CAPITOLO 3
INCERTEZZA DI MISURA

Le operazioni di misurazione sono tutte inevitabilmente affette da ***incertezza*** e cioè da un “grado di indeterminazione” con il quale il processo di misurazione ottiene il risultato. Essa produce un intervallo di valori in cui il valore vero del misurando è presente con una certa probabilità.

L’incertezza di misura è definita da norme internazionali recepite dagli istituti di normazione nazionali.
In Italia l’Ente di riferimento è l’*Ente Nazionale di Normazione* (UNI) che ha approvato la norma **“Guida all’espressione dell’incertezza di misura”, UNI CEI 9, Milano, giugno 1997** (traduzione italiana della ISO “*Guide to the expression of uncertainty in measurement*”), alla quale ogni certificazione di misura deve attenersi.
Secondo la stessa norma, le parole “errore”, “accuratezza” e “misura” non possono più essere usate nella vecchia accezione, precedente, cioè, a tale pubblicazione. Molti testi correnti non sono stati ancora aggiornati, e per cui riportano ancora la classica distinzione tra “accuratezza” e “precisione”, oggi rifiutata.

La parola *incertezza* sostituisce la parola *errore*.
Secondo l’accezione antecedente la norma UNI CEI 9:

- l’*accuratezza* è una grandezza che riguarda l’*incertezza sistematica* e dipende dalla *taratura* e dalla *classe* dello strumento; il suo valore è tanto maggiore quanto minore è lo scarto delle osservazioni fatte con lo strumento in esame rispetto a quelle dello strumento accettato come strumento di riferimento e sito in un laboratorio metrologico accreditato o centro SIT;
- la *precisione* è una grandezza che riguarda la *ripetibilità* delle osservazioni; dipende da incertezze casuali ed è rappresentata dalla deviazione standard (o scarto tipo) valutata sulla base di un insieme sufficientemente ampio di *osservazioni*.

Nella norma UNI CEI 9:

- la *precisione* è sostituita da *incertezza di tipo A*;
- la parola *accuratezza* ha solo valore qualitativo ed esprime il grado di concordanza tra il risultato di una misurazione e un valore vero del misurando;

- l'*errore di misura* è la differenza tra il risultato di una misurazione e il valore vero del misurando.

Nella norma UNI CEI 9 la parola "misura" viene sostituita dalla locuzione "*stima del misurando*" ed appare solo nelle espressioni "*incertezza di misura*" e "*errore di misura*".

Classificazione dei contributi all'incertezza

La raccomandazione INC-1 (1980) raggruppa le componenti dell'incertezza del risultato di una misurazione in due categorie a seconda del metodo di valutazione con cui si stima il misurando; esse sono:

tipo A
quelle valutate per mezzo di metodi statistici; per queste componenti si applica il metodo di valutazione (dell'incertezza) di categoria A.
tipo B
quelle valutate per mezzo di metodi diversi da quelli statistici; per queste componenti si applica il metodo di valutazione (dell'incertezza) di categoria B.

Elementi per l'analisi mediante metodi statistici

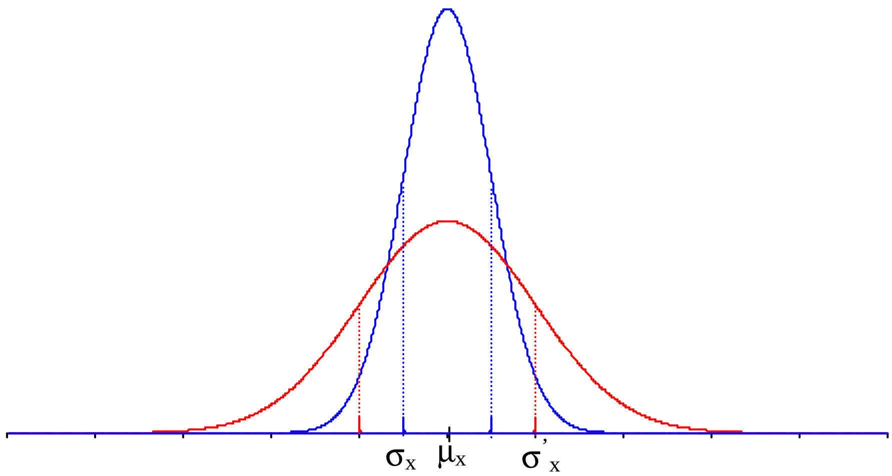
La *speranza matematica*, o *valore atteso*, di una variabile aleatoria continua *X*, con funzione *densità di probabilità* f_X, è data da:

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \tag{3.1}$$

La *varianza* di una variabile aleatoria *X* è il valore atteso del suo scostamento quadratico rispetto alla media; formalmente è definita come:

$$s_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2\, f_X(x)\, dx \tag{3.2}$$

La radice quadrata positiva della varianza, indicata con σ_X e denominata *scarto tipo*, fornisce la dispersione dei risultati intorno alla media. La figura 3.1 riporta un esempio di distribuzione, la distribuzione gaussiana, per due valori diversi dello scarto tipo.



