46. Modelli matematici

Indice

Definizione di modello:

Devoto Oli

1. L'oggetto o il termine atto a fornire un conveniente sistema di punti di riferimento ai fini della riproduzione e dell'imitazione
2. Costruzione che riproduce in scala ridotta le forme esatte e le caratteristiche di un'opera in fase di progettazione, o a scopo illustrativo e sperimentale

Garzanti Linguistica

1. prototipo industriale; per estens., oggetto prodotto in serie che riproduce un prototipo industriale
2. riproduzione tridimensionale in scala ridotta di un oggetto o di una struttura | realizzazione in scala ridotta di qualcosa che si intende costruire, nella realtà per lo più a scopo sperimentale o di studio; plastico: un modello in legno, in creta, in gesso.
3. (scient.) schema teorico che descrive un fenomeno o un insieme di fenomeni mettendone in evidenza le caratteristiche strutturali ritenute più rilevanti: modello dell'atomo, del cervello;

Definizione di modello matematico:

Wikipedia

- Un modello matematico è un modello costruito usando il linguaggio e gli strumenti della matematica

Garzanti Linguistica

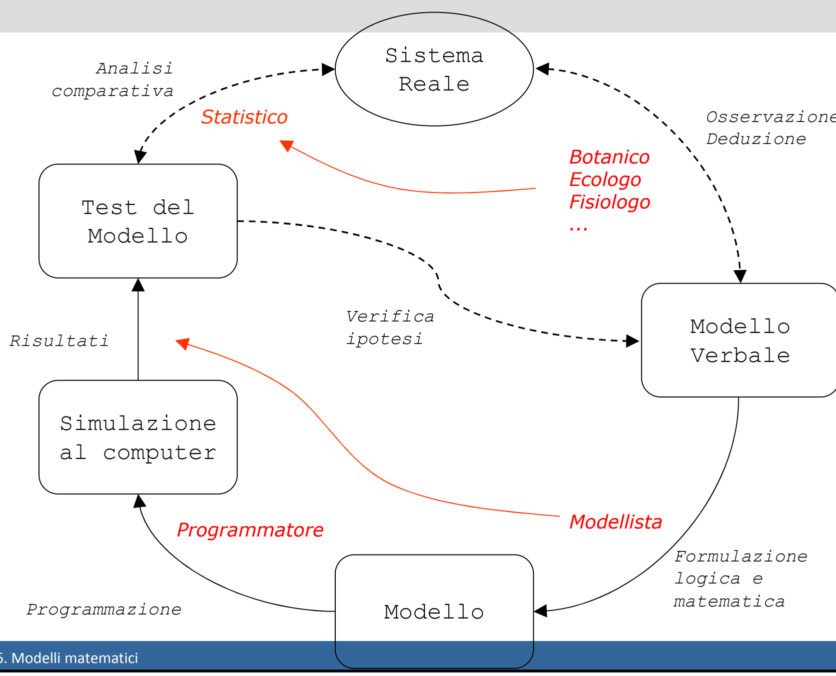
- Insieme di equazioni che descrivono in modo semplificato le relazioni ipotizzate tra una serie di fenomeni, allo scopo di spiegarne o prevederne lo svolgimento

Processo di modellizzazione

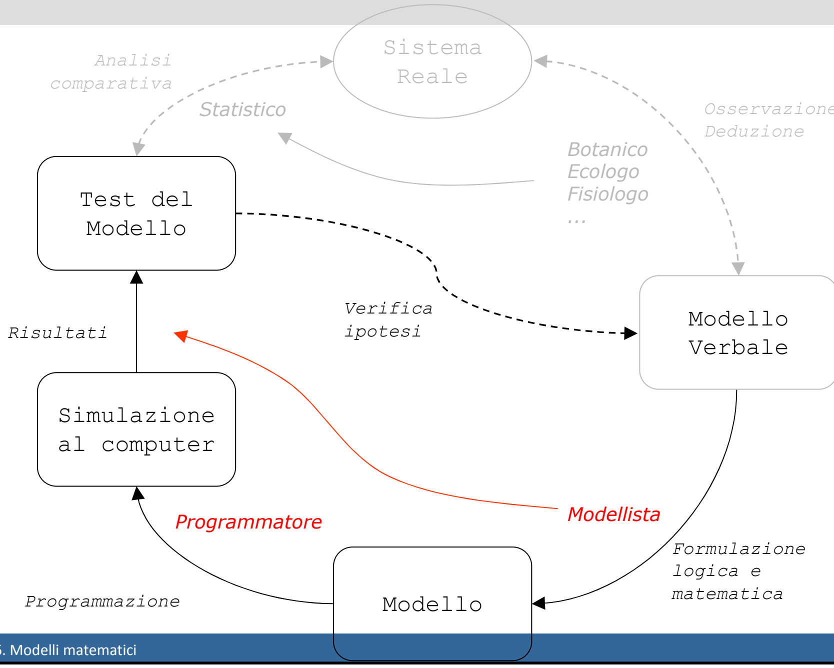
Il processo di modellizzazione e' caratterizzato da alcuni processi (passi) fondamentali:

