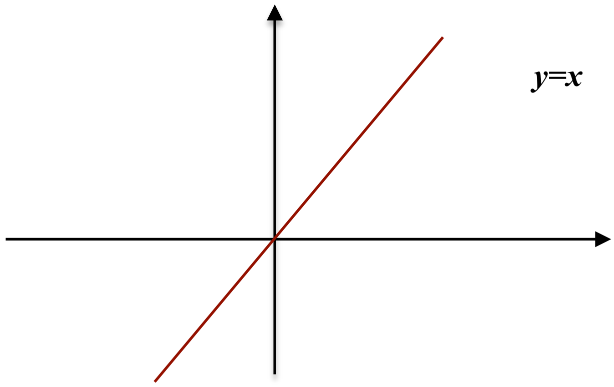
Il suo grafico è il seguente grafico a scala:



**c). L'applicazione identica.** La funzione

$$\boldsymbol{i: x \in R \to i(x) = x}$$

è detta ***applicazione identica ;*** il suo codominio è ***R*** ha per grafico la bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y=x$



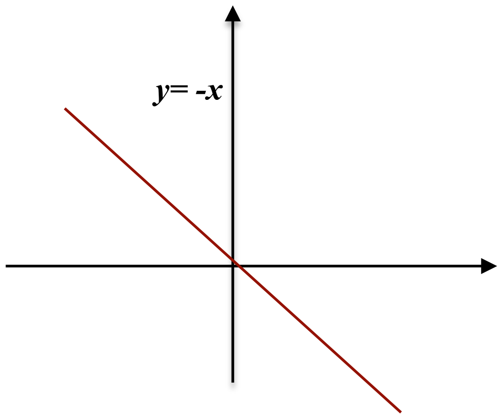

***i(R) =R***
*inf* $\boldsymbol{i}$ = *inf* R = $-\infty$
*sup* $\boldsymbol{I}$ = *sup f* R = $+\infty$

La applicazione ***i è continua, strettamente crescente, invertibile*** e coincide con la sua inversa: $\boldsymbol{i^{-1} = i}$

**d). La funzione opposta della applicazione identica**

$$\boldsymbol{-i: x \in \mathrm{R} \to -x}$$

ha per codominio ***R*** e per grafico l'insieme dei punti di coordinate (***x, -x***) e cioè la bisettrice del secondo e quarto quadrante di equazione $y=-x$




***-i(R) = R***
*inf* ***-i*** = *inf* R = $-\infty$
*sup* ***–i*** = *sup f* R =

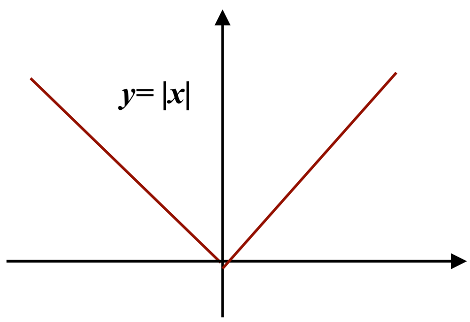
La applicazione ***-i è continua, strettamente decrescente, invertibile*** e coincide con la sua invers :
$\boldsymbol{(-i)^{-1} = -i}$

**e) La funzione valore assoluto.** La funzione **valore assoluto**

$$\boldsymbol{v: x \in R \to |x| \in [0, +\propto[}$$

ha per grafico è costituito dai punti del primo quadrante di coordinate (***x, x***) e dai punti del secondo quadrante di coordinate (***x, -x***); il suo codominio è $[0, +\propto[$

$$v : x \in R \to |x| = \begin{cases} -x & se\ x < 0 \\ x & se\ x \geq 0 \end{cases}$$




***v(R)= [0, +∝[***

*inf* ***v*** = min ***v*** = min **[*0*, +∝[** = 0
*0 punto di minimo*
*sup* ***f*** = *sup*[***0*, +∝[** = $+\infty$

***v è pari, continua, convessa, strettamente crescente in*** [0, +∝[ , ***strettamente decrescente in*** **]- ∝,0].**

**f) La funzione lineare.** La funzione ***f: x∈ R → f(x) = m x*** è detta ***funzione lineare***; essa gode delle seguenti proprietà :

$$f(0)=0 \quad e \quad \frac{f(x)}{x}=m \quad \forall x \neq 0$$

***f(hx) =hf(x)*** *proprietà di* ***omogeneità*** ( dim.: ***f(hx) = mhx = h mx = hf(x)*** )

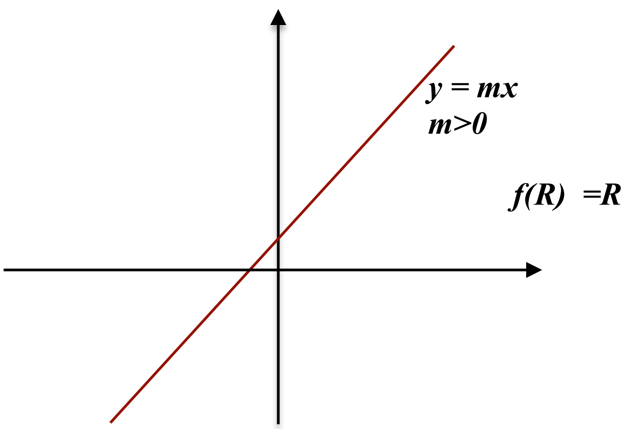
***f(x+y) =f(x) + f(y)*** *proprietà di* ***additività*** ( dim.: ***f(x+y) = m(x+y) = mx+my = f(x) +f(y)***)

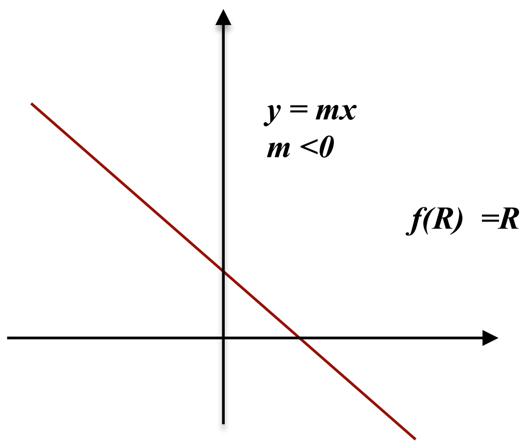
***f(hx+ky) = hf(x) +k f(y)*** *proprietà di* ***linearità*** (dim***: f(hx+ky)=m(hx+ky) = hmx+kmy = hf(x) +k*f(*y*))**

la proprietà di linearità può essere dimostrata come conseguenza delle proprietà di additività e omogeneità:
***f(hx+ky) = f(hx)+f(ky) = hf(x) +k*f(*y*).**

L'applicazione identica e la sua opposta sono casi particolari di funzioni lineari.