- figura 3.1 -

Per variabili aleatorie discrete, per le quali non è nota la funzione densità di probabilità, non è possibile usare le definizioni formali precedenti per la determinazione della media e varianza statistica. È possibile, però, utilizzare degli stimatori per la loro caratterizzazione.

Siano, pertanto, $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{iN}$ N osservazioni di una variabile aleatoria discreta X_i.
La stima statistica della speranza matematica μ_X e della varianza σ^2_X, sono rispettivamente date dalle seguenti relazioni:

$$\overline{X}_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{ik} \qquad (3.3)$$

$$s^2\left(X_i\right) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(X_{ik} - \overline{X}_i\right)^2 \qquad (3.4)$$

Dunque, nel caso di una misurazione ben caratterizzata e sotto controllo statistico, $x_i = \overline{X_i}$ è la *media aritmetica* delle N osservazioni indipendenti valutate nelle stesse condizioni sperimentali, ed è uno stimatore della media, mentre $s_i^2 = s^2\left(X_i\right)$ è la *varianza sperimentale* delle osservazioni ed è uno stimatore della varianza.

La radice quadrata positiva della varianza sperimentale è detta *scarto tipo sperimentale*, e, al pari dello scarto tipo, caratterizza la variabilità dei valori osservati X_i o, più specificatamente, la loro dispersione intorno alla media x_i.

Se è noto il valore atteso μ_X di X, la varianza può essere stimata da:

$$s^2(X) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(X_k - m_X\right)^2 \tag{3.5}$$

Rappresentazione delle componenti dell'incertezza

Incertezza standard

L'incertezza, comunque valutata, è rappresentata da una deviazione standard stimata, detta ***incertezza standard*** e indicata col simbolo u_i, e uguale alla radice quadrata positiva della stima della varianza u_i^2.

Incertezza standard: tipo A

L'incertezza, u_i, ottenuta mediante valutazione di tipo A è rappresentata dalla deviazione standard sperimentale s_i, pari alla radice quadrata positiva della varianza sperimentale s_i^2, e dal relativo numero di gradi di libertà ν_i. In particolare, si ha $u_i = s_i$.
I gradi di libertà ν_i costituiscono un indice della qualità della stima dell'incertezza u_i, quantificandone l'attendibilità. Fissato in n il numero di osservazioni, risulta $\nu_i = n-1$.

Incertezza standard: tipo B

L'incertezza ottenuta mediante valutazione di tipo B è espressa da una quantità u_j che rappresenta la deviazione standard di una distribuzione di probabilità assunta come quella che meglio contempla le informazioni possedute sul misurando.

Valutazione dell'incertezza di categoria A

Siano $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}$ n misurazioni indipendenti della grandezza aleatoria X_i eseguite nelle stesse condizioni sperimentali.
È possibile esprimere il valore rappresentativo del misurando secondo una delle due metodologie:

1. si eseguono n misurazioni, si valuta la varianza sperimentale, si esegue una ulteriore misura, che fornirà il valore rappresentativo del misurando, e si esprime l'incertezza come la radice quadrata positiva della varianza delle singole osservazioni;

2. si eseguono n misurazioni, si valuta la media aritmetica e la varianza sperimentale della media: la media fornirà il valore rappresentativo del misurando e l'incertezza sarà data dalla radice quadrata positiva di detta varianza.

Nel primo caso, la radice quadrata positiva della varianza sperimentale delle osservazioni, indicata con *s* e denominata *scarto tipo sperimentale*, fornisce l'*incertezza tipo* da associare alla stima del valore del misurando:

$$u = \sqrt{s^2} \tag{3.6}$$

Se si sceglie, invece, di rappresentare il misurando mediante la media aritmetica, la valutazione quantitativa appropriata dell'incertezza del risultato è la *varianza della media delle osservazioni*, e non la varianza delle singole osservazioni.
Infatti, poiché la media di una serie di variabili aleatorie è ancora una variabile aleatoria, la varianza della media aritmetica, come si dimostra, è, al crescere di n, la miglior stima della varianza.
La varianza della media, che è la migliore stima di

$$s_{\bar{X}}^2 = \frac{s^2}{n} \tag{3.7}$$

è data da:

$$s_{\bar{X}_i}^2 = \frac{s_i^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \left(X_{ik} - \bar{X}_i \right)^2 \tag{3.8}$$

in questo caso l'incertezza tipo è data da:

$$u = \sqrt{s_{\bar{X}}^2} \tag{3.9}$$

Valutazione dell'incertezza di categoria B

La valutazione dell'incertezza di categoria B si basa, normalmente, su formulazioni derivanti dall'uso di tutte le informazioni rilevanti possibili, che includono:

- dati di precedenti misurazioni;
- esperienza o conoscenza generale del comportamento e delle proprietà dei materiali e strumenti di interesse;
- specifiche tecniche del costruttore;
- dati forniti in certificati di taratura o rapporti simili;
- incertezze assegnate a valori di riferimento presi da manuali.