1. la conoscenza della sistema reale in esame e, attraverso uno studio di osservazione e deduzione, la costruzione di un modello "verbale".
2. la formalizzazione logica matematica del modello, cosi da avere un piu' rigoroso modello matematico.
3. la programmazione (che puo' avvenire attraverso l'uso di un calcolatore) del modello, cosi da poter effettuare delle simulazioni del proprio modello matematico.
4. l'analisi dei risultati, cosi da testare le bontà del modello rispetto al sistema reale.

Processo di modellizzazione: schema



Processo di modellizzazione: astrazione



Obiettivi della modellazione matematica

1. Favorire la piena comprensione del fenomeno, mediante una rappresentazione sintetica delle relazioni che intercorrono fra i differenti parametri del sistema

2. Prevedere lo stato del sistema in un tempo futuro, al variare dei parametri che lo caratterizzano.

3. Possibilità di confrontare fra loro fenomeni (anche differenti) caratterizzati da dinamiche analoghe

Modellazione matematica

In questa lezione analizzeremo dei semplici modelli di crescita di popolazione, in cui la variabile indipendente è il tempo, mentre quella dipendente è il numero di individui della popolazione. I problemi di crescita di popolazione sono applicati in numerosi settori, relativamente a fenomeni ed intervalli temporanei estremamente differenziati.

Un modello di crescita si presenta nella forma

$$y(t)=f(t,a,b,c,d,..)$$

dove a,b,c,.. sono i parametri del modello.

Modellazione matematica

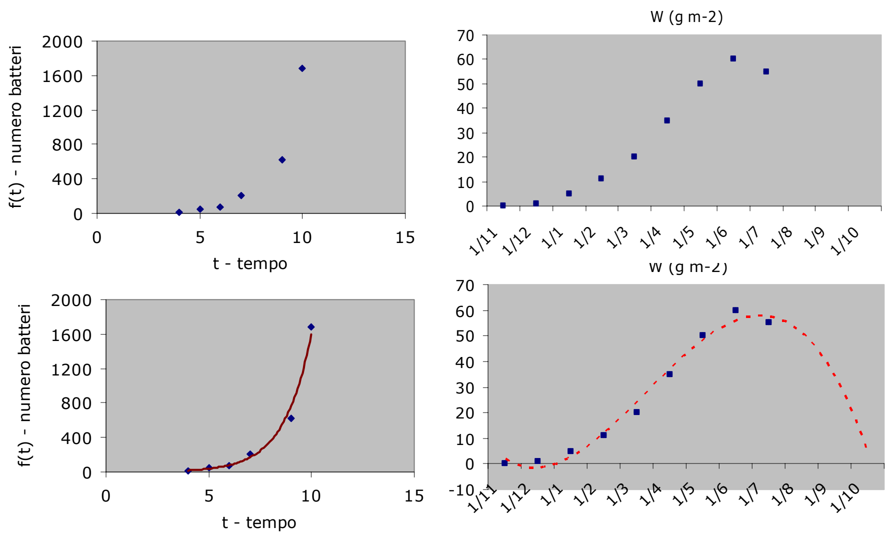
La scelta del modello $y(t)=f(t,a,b,c,d,..)$ va fatta in base alle conoscenze relative alle caratteristiche della popolazione, e dell'ambiente, quali

- esistenza di una capacità portante del sistema (o valore soglia)
- dinamica di crescita
- dinamica di interazione fra gli individui
- …………

mentre la scelta dei parametri a,b,c,.. dipende dal caso studio considerato e, dunque, da informazioni quali

- dati sperimentali disponibili
- assunzioni circa il fenomeno, tipo "tempo previsto per il raddoppio della popolazione", "tempo previsto per il raggiungimento di una certa soglia", tasso di natalità stimato, etc ….