Il grafico della funzione lineare è una retta passante per l'origine del riferimento con coefficiente angolare ***m***



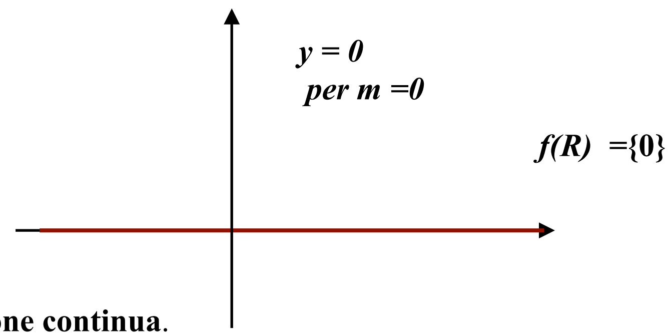

*Strettamente crescente per m >1*

*Strettamente decrescente per m <1*

**Se $\boxed{m\neq 0}$:** ***inf f = -∞ e sup f = +∞, f invertibile*** e per ogni **y*∈ R* è** $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{m}y$ **.**

**Pertanto la funzione inversa di *f* è ancora una funzione lineare:** $f^{-1}: y \in R \to f^{-1}(y) = \frac{1}{m}y$

**Se $\boxed{m=0}$: la funzione è la funzione nulla *f: x∈ R → f(x)=0***
Allora***: f(R)* ={0}, *min f = sup f =* 0**




La funzione lineare è una **funzione continua**.

**g) La funzione (lineare) affine**. La funzione ***f: x∈ R → f(x) = m x + n*** è detta ***funzione affine***, ma in alcuni testi è chiamata ***funzione lineare***.

Proprietà

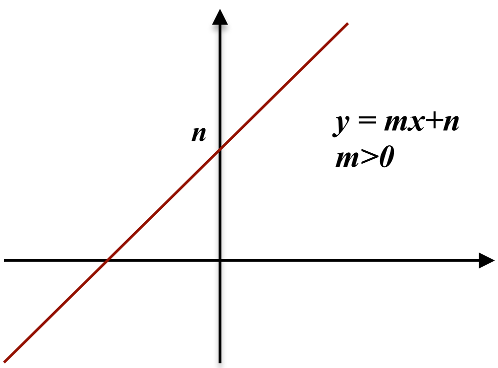
$$f(0) = n \quad e \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m \quad \forall x_1, x_2 \in R : x_1 \neq x_2$$

***f(hx+ky) = hf(x) +k f(y)  se  h+k = 1*** *proprietà di **affinità***

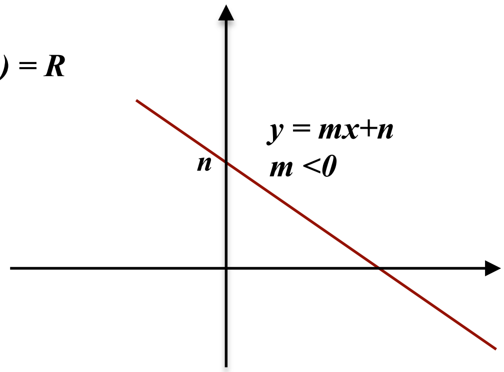
Dimostriamo la proprietà di affinità:

***f(hx+ky) = m(hx+ky)+ n = hmx+kmy + n( h+k) = hf(x)+hn + k*f(*y*)+*kn* =h (mx+n)+ k(my+n) =***
***= hf(x) +k*f(*y*).**

Il grafico della funzione affine è la retta di equazione ***y=mx+n,*** parallela alla retta passante per l'origine del riferimento e avente coefficiente angolare ***m***. Il numero ***n*** è detto ***ordinata all'origine***: è l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse delle ordinate




***Per m≠0 f (R) = R***
***inf f = -∞***
***sup f = +∞***



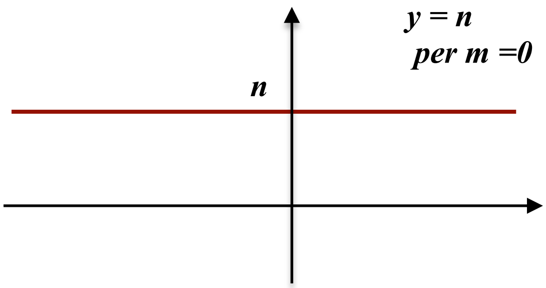

*Strettamente crescente per m >1*

*Strettamente decrescente per m <1*

***Per*** $\boxed{m\neq 0}$ ***: f (R) = R, inf f = -∞ sup f = +∞, f invertibile*** e per ogni **y∈ *R* è** $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{m}y - \frac{n}{m}$.

**Pertanto la funzione inversa di *f* è ancora una funzione laffine:** $f^{-1} : y \in R \to f^{-1}(y) = \frac{1}{m}y - \frac{n}{m}$

***Per*** $\boxed{m=0}$ **: f è la funzione costante "n" ;** allora ***f (R)* ={n}, *min f = sup f* =n.**




***f(R)* ={n}**

per *m*=0 *min f = max f =**n***

La funzione affine è una **funzione continua.**
**L'insieme delle funzioni affini include l'insieme delle funzioni lineari ( caso *n* = 0)**

**h) La funzione potenza di esponente naturale n ( e la funzione radice n-sima).**

Fissato il numero naturale $n$, la funzione

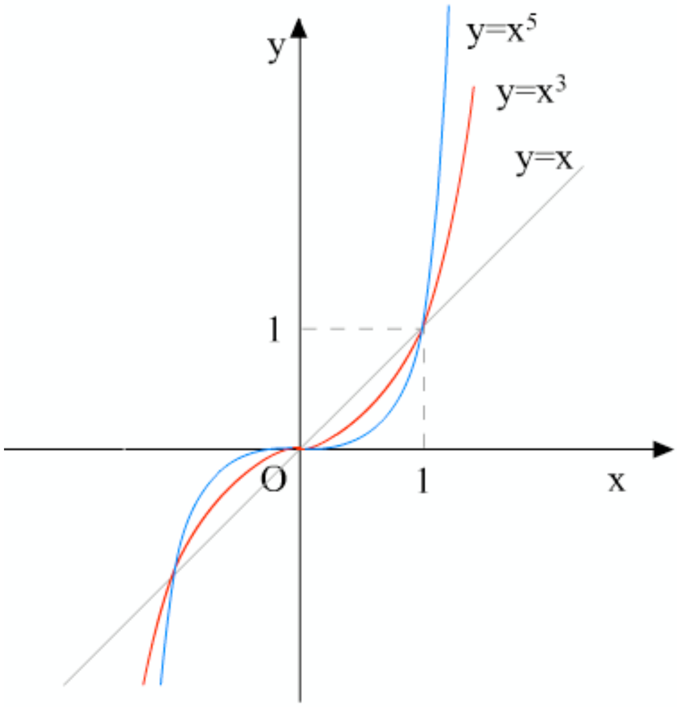
$$f: x \in R \rightarrow f(x) = x^{n} \qquad n \in \mathbf{N}$$

è detta ***funzione potenza di esponente n*** o ***funzione potenza n-esima:*** *la variabile indipendente x è la base della funzione potenza,* ***n*** *è l'esponente della funzione potenza ed è fissato* **.**

Il codominio, le proprietà e la tipologia di grafico dipendono da *n,* in particolare dall'essere *n* pari o dispari

- **h$_1$) n dispari** $f: x \in R \rightarrow f(x) = x^n \in \mathbf{R}$ applicazione di R **su** R

*caso particolare* ***n*=1 :** $f: x \in R \rightarrow f(x) = x \in \mathrm{R}$ applicazione identica




Grafici di $f(x) = x^n$ per n=1, 3, 5.
Funzioni dispari.