Le informazioni a disposizione per la valutazione dell'incertezza di categoria B richiedono capacità di interpretazione basata sull'esperienza, ed una competenza acquisita con la pratica.
Si osservi che un tale approccio di valutazione dell'incertezza è da preferirsi a quello precedente qualora ci si trovi in presenza di un numero relativamente ridotto di osservazioni indipendenti.
Se facendo riferimento alle specifiche del costruttore dello strumento che fornisce le stime delle grandezze di ingresso, o al suo certificato di taratura, o ad altra simile fonte, si ricava come informazione un multiplo di uno scarto tipo, allora l'incertezza tipo, $u(x_i)$, è pari al valore dichiarato diviso il moltiplicatore, e la varianza stimata $u^2(x_i)$ è pari al quadrato di tale rapporto.

Può, inoltre, presentarsi il caso in cui l'informazione a disposizione è un intervallo di confidenza all'interno del quale il valore delle grandezze di ingresso può essere contenuto con un certo livello di fiducia (ad esempio, 95% o 99%).
In tale condizione, si associa all'intervallo individuato una distribuzione gaussiana dalla quale si stabilisce la deviazione standard a partire dal livello di fiducia. L'incertezza tipo sarà posta pari alla deviazione standard così ottenuta.

Di seguito sono riportati alcuni esempi di valutazioni di Tipo B in diverse situazioni, basate sulle informazioni disponibili e su assunzioni dello sperimentatore. In questi casi l'incertezza è ottenuta da fonti esterne o da un'ipotetica distribuzione.

Incertezza ottenuta da fonti esterne

Multiplo di una deviazione standard

Procedura: se riportata in un manuale, o in un certificato di taratura, l'unica informazione sull'incertezza è un multiplo *k* di uno scarto tipo; l'incertezza standard può essere ottenuta dividendo il valore trovato per il fattore di moltiplicazione *k*.

Incertezza ottenuta da una ipotetica distribuzione

Distribuzione gaussiana: "99.73%"

Procedura: Si ipotizza una distribuzione gaussiana per i possibili valori della grandezza considerata e si stimano due limiti, uno inferiore Δ^- ed uno superiore Δ^+, tali che la miglior stima della grandezza in ingresso vale $(\Delta^+ + \Delta^-)/2$, cioè il valore centrale tra i due limiti, e si ha il 99.73% di probabilità che la grandezza si trovi nell'intervallo compreso tra Δ^+ e Δ^-. L'incertezza u_j è approssimativamente $\Delta/3$ dove $\Delta = (\Delta^+ - \Delta^-)/2$ è la semiampiezza dell'intervallo.

Distribuzione uniforme (rettangolare)

Procedura: Per praticità si ipotizzano per la grandezza in ingresso due limiti, uno inferiore Δ^- ed uno superiore Δ^+, tali che l'intervallo tra Δ^+ e Δ^- contiene il 100% dei possibili valori. Ammesso che non ci siano informazioni contrarie, si suppone che i valori compresi in questo intervallo siano ugualmente probabili, la distribuzione della probabilità è uniforme (cioè rettangolare). La miglior stima della grandezza è $(\Delta^+ + \Delta^-)/2$ con $u_j = \Delta/3^{1/2}$ dove $\Delta = (\Delta^+ - \Delta^-)/2$ è la semiampiezza dell'intervallo.

Distribuzione triangolare

In assenza di informazioni specifiche è ragionevole supporre che la distribuzione sia rettangolare.

Ma nel caso sia realistico supporre che i valori prossimi agli estremi siano meno probabili di quelli centrali, è ragionevole ipotizzare una distribuzione gaussiana o, per semplicità, una distribuzione triangolare.

Procedura: Si ipotizzano per la grandezza in ingresso due limiti, uno inferiore Δ^- ed uno superiore Δ^+, tali che l'intervallo tra Δ^+ e Δ^- contiene il 100% dei possibili valori. Ammesso che non ci siano informazioni contrarie, si suppone che i valori compresi in questo intervallo siano distribuiti secondo una distribuzione triangolare. La miglior stima della grandezza è $(\Delta^+ + \Delta^-)/2$ con $u_j = \Delta/6^{1/2}$ dove $\Delta = (\Delta^+ - \Delta^-)/2$ è la semiampiezza dell'intervallo.