Dati -> modello



Equazioni differenziali

Nell'analisi matematica, un'equazione differenziale è una relazione tra una funzione f(x) incognita ed alcune sue derivate

Modellazione matematica

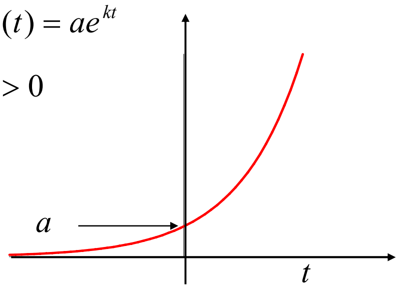
I semplici modelli che consideriamo sono

- quello di tipo esponenziale
- il classico modello di crescita logistica

Crescita esponenziale (Malthus)

$G(t) = ae^{kt}$

$k > 0$



$G(0) = a$

$\lim_{t \to +\infty} G(t) = +\infty$

$\lim_{t \to -\infty} G(t) = 0$

$G'(t) = k \cdot ae^{kt} \Leftrightarrow G'(t) = k \cdot G(t)$

Interpretazione dei parametri

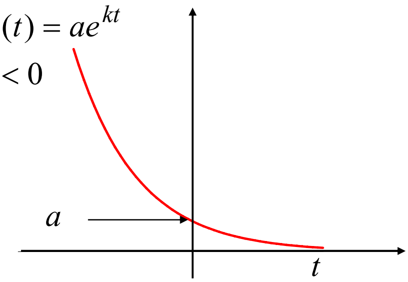
Un modello esponenziale (con *k>0*) è per fenomeni di crescita che

1. Prevedono una crescita illimitata nel tempo
2. Un livello iniziale della popolazione (*t=0*) pari ad *a*
3. Una velocità istantanea di crescita proporzionale (secondo *k)* al numero di individui presenti in tale istante

Modelli di decadimento

$$G(t) = ae^{kt}$$

$$k < 0$$



$$G(0) = a$$

$$\lim_{t \to +\infty} G(t) = 0$$

$$\lim_{t \to -\infty} G(t) = +\infty$$

$$G'(t) = k \cdot ae^{kt} \Leftrightarrow G'(t) = k \cdot G(t)$$

Interpretazione dei parametri

Un modello esponenziale con ($k<0$) è per fenomeni di decadimento o decrescita di una popolazione che prevedono

1. L'estinzione (asintotica) della popolazione
2. Un livello iniziale della popolazione ($t=0$) pari ad a
3. Una velocità istantanea di decrescita proporzionale (secondo k) al numero di individui presenti in tale istante

Crescita esponenziale e modelli di decadimento

I modelli esponenziali sono modelli estremamente semplici, con due parametri che sono ben interpretabili; come modelli di crescita (k>0) sono solitamente utili per rappresentare la crescita di popolazioni in condizioni ideali (senza vincoli di risorse). Per intervalli di tempo brevi, essi possono essere piuttosto efficaci.

Possibili esempi:

- Crescita di una coltura di cellule
- Decadimento radioattivo
- Legge del raffreddamento di Newton

Modello logistico (con 3 parametri)

$$G(t) = \frac{ab}{a + (b-a)e^{-kt}} \quad , \quad a,b,k > 0 \quad a < b$$

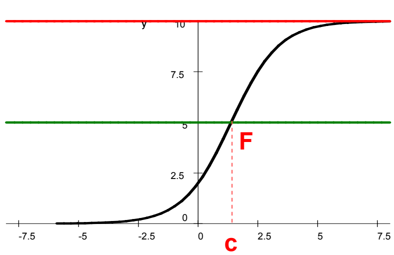
$$G(0) =$$

$$\lim_{t \to +\infty} G(t) = \qquad \lim_{t \to -\infty} G(t) =$$

$$G'(t) =$$

Osserviamo che la derivata al tempo *t* e'
• proporzionale al livello raggiunto dalla popolazione a tale istante secondo *k>0* (al crescere della popolazione cresce il tasso di natalità)
• proporzionale al quadrato del livello raggiunto dalla popolazione a tale istante secondo *–(k/b)<0* (al crescere della popolazione decresce il tasso di natalità)
La dinamica della popolazione è risultante di due effetti opposti: a bassi livelli di popolazione prevale il primo, successivamente il secondo pruce un arresto della crescita!