$f(R) = R$

$\inf f = \inf x^n = -\infty \quad \sup f = \sup x^n = +\infty$

$f$ ***funzione dispari:*** $f(-x) = (-x)^n = -x^n = f(x)$

Il grafico è simmetrico rispetto all'origine O(0, 0) e passa per i due punti **P(1,1)** e **P' (-1, -1)**

***f è strettamente crescente in R quindi invertibile***

***f è strettamente convessa in*** $[0, +\infty[$ ***f è strettamente concava in*** $]-\infty, 0]$

*f* è una **funzione continua**

**Funzione radice n-sima, n dispari come inversa di $f(x) = x^n$**

***La funzione potenza n-sima $f: x\in R \rightarrow f(x) = x^n \in \mathrm{R}$ per n dispari è invertibile.***

Allora

*ogni $y \in f(R)= R$ è immagine di un solo $x \in R$* indicato con ***$f^{1}(y)$ ( contro immagine di y)***

L'inversa $f^{1}$

$$f^{1}: y\in \mathrm{R}\rightarrow x = f^{1}(y) \in \mathrm{R}$$

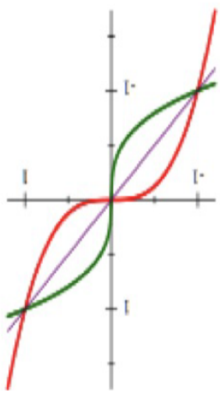
associa ad ogni $y \in f(R)= R$ l'unico $x$ di cui **y** è immagine, cioè l'unica a soluzione dell'equazione $y= f(x)$, cioè dell'equazione $y= x^n$. Poiché

$$y= x^n \Leftrightarrow x=\sqrt[n]{y} = f^{1}(y)$$

la funzione inversa è

$$f^{1}: y\in \mathrm{R}\rightarrow x = \sqrt[n]{y}\in \mathrm{R}$$

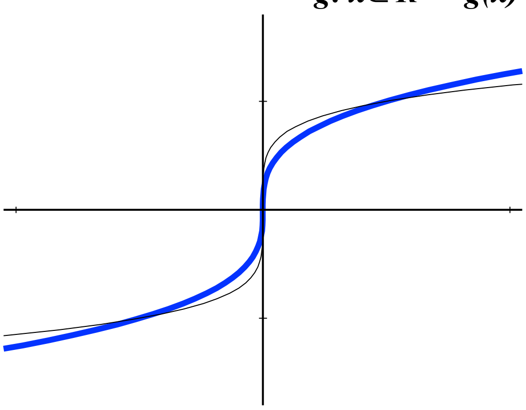
Essa è chiamata ***funzione radice n-sima, per n dispari*** ed è una applicazione ***strettamente crescente di R su R*** perché inversa di una funzione di R su R strettamente crescente; *il suo grafico è simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante*



$x^n$ rosso, $\sqrt[n]{x}$ verde

Con un cambio di denominazione delle variabili indichiamo tale funzione con

$$g: x\in R \rightarrow g(x) = \sqrt[n]{x} \in \mathrm{R}$$



**funzione radice n-sima, per n dispari**

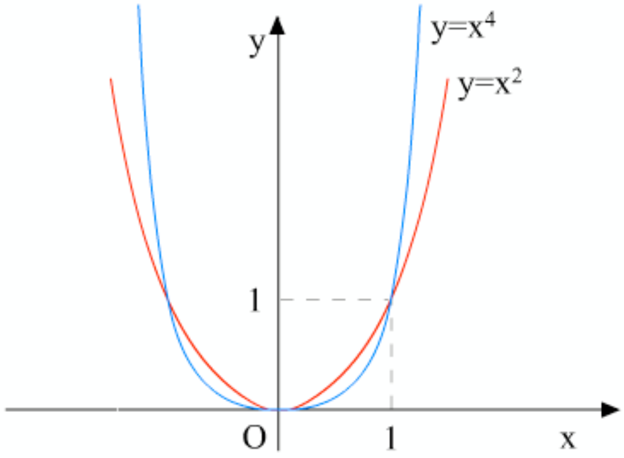
***g(R)= R***

***inf g = -∞ sup g = +∞***

***g strettamente crescente***
***g strettamente convessa in*** **]-** ∞, 0]
***g strettamente concava in*** [0, +∞[

***g*** è una **funzione continua**

- **h$_2$) n pari** *f: $x\in R \rightarrow f(x) = x^n \in [0, +\infty[$* applicazione di R su $[0, +\infty[$




Grafici di $f(x) = x^n$ per n=2, 4.
Funzioni pari.

*f(R)*= $[0, +\infty[$
*min f =min* $x^n = 0$ *sup f = sup* $x^n = +\infty$

*0 punto di minimo*

***f è una funzione pari:*** $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$ ***quindi f non è invertibile***

Il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate

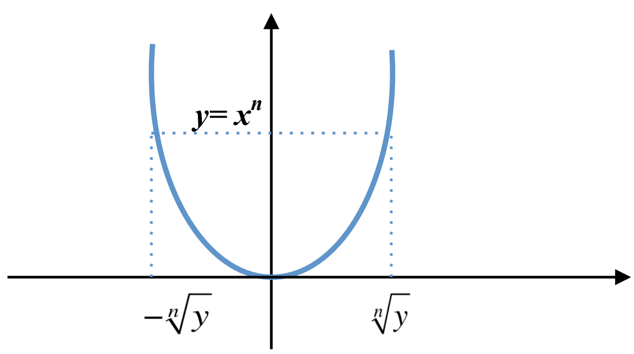
***f è strettamente crescente in*** $[0, +\infty[$

***f è strettamente decrescente in*** $]-\infty, 0]$

***f strett. convessa:***
$$\left((1-t)x_1 + tx_2\right)^n < (1-t)x_1^n + tx_2^n \quad \forall t \in ]0,1[$$

*f* è una **funzione continua**

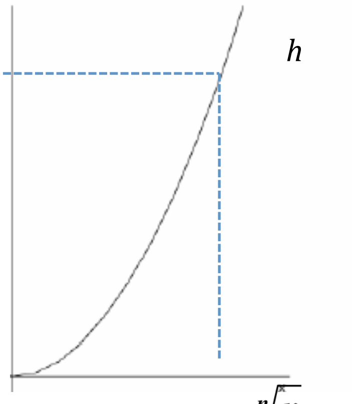
Nota: per ***n*** pari, ***y= f(x) cioè y= x^n***, ha per ***y*>0**, due soluzioni: $x = \sqrt[n]{y} > 0$ e $x = -\sqrt[n]{y} < 0$.