Valutazione dell'incertezza nelle misurazioni indirette

Equazione della misurazione

Nella maggior parte dei casi, il misurando *Y* non è misurato direttamente, ma è determinato dalla misura di altre N grandezze $X_1, X_2, \ldots, X_N$ mediante una relazione funzionale *f*, spesso detta ***equazione della misurazione***:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) \tag{3.10}$$

Le grandezze X_i possono essere a loro volta dei misurandi, e quindi possono dipendere da altre grandezze, quali fattori di correzione dovuti ad effetti sistematici, o grandezze che tengono conto di altre fonti di variabilità quali operatori, strumenti, campioni, laboratori e istanti in cui le osservazioni sono effettuate (ad esempio giorni diversi). La funzione *f* può essere una legge fisica, un processo di misurazione, un algoritmo, un grafico e così via; in particolare, contiene tutte le grandezze che contribuiscono all'incertezza del risultato finale della misurazione.

Ad esempio, come puntualizzato nella guida ISO, se si applica una differenza di potenziale V ai capi di un resistore il cui valore varia linearmente con la temperatura, la potenza P (il misurando) dissipata dal resistore alla temperatura t dipende da V, R_0, b e t secondo la relazione

$$P = f(V, R_0, b, t, t_0) = \frac{V^2}{R_0\left[1 + b\left(t - t_0\right)\right]} \tag{3.11}$$

dove R_0 è il valore della resistenza alla temperatura t_0 e b è il coefficiente lineare di resistenza.

La stima *y* del misurando *Y* si ottiene mediante le stime $x_1, x_2, \ldots, x_N$ delle N grandezze d'ingresso $X_1, X_2, \ldots, X_N$, ed è data da:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{3.12}$$

Quando *f* è una funzione non lineare delle grandezze di ingresso X_1, X_2, ..., X_N è preferibile stimare *y* mediante la relazione:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\,(X_{1k}, X_{2k}, ..., X_{Nk}) \tag{3.13}$$

Determinazione dell'incertezza standard composta

Si suppone che il risultato di una osservazione, ancorché legato al valore della grandezza misurata, non sia predicibile esattamente. Si è soliti modellare questa situazione in questo modo:

$$x_i = X_i + e_i \tag{3.14}$$

dove:

X_i sono le variabili indipendenti della (3.10), ossia le grandezze osservate che, per ipotesi di comodità (non indispensabile), sono considerate delle costanti;

x_i sono le osservazioni corrispondenti e, in quanto non predicibili esattamente, vengono considerate variabili casuali;

ε_i, chiamato ***errore dell'osservazione***, è il termine responsabile della casualità. Si pretende inoltre che ε_i sia a media nulla di modo che risulti E(x_i) =X_i, dove E è l'operatore di media statistica.

Effettuata una serie di misurazioni e stabilita l'equazione della misurazione in cui la stima di *Y* è funzione delle stime delle grandezze X_i, e detti μ_i i valori attesi delle osservazioni x_i definiti come:

$$m_y \equiv E\left[f\,(x_1, x_2, ..., x_N)\right] \approx f\,(m_1, m_2, ..., m_N) \tag{3.15}$$

per soddisfare la richiesta di errori a media nulla, è possibile scrivere che:

$$y = f\,(x_1, x_2, ..., x_n) = f\,(m_1, m_2, ..., m_n) + \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = m_i} (x_i - m_i) + ... \tag{3.16}$$

dove la (3.16) rappresenta lo sviluppo dell'equazione della misurazione (3.12) in serie di Taylor nell'intorno di $f\,(m_1, m_2, ..., m_n)$.

Arrestando lo sviluppo al termine del primo ordine la (3.16) si riscrive come:

$$y - m_y \approx \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = m_i} \left(x_i - m_i\right) \tag{3.17}$$

che significa: *il valore atteso delle stime del misurando è ben approssimato dalla stima delle grandezze in ingresso, purché gli errori siano a media nulla*.

Svolgendo il quadrato ambo i membri della precedente equazione e facendone la media statistica, ricordando la notazione:

$$s_y^2 = E\left[\left(y - m_y\right)^2\right] \tag{3.18}$$

si può scrivere che:

$$s_y^2(y) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=m_i}\right)^2 \left(x_i - m_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i=m_i} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{xj=m\,j} \left(x_i - m_i\right)\left(x_j - m_j\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 s^2\left(x_i\right) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} s^2\left(x_i, x_j\right) \tag{3.19}$$

La (3.19), comunemente indicata come ***legge di propagazione delle varianze***, fornisce l'espressione della varianza $s_y^2(y)$, la cui radice quadrata, indicata con $u_c(y)$, rappresenta l'***incertezza standard (o scarto tipo) composta*** del risultato y della misurazione.