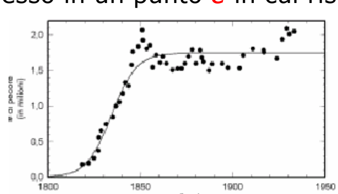
Modello logistico (con 3 parametri)



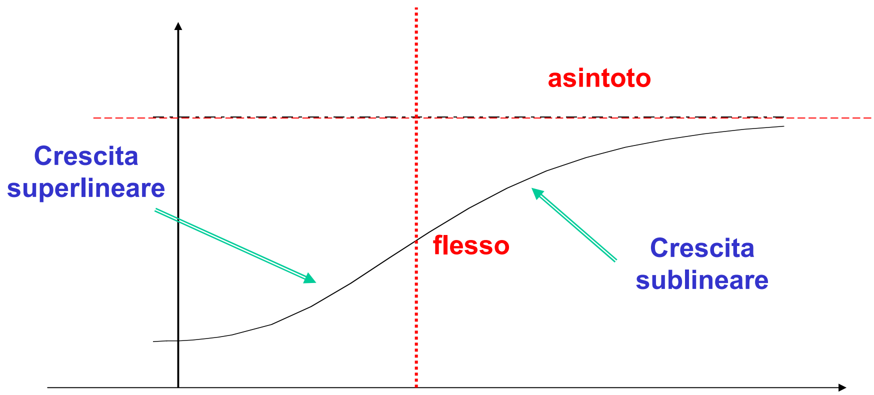
$$G(t) = \frac{ab}{a + (b-a)e^{-kt}} \quad , \quad a,b,k > 0$$

$$a = 2, \quad b = 10$$

Supponiamo sia *a<b*. Rispetto al modello esponenziale, il modello logistico
• prevede che la popolazione raggiunga asintoticamente il valore *b* a partire da un valore *a (in maniera monotona crescente)*
• ammette un flesso in un punto *c* in cui risulta *f(c)=b/2*

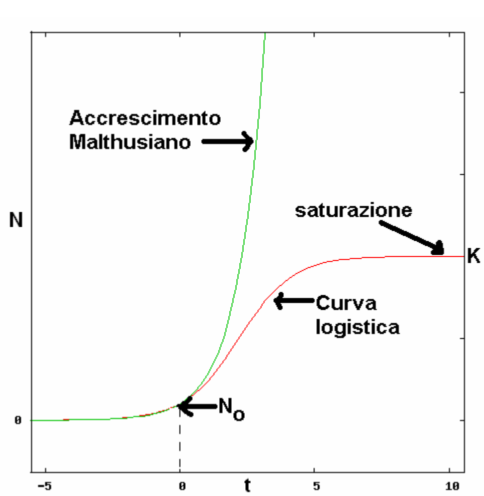


Modelli sigmoidali

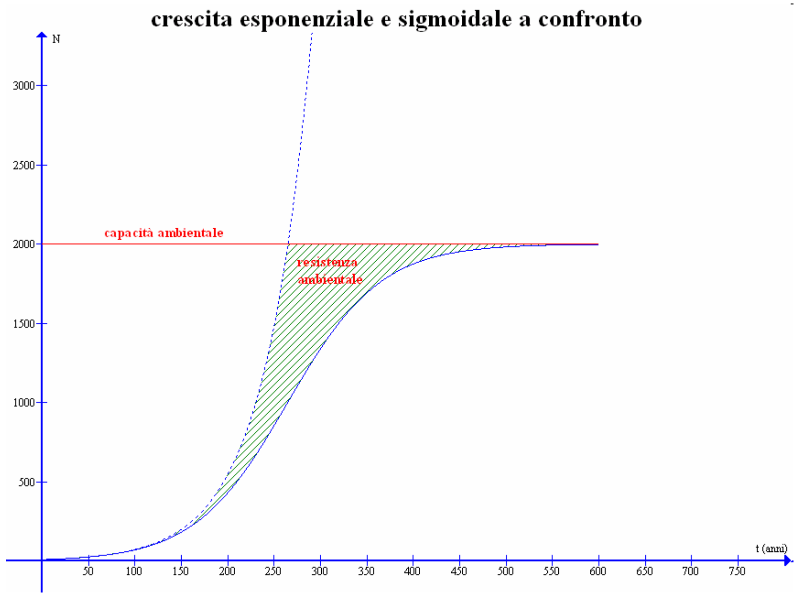


Un modello sigmoidale è per fenomeni di crescita che prevedono una fase **lag** (di ritardo o incubazione), una fase di crescita intensa **(superlineare),** cui segue una fase di crescita sempre più lenta **(sublineare),** che porta al raggiungimento di un valore di soglia (asintoto)

Esponenziale vs logistico



Esponenziale vs logistico



Logistico: applicazione alle H1N1