**Funzione radice n-sima, *n pari*, come inversa della restrizione di $f(x) = x^n$ a $[0, +\infty[$**

La funzione potenza per n pari non è invertibile. Se però si considera la sua restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$, si ottiene una funzione strettamente crescente e quindi invertibile

$h: x \in [0, +\infty[ \rightarrow h(x) = x^n \in [0, +\infty[$ $\quad$ **$h = f_{[0,+\infty[}$ restrizione di f a $[0, +\infty[$**




***h* *applicazione stretta mente crescente di* $[0, +\infty[$ su $[0, +\infty[$**

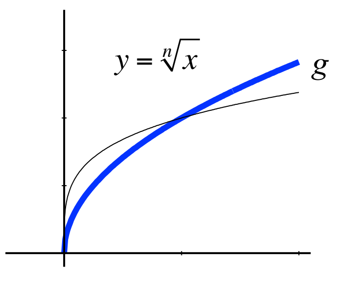
*La controimmagine* $h^{-1}(y)$ *di* $y \in [0, +\infty[$ *mediante la restrizione* ***h*** *è la soluzione non negativa di* $y = x^n$, *cioè* $x = \sqrt[n]{y}$

La funzione inversa di *h* è la funzione:

$$h^{-1}: y \in [0, +\infty[ \rightarrow x = \sqrt[n]{y} \in [0, +\infty[$$

detta *funzione radice n-sima* per n pari. Essa è una applicazione stretta mente crescente di $[0, +\infty[$ ***su*** $[0, +\infty[$

Con un cambio di denominazione delle variabili indichiamo tale funzione con




$g: x \in [0, +\infty[ \rightarrow g(x) = \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty[$ **funzione radice n-sima n pari**

$g( [0, +\infty[) = 0, +\infty[$

*min g = 0* $\quad$ *sup g = +∞*

***g strettamente crescente***
***g strettamente concava***
***g*** è una **funzione continua**

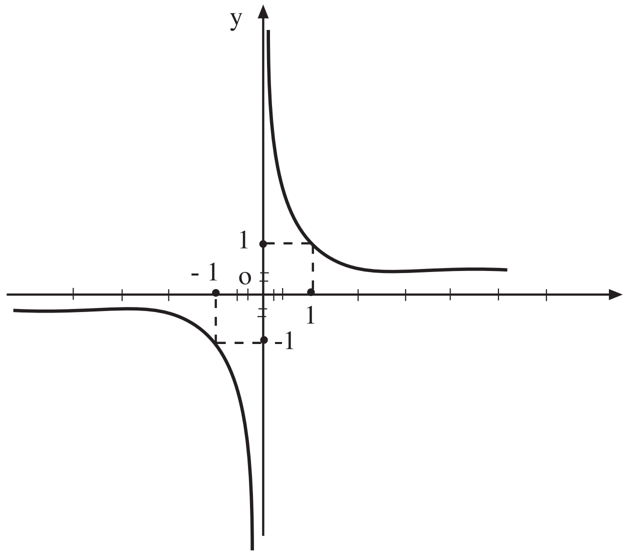
**i) La funzione potenza di esponente intero negativo z= - n**

Sia $z = -n$, con $n \in$ **N.** Si pone $x^z = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ per ogni numero reale $x \neq 0$. Poiché la potenza $x^z$ ha senso solo se la base è non nulla, la funzione potenza di esponente z ha per dominio **R- {0}**

$$f: x \in R - \{0\} \rightarrow f(x) = x^z = x^{-n}$$

le proprietà della funzione dipendono dalla scelta di n, in particolare dall'essere n dispari o pari

- **$i_1$) n dispari** $\quad f: x \in R - \{0\} \rightarrow f(x) = x^{-n}]0, +\infty[ = \frac{1}{x^n} \in R - \{0\}$




$f(R - \{0\}) = R - \{0\}$

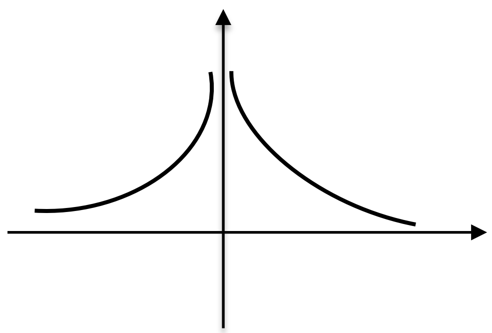
$\inf f = \inf x^{-n} = -\infty \quad \sup f = \sup x^{-n} = +\infty$

*funzione dispari:* $f(-x) = (-x)^{-n} = -x^{-n} = f(x)$

Il grafico è simmetrico rispetto all'origine O(0, 0) e passa per i due punti **P(1,1)** e **P' (-1, -1)**

***f invertibile***
***f strettamente decrescente e strettamente concava in*** **]-** ∞, 0]
***f strettamente decrescente e strettamente convessa in*** ]0, +∞[
***f*** è una **funzione continua**

- **$i_2$) n pari** $\quad f: x \in R - \{0\} \rightarrow f(x) = x^n \in ]0, +\infty[$



$f(R - \{0\}) = ]0, +\infty[$

$\inf f = \inf x^{-n} = 0 \quad \sup f = \sup x^{-n} = +\infty$

***funzione pari:***
$f(-x) = (-x)^{-n} = x^{-n} = f(x)$

***f non invertibile***

Il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate

***f strettamente crescente***
***e strettamente convessa in*** **]-** ∞, 0[

***f strettamente decrescente e strettamente convessa in*** ]0, +∞[

***f*** è una **funzione continua**

***l*) La funzione potenza con esponente non intero α**

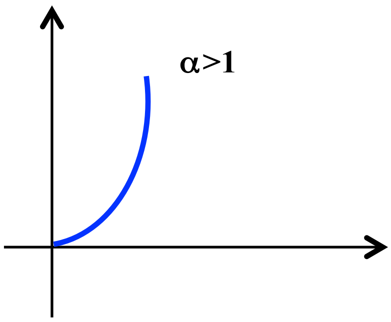
Ricordiamo che se **α** è un numero reale non intero $x^\alpha$ ha significato per ogni $x \geq 0$ se **α** è positivo **,** ha significato per **x> 0 se α** è negativo**.** Pertanto il dominio e il codominio della **funzione potenza di esponente α**

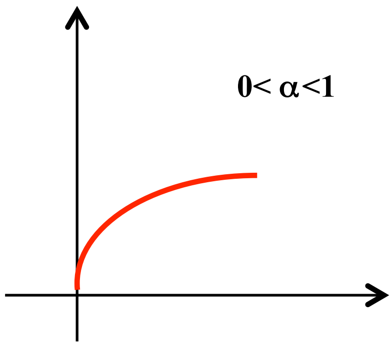
$$f: x \to f(x) = x^\alpha$$

dipendono dal segno di **α**

$\boxed{\alpha>0}$ $f: x \in [0, +\infty[ \to f(x) = x^\alpha \in [0, +\infty[$ $\quad f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$

***f*** **è funzione strettamente crescente di [0, +∞[ su [0, +∞[**
***f*** è una **funzione continua**



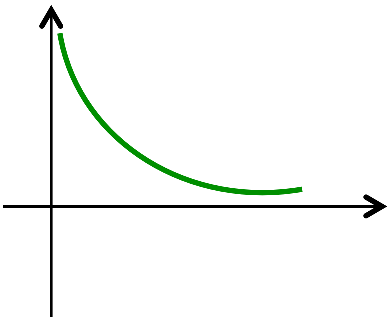




***f strett. convessa*** se **α>1** ***f strett. concava*** se **0<α<1**

$\boxed{\alpha<0}$

$f: x \in ]0, +\infty[ \to f(x) = x^\alpha \in ]0, +\infty[$ $\quad f(]0, +\infty[) = ]0, +\infty[$