Le derivate parziali della funzione f rispetto alle grandezze x_i, spesso indicati come ***coefficienti di sensibilità***, descrivono come varia la stima d'uscita y al variare dei valori delle stime d'ingresso x_1, x_2, ..., x_N. Le grandezze $u(x_i)$ sono le *incertezze standard* associate alle stime di ingresso x_i. Le grandezze $u(x_i,x_j)$ sono le covarianze associate alle stime in ingresso x_i e x_j.

Espressioni semplificate

Nei casi di interesse pratico la legge di propagazione dell'incertezza assume una forma semplificata. Ad esempio, se le stime x_i delle grandezze in ingresso X_i sono assunte non correlate, il secondo termine della (3.15) scompare.

Inoltre, se le stime delle grandezze in ingresso sono incorrelate e l'equazione della misurazione ha una delle seguenti due forme, l'equazione risulta ancora più semplice.

1)

Equazione della misurazione:

espressione lineare

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_N X_N \tag{3.20}$$

Risultato della misurazione:

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_N x_N \tag{3.21}$$

Incertezza tipo composta:

$$u_c^2(y) = a_1^2 u_1^2 \left(x_1\right) + a_2^2 u_2^2 \left(x_2\right) + ... + a_N^2 u_N^2 \left(x_N\right) \tag{3.22}$$

2)

Equazione della misurazione:

prodotto delle grandezze X_i elevate alle potenze a, b,..., p e moltiplicate per la costante A

$$Y = AX_1^a X_2^b ... X_N^p \tag{3.23}$$

Risultato della misurazione:

$$Ax_1^a x_2^b ... x_N^p \tag{3.24}$$

Incertezza relativa composta:

se x_i 0 e y_i 0, si può scrivere:

$$u_{c,r}^2(y) = a^2 u_r^2 \left(x_1\right) + b^2 u_r^2 \left(x_2\right) + ... + p^2 u_r^2 \left(x_N\right) \tag{3.25}$$

dove

$$u_r\left(x_i\right) = \frac{u\left(x_i\right)}{\left|x_i\right|} \tag{3.26}$$

è l'***incertezza relativa*** di x_i, $|x_i|$ è il valore assoluto di x_i.

La grandezza $u_{c,r}(y)$ è l'***incertezza relativa*** di y ed è definita dal rapporto

$$u_{c,r}(y) = \frac{u_c(y)}{|y|} \tag{3.27}$$

dove $|y|$ è il valore assoluto di y.

Significato dell'incertezza

Se la distribuzione di probabilità caratterizzata dal risultato di misurazione y e dalla incertezza tipo composta $u_c(y)$ è approssimativamente gaussiana, e $u_c(y)$ è una buona stima della deviazione standard di y, allora l'intervallo compreso tra $y-u_c(y)$ e $y+u_c(y)$ contiene approssimativamente il 68% dei valori della distribuzione che possono ragionevolmente essere attribuiti al valore della grandezza Y, di cui y è una stima.

Incertezza estesa

Sebbene l'incertezza tipo composta $u_c(y)$ sia generalmente usata per esprimere l'incertezza di molti risultati di misurazione, per alcune applicazioni commerciali, industriali e normative, ad esempio nel caso della salute e della sicurezza, spesso si richiede un valore dell'incertezza che definisca un intervallo per i risultati delle misurazioni, y, che possa con sicurezza contenere i valori del misurando Y. L'***incertezza estesa***, indicata con U, è ottenuta moltiplicando $u_c(y)$ per un fattore di copertura k:

$$U = k \cdot u_c(y) \tag{3.28}$$

e si ritiene, con una certa probabilità, solitamente espressa in termini percentuali, che:

$$\le Y \le y+U \tag{3.29}$$

o più comunemente:

$$\pm U \tag{3.30}$$

Fattore di copertura

In generale il fattore di copertura k è scelto sulla base del livello di fiducia desiderato da associare all'intervallo definito da $Y \pm U$ con $U = k \cdot u_c(y)$. Tipicamente k si trova nell'intervallo $2 \div 3$. Nel caso di distribuzione gaussiana con una fidata stima della deviazione standard $u_c(y)$, per $k=2$, $U=2u_c(y)$ definisce un intervallo avente un livello di fiducia circa uguale al 95% e, per $k=3$, $U=3u_c(y)$ definisce un intervallo avente un livello di fiducia circa uguale al 99%.

Incertezza estesa relativa

In analogia con la incertezza standard relativa, u_r, e la incertezza standard composta relativa, $u_{c,r}$, si definisce la ***incertezza estesa relativa***:

$$\frac{U}{|y|} \qquad (3.31)$$

con y 0.

Stima del misurando, presentazione del risultato ed approssimazioni

Quando si riferisce il risultato di una misurazione, e l'incertezza è espressa mediante l'incertezza tipo composta $u_c(y)$, si deve fornire una descrizione completa di come è definito il misurando Y, nonché fornire una stima di Y e della sua incertezza tipo composta $u_c(y)$ comprensive di unità di misura. Quando opportuno, è d'uopo includere l'incertezza composta relativa.

