

## 44. Teorema della media.

### Teorema della media

Sia  $f(x)$  una funzione definita e continua in  $[a,b]$ .



$$\exists x_0 \in [a,b]: \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$$

Dim: se  $f(x)$  è una funzione definita e continua in  $[a,b]$  chiuso e limitato, allora per il teorema di Weierstrass  $f$  è dotata in  $[a,b]$  di minimo  $m$  e di massimo  $M$

In particolare, in tali ipotesi, per il teorema dei valori intermedi, la funzione  $f$  assume tutti i valori compresi tra il minimo  $m$  ed il massimo  $M$



$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$



Integrando i tre membri della disuguaglianza

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

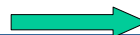


Dividendo per  $(b-a)$  i tre membri della disequazione

Valore compreso tra il minimo ed il massimo

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} \leq M$$

Ma per il teorema dei valori intermedi, la  $f$  assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo



$$\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)}$$



$$\exists x_0 \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b-a)$$

## La media di una funzione

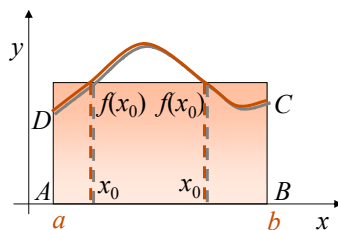
Sia  $f(x)$  una funzione definita e continua in  $[a, b]$ .

La media di  $f$  nell'intervallo  $[a, b]$  è il valore

$$\bar{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$$

## Teorema della media integrale: interpretazione geometrica

Da un punto di vista geometrico, possiamo affermare che esiste sempre un rettangolo di base pari all'ampiezza dell'intervallo  $[a,b]$  e altezza uguale a  $f(x_0)$  avente la stessa area del rettangoloide relativo alla funzione  $f$ .



44. Teorema della media

### Esercizio: Coltura di batteri

La numerosità di una coltura di batteri varia con la legge  $N(t)=10^6 e^{t/2}$  (con  $t$  ore)

Determinare la numerosità media nell'intervallo  $[0,10]$

$$\bar{N} = \frac{\int_a^b N(t) dt}{(b-a)}$$

Si ha

$$\bar{N} = \frac{1}{10} \int_0^{10} 10^6 e^{t/2} dt = \frac{1}{10} 10^6 2e^{t/2} \Big|_0^{10} = 10^5 (2e^5 - 2) \approx 3 \cdot 10^7$$

44. Teorema della media