***f*** **è funzione strettamente decrescente di ]0, +∞[ su ]0, +∞[**
**f è strettamente convessa**
***f*** è una **funzione continua**



***m)* La funzione esponenziale di base *$a>0$ e $a\neq 1$***

Se è $a>0$, $a^x$ ha significato per ogni valore reale dell'esponente $x$ ed è un numero positivo. Allora ***la funzione $x\to a^x$ ha per dominio tutto $R$ e i suoi valori $a^x$ sono numeri positivi.***

In particolare se $a = 1$, è $a^x = 1$ per ogni *$x$ reale* e allora la funzione $x\in\mathbf{R}\to a^x = 1^x = 1$ è la funzione costante **1.**

A ssumiamo $a>0$ e $a\neq 1$. La funzione

$$f:\ x\in\mathbf{R}\to a^x\in\ ]0,+\infty[$$

è detta **funzione esponenziale di base *a;*** essa ha per dominio $R$ e per codominio $]0,+\infty[$:

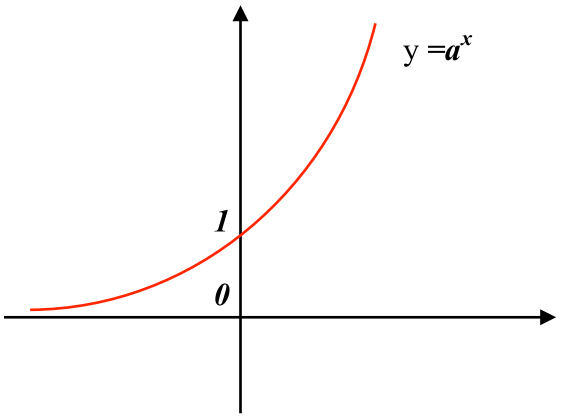
$f(\mathbf{R}) = f([0,+\infty[)$, $\qquad \inf f = \inf a^x = 0 \qquad \sup f = \sup a^x = +\infty$

**Proprietà della funzione esponenziale indipendenti dalla scelta della base**

1. $f_a(0) = 1$ $\qquad (a^0=1)$
2. $f_a(1) = a$ $\qquad (a^1=a)$
3. $f_a(x+y) = f_a(x)\cdot f_a(y)$ $\qquad (a^{x+y}= a^x\, a^y)$
4. $f_a(x-y) = f_a(x)/\ f_a(y)$ $\qquad (a^{x-y}= a^x/\, a^y)$

Le proprietà di monotonia della funzione dipendono dall'essere $a>1$ o $0<a<1$.

***1°* caso : *base*** $\boxed{a>1}$



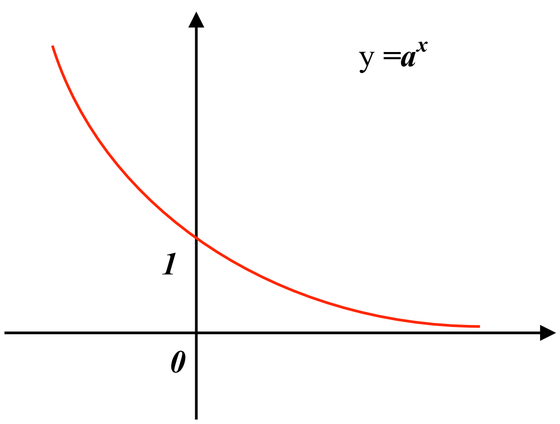

***funzione strettamente crescente di R su* ]0, +∞[:**

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

***funzione strettamente convessa***

**funzione continua**

***2°* caso : *base*** $\boxed{0<a<1}$




***funzione strettamente decrescente di R su* ]0, +∞[:**

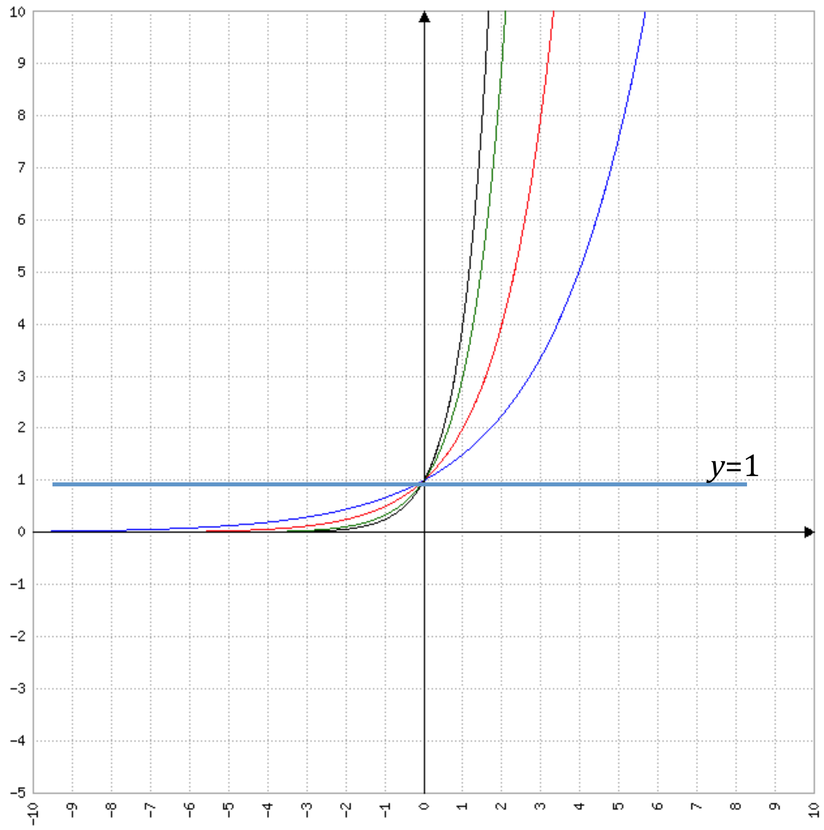
$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

***funzione strettamente convessa***

***f* funzione continua**

## Come cambia il grafico al variare della base *a* in ]1, +∞[

$f(x)=(4/3)^x$; $g(x)=2^x$; $h(x)=3^x$; $i(x)=4^x$



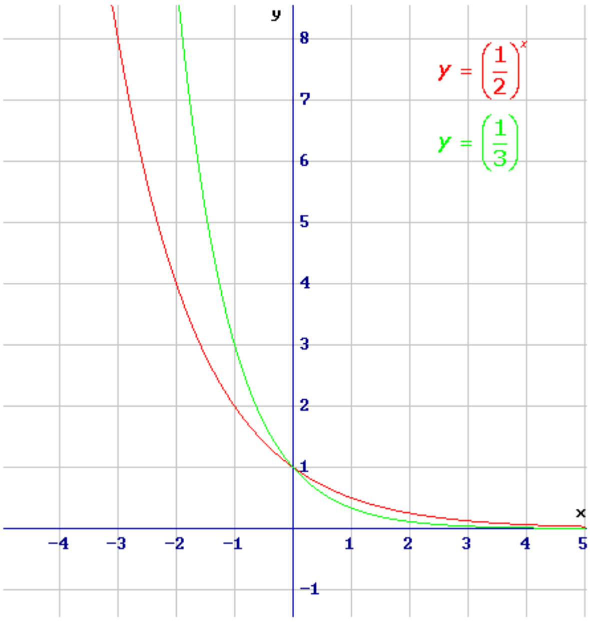

*Al crescere della base a il grafico della funzione esponenziale si distacca dalla retta y=1 e cresce più rapidamente in [0, +∞[, mentre in ]-∞, 0] cresce meno rapidamente e si avvicina sempre di più all'asse delle ascisse*

| x | $Y=2^X$ | $Y=3^X$ |
|---|---|---|
| -5 | 0,03125 | 0,004115226 |
| -4 | 0,0625 | 0,012345679 |
| -3 | 0,125 | 0,037037037 |
| -2 | 0,25 | 0,111111111 |
| -1 | 0,5 | 0,333333333 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 4 | 9 |
| 3 | 8 | 27 |
| 4 | 16 | 81 |
| 5 | 32 | 243 |
| 6 | 64 | 729 |
| 7 | 128 | 2187 |
| 8 | 256 | 6561 |
| 9 | 512 | 19683 |
| 10 | 1024 | 59049 |