Quando la valutazione quantitativa dell'incertezza è $u_c(y)$, è preferibile, per evitare ambiguità, dichiarare il risultato numerico nel modo seguente:

(valore ± incertezza) unità di misura

Ad esempio, la grandezza di cui si riporta il valore è un campione di tensione avente valore nominale di 10V e tensione V_S; la presentazione corretta è:

$$V_S = (10{,}03103 \pm 0{,}00022)\ \mathrm{V}$$

dove 0,22mV è l'incertezza tipo composta $u_c(y)$.

Quando si riferisce il risultato di una misurazione, e quando la valutazione quantitativa dell'incertezza è l'incertezza estesa $U=k \cdot u_c(y)$, si deve fornire una descrizione completa di come è definito il misurando Y e dichiarare il risultato della misurazione nella forma $Y=y \pm U$ comprensive di unità di misura. Quando opportuno, è d'uopo includere l'incertezza composta relativa.

Si deve, inoltre, fornire il valore k usato per ottenere U (oppure dichiarare k e $u_c(y)$) ed indicare il livello di fiducia approssimato associato all'intervallo $y \pm U$, specificando in quale modo è stato ottenuto.

Ad esempio:

$$V_S = (10,03103 \pm 0,00049)\ \mathrm{V}$$

dove il numero che segue il simbolo ± è il valore numerico di (un'incertezza estesa) $U=k \cdot u_c$, con U determinata da (un'incertezza tipo composta) u_c=0,22mV e da (un fattore di copertura) k=2,24.

I valori numerici della stima y e della sua incertezza tipo $u_c(y)$ o dell'incertezza estesa U non devono essere indicati con un numero eccessivo di cifre significative. È di regola sufficiente riportare $u_c(y)$ ed U (così come le incertezze tipo $u(x_i)$ delle stime di ingresso x_i) con due cifre significative, sebbene sia talvolta opportuno conservare ulteriori cifre per evitare errori di arrotondamento dei calcoli successivi.

Può essere appropriato, quando si riportano i risultati finali, arrotondare le incertezze per eccesso piuttosto che alla cifra più vicina. Ad esempio, $u_c(y)$=83,56kHz sarà arrotondato a 84kHz.

In ogni caso, è bene lasciarsi guidare dal buon senso, cosicché un valore come $u(x_i)$=32,08mΩ sarà arrotondato per difetto a 32mΩ.

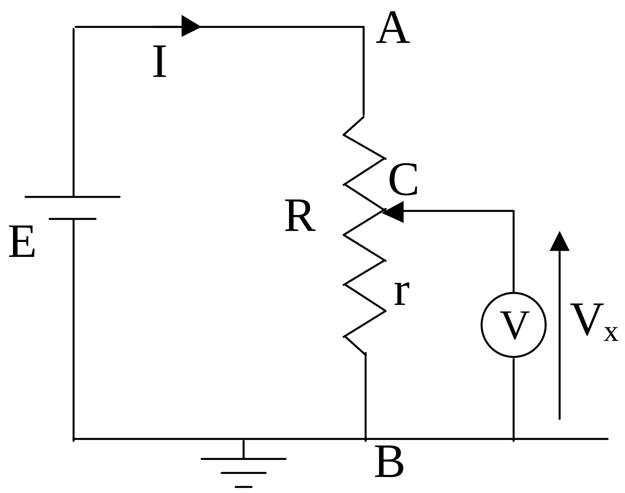
Le stime d'ingresso e d'uscita sono arrotondate in modo da armonizzarsi con le proprie incertezze; ad esempio, se y=2,05762A e $u_c(y)$=27mA, allora y è arrotondato a 20,058A.

Esempio 3.1

Si vuole determinare, mediante misurazione indiretta, la resistenza, r, tra il punto di derivazione C e l'estremo B del potenziometro mostrato in Fig.1. All'uopo, si utilizza un voltmetro, *V*, che restituisce il valore della caduta di tensione, V_x, ai capi di *r* e presenta errore di consumo trascurabile. Si supponga che, per la determinazione della stima di ingresso e dell'incertezza tipo di V_x, siano state effettuate 30 osservazioni ripetute ed indipendenti, i cui risultati sono riportati in Tab.I. Si supponga, inoltre, che in relazione ai valori della resistenza complessiva del potenziometro, *R*, e della f.e.m della batteria di alimentazione, *E*, l'unica informazione disponibile è la loro sicura appartenenza rispettivamente agli intervalli (96.54÷103.46)Ω e (0.983÷1.017)V.

Si valuti la stima d'uscita.