## Come cambia il grafico al variare della base *a* in ]0, 1[ ?

Confrontiamo i grafici delle funzioni esponenziali di base 1/2 e di base 1/3

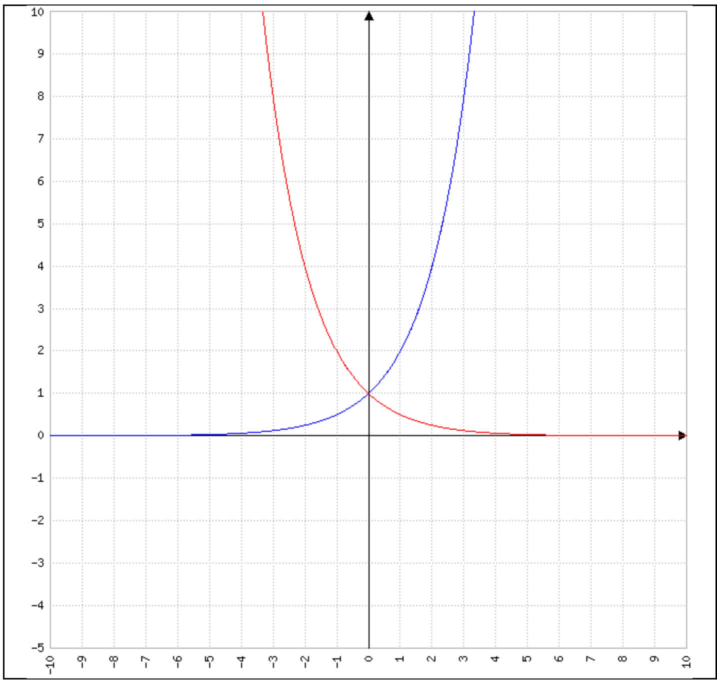
$$f:\ x\in\mathbf{R}\rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad e \qquad g:\ x\in\mathbf{R}\rightarrow g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

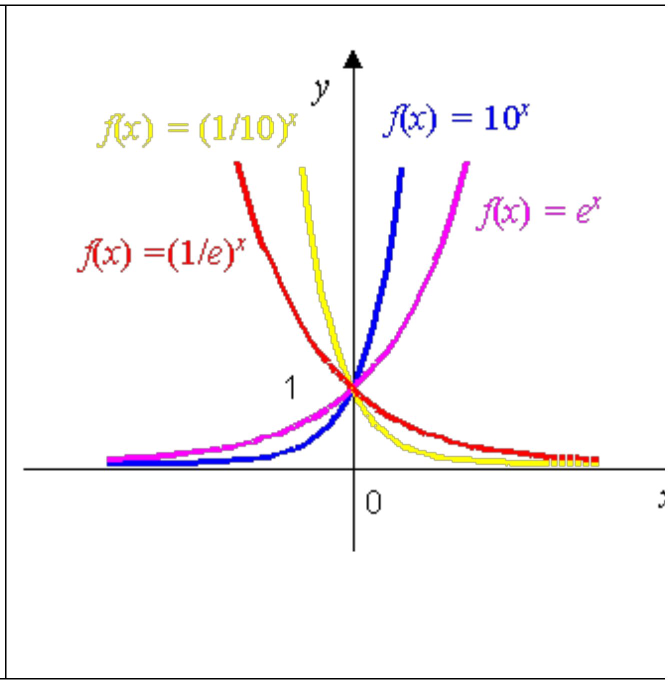



Al decrescere della base ***a*** il grafico della funzio esponenziale si distacca dalla retta y=1 diventando più ripido in ]-∞, 0], mentre in [0,+ ∞] e si avvicina sempre di più all'asse delle ascisse

| x | $Y=(1/2)^X$ | $Y=(1/3)^X$ |
|---|---|---|
| -5 | 32 | 243,00 |
| -4 | 16 | 81,000 |
| -3 | 8 | 27,0000 |
| -2 | 4 | 9,0000 |
| -1 | 2 | 3,00000 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0,5 | 0,333333 |
| 2 | 0,25 | 0,1111111 |
| 3 | 0,125 | 0,037037037 |
| 4 | 0,0625 | 0,01234567 |
| 5 | 0,03125 | 0,0041152 |
| 6 | 0,015625 | 0,0013717 |
| 7 | 0,0078125 | 0,0004572 |
| 8 | 0,00390625 | 0,0001524 |

**Relazione tra i grafici di** $f: x \in \mathbb{R} \to a^x \in \,]0, +\infty[$ **e** $g: x \in \mathbb{R} \to (1/a)^x \in \,]0, +\infty$é






$f(x)= (2)^x$ $g(x)= (1/2)^x$

**I due grafici sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse delle ordinate:**

Infatti: $g(-x) =(1/a)^{-x} = a^x = f(x)$

## $m_1$) Invertibilità della funzione esponenziale e definizione di logaritmo "$\log_a y$" *per $y>0$*

La funzione esponenziale

$$f:\ x\in\mathbf{R}\rightarrow a^x\in\ ]0,+\infty[ \qquad a>0\ \ e\ a\neq 1$$

è strettamente monotona e quindi **invertibile:**

$$\forall y\in]0,+\infty[=f(R)\quad \exists\,|\,x\in R:\quad y=a^x$$

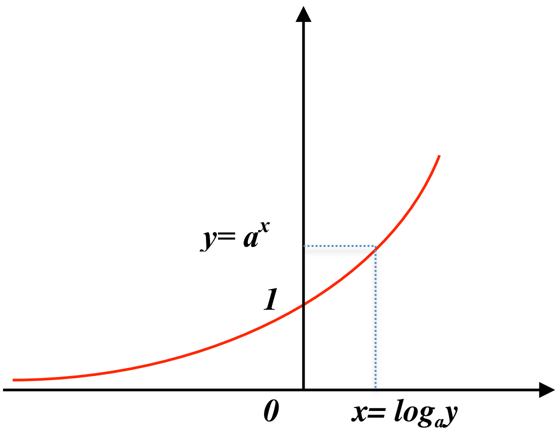
*in altre parole:*

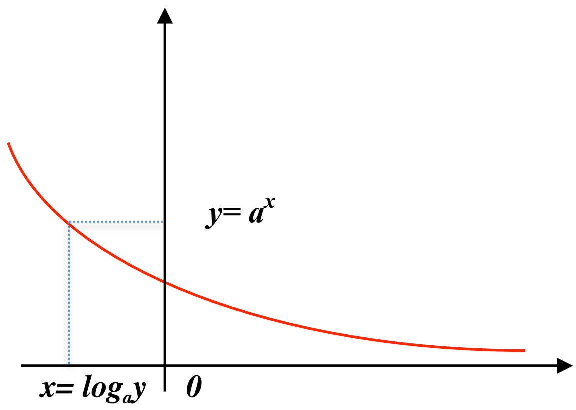
$$\forall y\in]0,+\infty[=f(R)\quad \textit{esiste una sola soluzione di } y=a^x$$

***Per ogni numero positivo y, la soluzione*** *dell'****equazione*** $a^x = y$ ***è il numero*** $x = f^{-1}(y)$ ***di cui y è immagine***

*Si conviene di indicare tale soluzione con il simbolo "* ***$\log_a y$" detto " logaritmo in base a di y "***

$$f^{-1}(y)=\log_a y$$




Perciò :

$$y>0\ \ e\ \ y=a^x \Leftrightarrow y>0\ \ e\ \ x=\log_a y$$

**Esempi*:***

- $3^x = 9$ ha per soluzione **2 ,** poniamo allora $2 = \log_3 9$;
- $2^x = 1/8$ ha per soluzione **-3, ,** poniamo allora $-3 = \log_2 (1/8)$;
- $7^x = 5$ ha una sola soluzione e la indichiamo con $\log_7 5$

### DUE MODI EQUIVALENTI DI LEGGERE IL $\log_a y$

**Sia $a>0$ e $a\neq 1$ e y>0.** Per definizione di logaritmo**:**

**1.** ***$\log_a y$, è la soluzione x*** **dell'equazione esponenziale** $a^x = y$ ;

**2.** ***$\log_a y$, è l'esponente x*** **che occorre dare alla base** ***a*** **per avere il numero** ***y***

**Esempi*:***

*1°. $\log_3 27$ è la soluzione dell'equazione esponenziale $3^x = 27$ e quindi vale 3: $\log_3 27 = 3$ ;*

*2°. $\log_3 27$ è l'esponente da dare alla base 3 per avere l'argomento 27 quindi: $\log_3 27 = 3$.*

**Dalla 2.:**

$$\boxed{a^{\log_a b} = b \ \ \forall b > 0, \qquad \log_a a^b = b \ \ \forall b \in R} \qquad \textbf{(1)}$$

**Alcuni valori fondamentali del logaritmo, non dipendenti dalla base *a:***

$$\begin{aligned} &log_a 1 = 0 \ \ \forall a \in ]0,1[\cup]1,+\infty[ \\ &log_a a = 1 \ \ \forall a \in ]0,1[\cup]1,+\infty[ \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

**Proprietà del logaritmo:**

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall x > 0 \quad e \quad \forall y > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \forall x > 0 \quad e \quad \forall y > 0$$

$$\log_a x^b = b \log_a x \qquad \forall x > 0 \quad e \quad \forall b \in R$$

**Esempi** ***di applicazione delle proprietà nel calocolo del logaritmo:***

$$\log_2 128 = \log_2 \left(4 \cdot 32\right) = \log_2 4 + og_2 32 = 2 + 5 = 7$$

$$\log_2 \frac{1}{128} = \log_2 1 - \log_2 128 = 0 - 7 = 7$$

**Formula per il cambiamento di base del logaritmo**

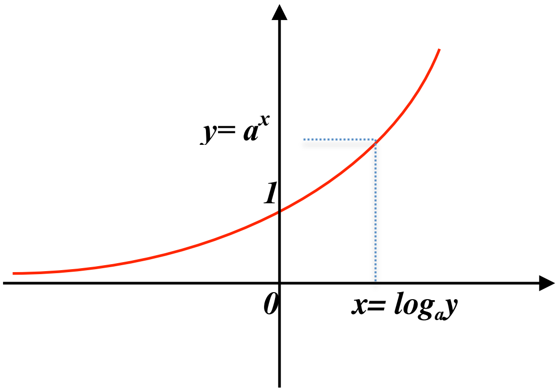
$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \forall x > 0 \quad e \quad \forall b > 0 \ \ e \ \ b \neq 1}$$

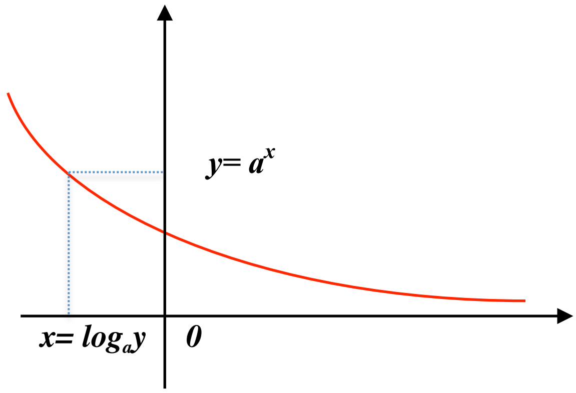
**Esempio** ***di applicazione :***

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$$

***$m_2$*) Inversa della funzione esponenziale**

La funzione esponenziale ***f*:** $x \in R \to a^x \in \,]0, +\infty[$ *è strettamente monotona e quindi invertibile*;




l'inversa è la funzione

$$f^{-1}:\ y \in ]0, +\infty[ \to x \in \mathbf{R} : a^x = y \quad \textbf{cioè} \qquad f^{-1}:\ y \in ]0, +\infty[ \to \log_a y \in \mathbf{R}$$

che è chiamata funzione logaritmo di base ***a***.

***n)* La funzione logaritmo di base *a >0 e a≠1*.**

La **funzione logaritmo** di base ***a >0 e a≠1*** è la funzione

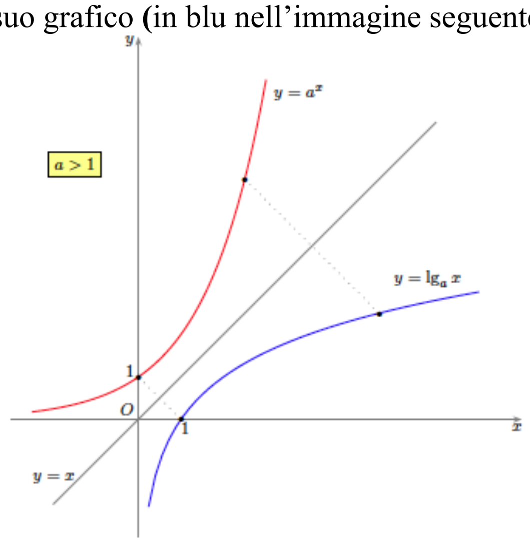
$$g:\ x \in ]0, +\infty[ \to \log_a x \in \mathbf{R},$$