Tab.I
V_x [V]
0,6951
0,6951
0,7039
0,6991
0,7094
0,7159
0,6911
0,6971
0,6994
0,7026
0,6948
0,7034
0,6989
0,7036
0,6990
0,6922
0,6978
0,7008
0,7044
0,7051
0,7102
0,6905
0,6983
0,6934
0,6990
0,7018
0,7057
0,7095
0,6969
0,7045



- figura.3.2 -

Soluzione:

Si sceglie, per la stima del misurando, la media aritmetica delle 30 osservazioni:

$$\overline{V}_x = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} V_{x,i} = 70{,}06167 \cdot 10^{-2} V$$

l'incertezza associata a tale stima è lo scarto tipo sperimentale della media, determinato mediante valutazione di tipo A, ed è dato da:

$$u_A(V_x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(V_{x,i} - \overline{V}_x\right)^2} = 1{,}099416 \cdot 10^{-3} V \approx 1{,}1 \cdot 10^{-3} V$$

Supponendo una distribuzione simmetrica rettangolare, il valore della resistenza del potenziometro R è data da:

$$R = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} = \frac{103{,}46\Omega + 96{,}54\Omega}{2} = 100{,}000\,\Omega$$

l'incertezza associata alla stima della resistenza R=100,000Ω è determinata mediante una valutazione di tipo B:

$$u_B(R) = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{\sqrt{3}} = \frac{103{,}46\Omega - 96{,}54\Omega}{\sqrt{3}} = 3{,}995263\Omega \approx 4{,}0\Omega$$

Operando in modo analogo per la tensione della batteria di alimentazione, si ha:

$$E = \frac{E_{\max} + E_{\min}}{2} = \frac{1{,}017V + 0{,}983V}{2} = 1{,}0000V$$

con incertezza tipo:

$$u_B(E) = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{\sqrt{3}} = \frac{1{,}017V - 0{,}983V}{\sqrt{3}} = 0{,}019629V \approx 0{,}020V$$

Un'analisi del circuito di figura 3.2 fornisce:

$$r = R\frac{V_x}{E} \tag{3.32}$$

per cui:

$$r = \left(100{,}000\Omega\right)\frac{\left(70{,}06167 \cdot 10^{-2} V\right)}{\left(1{,}0000 V\right)} = 70{,}06167\Omega$$

Esempio 3.2

Con riferimento all'esempio 3.1, si valuti l'incertezza tipo composta nell'ipotesi che le grandezze di ingresso siano incorrelate, e si esprima il risultato della misurazione corredato dell'incertezza estesa con fattore di copertura pari a 2.

Soluzione:
La varianza composta è data da:

$$u_c^2\left(y\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2\left(x_i\right) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u^2\left(x_i, x_j\right) \tag{3.33}$$

Tale relazione, nel caso di grandezze incorrelate, si semplifica in:

$$u_c^2\left(y\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2\left(x_i\right) \tag{3.34}$$

poiché $r = f(E, V_x, R)$ si ha:

$$u_c^2(r) = \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)^2 u_B^2(E) + \left(\frac{\partial f}{\partial V_x}\right)^2 u_A^2(V_x) + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 u_B^2(R) \tag{3.35}$$

poiché

$$\left(\frac{\partial r}{\partial E}\right)^2 = \left(\frac{RV_x}{E^2}\right)^2 = 4908{,}637603\mathrm{A}^{-2}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial V_x}\right)^2 = \left(\frac{R}{E}\right)^2 = 10^4\,\mathrm{A}^{-2}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^2 = \left(\frac{V_x}{E}\right)^2 = 0{,}490863$$

allora:

$$u_c^2(r) = \left(4908{,}637603A^{-2}\right)\left(0{,}019629V\right)^2 +$$
$$+\left(10^4 A^{-2}\right)\left(1{,}099416\cdot 10^{-3}V\right)^2 +$$
$$+\left(0{,}490863\right)\left(3{,}995263\Omega\right)^2$$

$$u_c^2(r) = 9{,}726815\Omega^2 \Rightarrow u_c(r) = 3{,}118784\Omega \approx 3{,}1\Omega$$

scegliendo il fattore di copertura k=2, l'incertezza estesa è:

$$U = k \cdot u_c\left(r\right) = 6{,}2\Omega$$

e dunque, il risultato cercato vale:

$$r = (70{,}0 \pm 6{,}2)\Omega$$

Esempio 3.3

Viene eseguita una serie di misure di tensione, ripetute ed indipendenti, svolte nelle stesse condizioni sperimentali, mediante un voltmetro numerico le cui caratteristiche di precisione sono:

$$A = \pm\left(a\% \cdot V_{lettura} + b\% \cdot V_{range}\right) \tag{3.36}$$

Nel range di 1V, ad un anno dalla taratura: a%=4,0x10^{-3} volte la lettura, b%=0,7x10^{-3} volte il range.