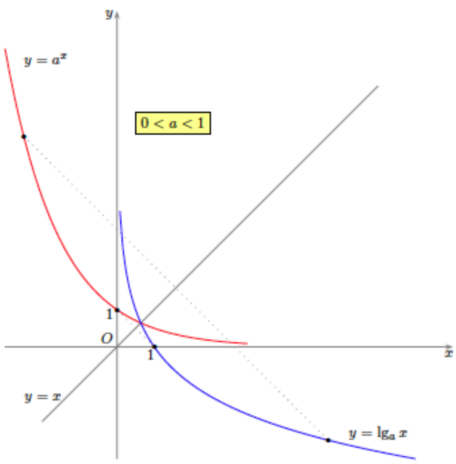
inversa della funzione esponenziale: il grafico *è il simmetrico del grafico della funzione esponenziale rispetto alla bisettrice y=x del 1° e 3° quadrante e passa per il punto* **(1, 0)**

***g* è una applicazione di ]0, +∞[ su R,**

$g(\in ]0, +\infty[) = \mathbf{R}$, $\qquad -\infty = \inf_{x \in ]0,+\infty[} \log_a x, \quad +\infty = \sup_{x \in ]0,+\infty[} \log_a x$

Il suo grafico (in blu nell'immagine seguente )



**La funzione logaritmo eredita le proprietà di monotonia della funzione esponenziale, di cui è l'inversa, quindi è**

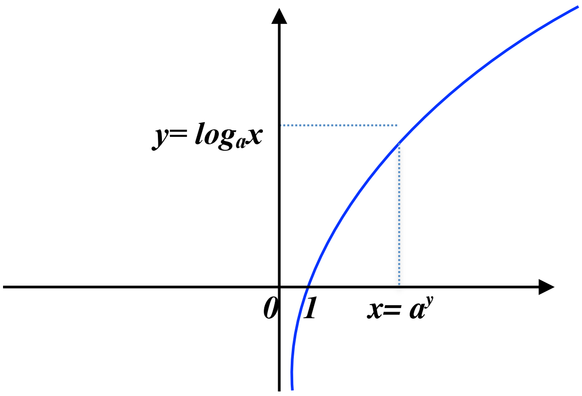
**"una applicazione** *di* **]0, +∞[ su R**

**strettamente crescente se $a$>1,**

**strettamente decrescente se $a$<1."**

Per la **(3),** indipendentemente dalla base ***a*, è :** ***g(1)*** **= 0** **e** ***g(a)*** **=** ***a***

**1°caso:** ***base*** $\boxed{a > 1}$




*funzione strett. crescente*

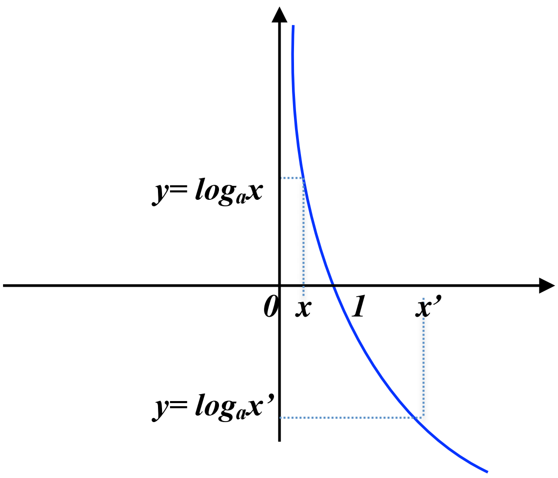
*funzione strett. concava*

**funzione continua**

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$$

**1°caso:** ***base*** $\boxed{0 < a < 1}$




*funzione strett. decrescente*

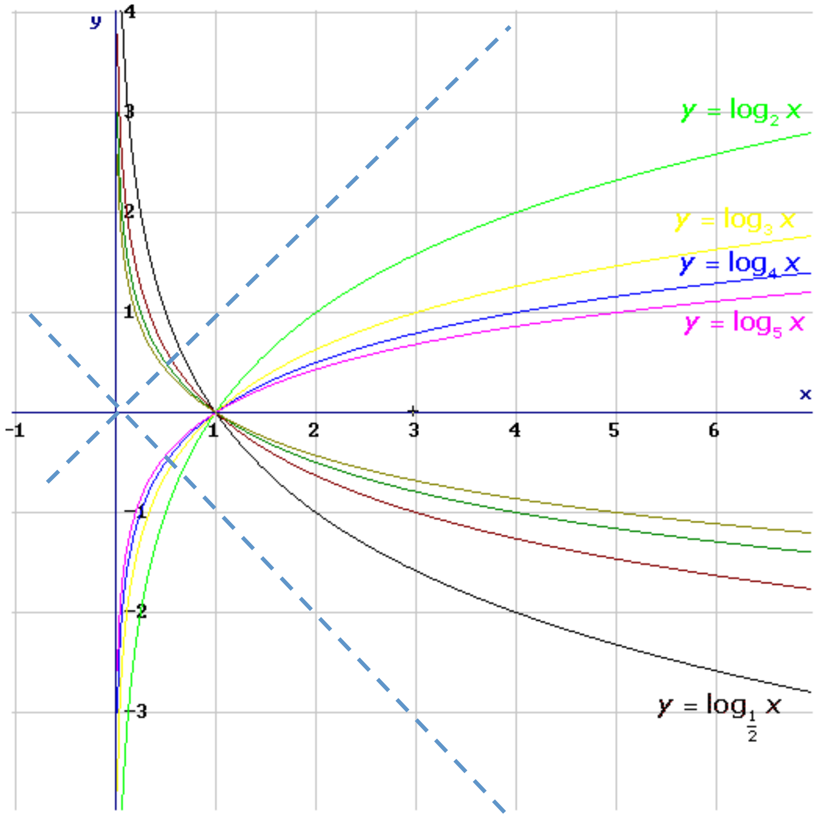
*funzione strett. convessa*

**funzione continua**

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$$

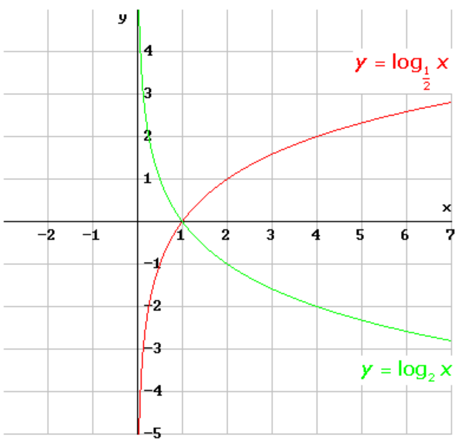
## Come varia il grafico al variare della base *a*




Se $a > 1$: il grafico, che cade nel 1° e 4° quadrante, è al di sotto della retta $y=x$ e al crescere della base $a$ il grafico della funzione logaritmo cresce meno rapidamente in [1, +∞[ allontanandosi dalla bisettrice $y = x$, mentre in ]0, 1] cresce più rapidamente e si avvicina sempre di più all'asse delle ordinate

Se $0 < a < 1$: il grafico, che cade nel 1° e 4° quadrante, è al di sopra della retta y= -x e al decrescere della base a il grafico della funzione logaritmo decresce meno rapidamente in [1, +∞[ allontanandosi dalla retta y = - x e decresce più rapidamente in ]0, 1], avvicinandosi sempre di più all'asse delle ordinate

**Relazione tra i grafici di** $f: x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = \log_a x \in ]0, +\infty[$ **e** $g: x \in \mathbb{R} \rightarrow g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x \in ]0, +\infty[$




**I due grafici sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse delle ordinate**

Infatti

$$g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = -\log_a x = -f(x)$$