Si supponga che lo strumento sia usato per misurare sulla scala di 1V, 8 mesi dopo la taratura, una differenza di potenziale V, e che la media di un certo numero di osservazioni ripetute ed indipendenti sia $\overline{V} = 0{,}931018\text{V}$ con una incertezza tipo (di categoria A) $u_A\left(\overline{V}\right) = 12m\text{V}$.

Si può ottenere l'incertezza tipo associata alla specifica del costruttore mediante una valutazione di categoria B, assumendo che l'accuratezza dichiarata rappresenti i limiti simmetrici di una correzione additiva a $\overline{V}$, $\Delta\overline{V}$, avente valore atteso nullo e probabilità di giacere indifferentemente in qualunque punto interno ai limiti.

La semiampiezza Δ della distribuzione simmetrica rettangolare dei valori possibili di $\Delta\overline{V}$ è allora:

$$\Delta = \left(40 \cdot 10^{-6}\right)\left(0{,}931018\text{V}\right) + \left(7 \cdot 10^{-6}\right)\left(1\text{V}\right) = 44{,}240720m\text{V}$$

e

$$u_B^2\left(\Delta\overline{V}\right) = \frac{\Delta^2}{3} = 652{,}413768\left(m\text{V}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B\left(\Delta\overline{V}\right) = 25{,}5423916m\text{V}$$

La stima del valore del misurando *V*, denominata per semplicità con lo stesso simbolo *V*, è data da:

$$V = \overline{V} + \Delta\overline{V} = 0{,}931018\text{V}$$

Da questa stima, si ottiene l'incertezza tipo composta combinando l'incertezza tipo di categoria A di $\overline{V}$ con l'incertezza tipo di categoria B di $\Delta\overline{V}$:

$$u_c^2(V) = \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{V}}\right)^2 u_A^2\left(\overline{V}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta\overline{V}}\right)^2 u_B^2\left(\Delta\overline{V}\right) \tag{3.37}$$

Poiché i coefficienti di sensibilità sono unitari risulta:

$$u_c^2(V) = u_A^2\left(\overline{V}\right) + u_B^2\left(\Delta\overline{V}\right) = 796{,}413768\left(m\text{V}\right)^2 \Rightarrow u_c\left(\overline{V}\right) = 28{,}2208038m\text{V}$$

Procedura per la valutazione e la dichiarazione dell'incertezza

I passi da seguire per la valutazione e la dichiarazione dell'incertezza del risultato di una misurazione, possono essere riassunti come segue:

1. Si esprime matematicamente la relazione tra il misurando Y e le grandezze di ingresso X_i da cui Y dipende: $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. La funzione f dovrebbe contenere ogni grandezza, comprese tutte le correzioni ed i fattori di correzione, che possa contribuire con una componente significativa all'incertezza del risultato della misurazione.
2. Si determina x_i, il valore stimato della grandezza d'ingresso X_i, sulla base dell'analisi statistica di serie di osservazioni o mediante altri metodi.
3. Si valuta l'incertezza tipo $u(x_i)$ di ciascuna stima di ingresso x_i. Per una stima di ingresso ottenuta sulla base dell'analisi statistica di serie di osservazioni, l'incertezza tipo è valutata secondo quanto descritto per la valutazione di categoria A dell'incertezza tipo. Per una stima di ingresso ottenuta con altri metodi, l'incertezza tipo $u(x_i)$ è valutata secondo quanto descritto relativamente ad una valutazione di categoria B dell'incertezza tipo.
4. Si valutano le covarianze associate alle stime di ingresso eventualmente correlate.
5. Si calcola il risultato della misurazione, vale a dire la stima y del misurando Y, dalla relazione funzionale f usando, per le grandezze di ingresso X_i, le corrispondenti stime x_i ricavate al passo numero 2.
6. Si determina l'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ del risultato della misurazione y dalle incertezze tipo e dalle covarianze associate alle stime di ingresso. Se la misurazione determina simultaneamente più di una stima di uscita, devono essere calcolate le covarianze.
7. Se è necessario dare un'incertezza estesa U, con l'intendimento di fornire un intervallo compreso tra $y-U$ ed $y+U$ che ci si aspetti contenere una grande porzione della distribuzione di valori ragionevolmente attribuibili al misurando Y, si moltiplichi l'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ per un fattore di copertura k, tipicamente compreso tra 2 e 3, in modo da ottenere $U=k \cdot u_c(y)$. Si scelga k sulla base del grado di fiducia richiesto per l'intervallo.
8. Si riporta il risultato della misurazione y con la sua incertezza tipo combinata $u_c(y)$, o la sua incertezza estesa U; si usi uno dei modi raccomandati. Si descriva come si sono ottenuti y e $u_c(y)$, o U.